

Die Extraktion der Energieverlustfunktion beim KATRIN Experiment

Diplomarbeit
vorgelegt von

Sebastian Ziegler

am Institut für Experimentelle Kernphysik (IEKP)
der Fakultät für Physik

Erstgutachter:
Zweitgutachter:
Betreuender Mitarbeiter:

Prof. Dr. Guido Drexlin
Prof. Dr. Ulrich Husemann
Dr. Markus Steidl

Bearbeitungszeit: 01. April 2012 – 28. März 2013

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben.

Ich erkläre, dass die wörtlichen oder dem Sinne nach anderen Veröffentlichungen entnommenen Stellen von mir kenntlich gemacht wurden.

Karlsruhe, den 28. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Neutrinophysik	3
1.1 Geschichtliche Entwicklung der Neutrinophysik	3
1.2 Neutrinooszillation	5
1.3 Bestimmung der Neutrinomasse	5
2 Das KATRIN Experiment	9
2.1 Messprinzip	9
2.1.1 MAC-E-Filter	10
2.2 Experimenteller Aufbau	12
2.2.1 Tritiumquelle	12
2.2.2 Transportsektion	14
2.2.3 Spektrometer	15
2.2.4 Detektor	16
3 Beschreibung der Simulationsmethoden	19
3.1 Streuprozesse und Energieverlustfunktion	19
3.2 Simulation der Tritiumquelle und des integrierten Spektrums	21
3.3 Teilchentracking in der Tritiumquelle	24
3.4 Analyse des Spektrums	24
3.4.1 Untersuchung des simulierten Spektrums mit KaFit	25
3.4.2 Statistische und systematische Unsicherheiten	27
4 Transmissionsfunktion und Antwortfunktion	29
4.1 Transmission und Transmissionsfunktion	29
4.1.1 Transmission	29
4.1.2 Transmissionsfunktion - allgemeiner Fall	32
4.1.3 Transmissionsfunktion - explizite Berechnung	35
4.1.4 Abweichungen vom Idealfall	36
4.2 Die Antwortfunktion	42
4.2.1 Näherungsweise Berechnung	42
4.2.2 Exakte Berechnung	47
4.2.3 Einfluss auf die Bestimmung der Neutrinomasse	49
5 Simulierte Messung einer Antwortfunktion	53
5.1 Elektronenkanone	53
5.2 Simulation mit Teilchentracking	55

6	Extraktion der Energieverlustfunktion	59
6.1	Vorüberlegungen	60
6.1.1	Vernachlässigung der Winkelverteilung	60
6.1.2	Vernachlässigung der Energieverteilung	65
6.1.3	Bestimmung der Streuwahrscheinlichkeiten	67
6.2	Sukzessive Extraktion	74
6.3	Optimale Säulendichte und Messdauer	80
6.3.1	Optimale Säulendichte	81
6.3.2	Optimale Messdauer	84
6.4	Nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung	86
6.5	Ergebnisse	87
6.5.1	Einfluss auf die Bestimmung der Neutrinomasse	88
6.5.2	Optimierungsmöglichkeiten	91
6.5.3	Vergleich mit bisherigen Methoden	91
7	Zusammenfassung und Ausblick	95
A	Simulationsergebnisse	99
A.1	Bestimmung systematischer Unsicherheiten mit KaFit	99
A.1.1	Analyse mit genäherten Antwortfunktionen	100
A.1.2	Analyse mit unterschiedlichen Energieverlustfunktionen	101
A.2	Ergebnisse aus dem Teilcentracking	104
	Danksagung	107
	Literaturverzeichnis	108

Einleitung

Der experimentelle Nachweis von Neutrinos gelang erstmals 1956 durch Reines und Cowan [1] und bestätigte damit die vorausgegangenen Überlegungen von Pauli, der ihre Existenz bereits 1930 postulierte [2]. Trotz oder gerade wegen der extrem schwachen Interaktion von Neutrinos mit Materie sehen sich Physiker seither großen theoretischen wie experimentellen Herausforderungen in der Neutrinophysik gegenübergestellt.

Im Standardmodell der Teilchenphysik sind die Neutrinos seit den 1960er Jahren als masselose Leptonen berücksichtigt. Doch die u. a. im Super-Kamiokande Experiment bestätigte Existenz der Neutrinooszillation [3] setzt eine von Null verschiedene Neutrinomasse voraus und bietet damit einen ersten Einblick in die Physik jenseits des Standardmodells.

Nach bisherigen Experimenten zur direkten Bestimmung der Neutrinomasse kann durch die kinematische Untersuchung von Elektronen aus dem Tritiumbetazerfall eine aktuelle Obergrenze von $m_{\bar{\nu}_e} < 2,05 \text{ eV}/c^2$ (95 % C. L.) für die Masse des Elektron-Antineutrinos angegeben werden [4]. Kap. 1 gibt einen Überblick zur geschichtlichen Entwicklung und dem heutigen Stand der Neutrinophysik.

Das in Kap. 2 vorgestellte **KARlsruhe TRITium Neutrino (KATRIN)** Experiment basiert ebenfalls auf dem Tritiumbetazerfall und befindet sich derzeit im Aufbau am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Es wird in der Lage sein, die Masse des Elektron-Antineutrinos mit einer bisher unerreichten Sensitivität von $m_{\nu} \leq 200 \text{ meV}/c^2$ [5] zu bestimmen und ist damit um eine Größenordnung genauer als die bisherigen Experimente. Zum Erreichen dieser Zielsetzung ist eine sehr präzise Vermessung des β -Spektrums entscheidend. Unsicherheiten einzelner Parameter des Experiments müssen auf ein Minimum reduziert werden, sodass eine zuverlässige Analyse der Messergebnisse stattfinden kann. Bereits vor Beginn der Hauptmessungen werden dazu Simulationen durchgeführt, die im Hinblick auf die Neutrinomassenbestimmung detaillierte Auskunft über den Einfluss wichtiger Effekte geben. Simulationsmethoden, die im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kommen, werden in Kap. 3 vorgestellt und in den folgenden Kapiteln angewendet.

Dass beim KATRIN-Experiment sehr genaue Berechnungen des β -Spektrums erforderlich sind, wird in Kap. 4 deutlich, wenn nach einer umfassenden Beschreibung des Transmissionsverhaltens der Elektronen verschiedene Näherungen bei der Berechnung des resultierenden Spektrums untersucht werden.

Im Experiment führen elastische und inelastische Streuprozesse zwischen den nachzuweisenden β -Elektronen und Tritiummolekülen der gasförmigen Quelle zu Ener-

gieverlusten, die bei der Analyse berücksichtigt werden müssen. In diesem Zusammenhang erfolgt bereits vor Beginn der eigentlichen Neutrinomassen-Messungen eine experimentelle Bestimmung der sogenannten *Energieverlustfunktion*. Die damit einhergehenden Unsicherheiten haben einen maßgeblichen systematischen Einfluss auf die Sensitivität des KATRIN-Experiments. Mit der *Entfaltung der Energieverlustfunktion* wurde in [6, 7] bereits eine mögliche Bestimmungsmethode untersucht. Sie beruht auf der genauen Kenntnis von Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Streuprozesse in der Tritiumquelle stattfinden.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Entwicklung, Anwendung und Untersuchung einer alternativen Methode (*Extraktion der Energieverlustfunktion*), durch welche die Energieverlustfunktion ohne detaillierte Vorkenntnisse der Streuprozesse experimentell bestimmt werden kann. In Kap. 5 wird zunächst die dafür erforderliche Messung unter Berücksichtigung von Streuprozessen simuliert. Anschließend wird die Extraktion der Energieverlustfunktion in Kap. 6 vorgestellt und erläutert. In einem letzten Schritt werden dann die damit verbundenen Unsicherheiten bei der Neutrinomassenbestimmung für unterschiedliche Rahmenbedingungen untersucht.

1. Neutrino-physik

Dieses Kapitel gibt zur physikalischen Motivation des KATRIN-Experiments einen kurzen Einblick in die Entwicklung und den aktuellen Stand der Neutrino-physik. Abschnitt 1.1 befasst sich zunächst mit der historischen Etablierung der Neutrinos als Elementarteilchen und liefert anschließend eine Zusammenfassung ihrer wichtigsten physikalischen Eigenschaften. Im Zusammenhang mit der Neutrinooszillation wird daraufhin der Fokus in Abschnitt 1.2 auf die Neutrinomasse gelegt, deren Bestimmung in Abschnitt 1.3 thematisiert wird.

1.1 Geschichtliche Entwicklung der Neutrino-physik

W. Pauli postulierte 1930 die Existenz des Neutrinos. Schriftlich wurde es erstmals in seinem berühmten Brief an seine Arbeitskollegen erwähnt („Sehr geehrte radioaktive Damen und Herren...“ [2]) und darin noch als Neutron¹ bezeichnet. Nachdem sowohl beim α -Zerfall als auch beim γ -Zerfall diskrete Linienspektren beobachtet werden konnten, gab es für das kontinuierliche Energiespektrum des erstmals 1911 von L. Meitner und 1914 von O. Hahn beobachteten β -Zerfalls keine Erklärung. Die Energie- und Impulserhaltungen waren augenscheinlich verletzt, was die Wissenschaftler vor große Rätsel stellte. Pauli löste dieses Problem durch die theoretische Einführung eines neuen, bis dahin nicht nachgewiesenen Teilchens: dem Neutrino ν bzw. Antineutrino $\bar{\nu}$. Dieses sollte nach Pauli beim β -Zerfall eines Neutrons in ein Proton und ein Elektron als drittes Teilchen partizipieren:

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e. \quad (1.1)$$

Durch Emission des Neutrinos unter verschiedenen Winkeln und mit unterschiedlichen Energien war nun der Ausgleich der Energie- und Impulsbilanzen möglich,

¹Erst nachdem J. Chadwick 1932 das heute als Neutron bekannte Teilchen entdeckte, erfolgte die Umbenennung in *Neutrino*.

sodass dieses etablierte Konzept der Erhaltungssätze beibehalten werden konnte. Außerdem leuchtete nun ein, warum ein Atomkern beim β -Zerfall eine ganzzahlige Spinänderung erfährt, während durch das Elektron lediglich der Spin $\frac{1}{2}$ davongetragen wird. Das Neutrino sollte deshalb ebenfalls den Spin $\frac{1}{2}$ besitzen. Der experimentelle Nachweis des Neutrinos gelang jedoch erst 26 Jahre nach Paulis Postulat durch F. Reines und C.L. Cowan: Mit Kernreaktoren als starke Neutrinoquellen konnten sie 1956 erstmals den inversen β -Zerfall

$$p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+ \quad (1.2)$$

und damit das benötigte Elektron-Antineutrino nachweisen. Dabei wechselwirkten die Antineutrinos aus den Spaltprodukten des Reaktors mit den Protonen von CdCl (Cadmiumchlorid) in wässriger Lösung. Es entstanden bei jedem inversen β -Zerfall jeweils ein Neutron und ein Positron. Während die Annihilation des Positrons unverzüglich zur Entstehung zweier γ -Quanten führte, wurde das Neutron zunächst durch einen Cadmiumkern eingefangen. Der dadurch angeregte Kern emittierte beim Rückfall in seinen Grundzustand ebenfalls γ -Strahlung. Die beiden γ -Signale konnten zeitversetzt detektiert werden und führten letztendlich zum Nachweis des Neutrinos ([1]).

Wenige Jahre später gelang der Nachweis eines weiteren Teilchens: des Myon-Neutrinos ν_μ (Teilchen und Antiteilchen seien in dieser Notation zusammengefasst). Lederman, Schwartz und Steinberger zeigten 1962, dass die aus den Reaktionen

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu \quad K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu \quad (1.3)$$

entstandenen Neutrinos bei anschließender Wechselwirkung mit Materie lediglich zur Produktion von Myonen führten und nicht zu Elektronen wie beim inversen β -Zerfall [8]. Deshalb konnten diese Neutrinos keine Elektron-Neutrinos sein. Das Myon-Neutrino war damit entdeckt und reihte sich in das gerade in Entwicklung befindliche *StandardModell* (SM) der Teilchenphysik ein.

Am *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC) gelang 1975 schließlich der Nachweis des dritten elektrisch geladenen Leptons: des Tauons. Infolgedessen gab es wenig Zweifel daran, dass auch ein weiteres Neutrino, das Tauon-Neutrino ν_τ , existieren musste. Der Nachweis dieses Neutrinos konnte erst im Jahr 2000 durch das DONUT-Experiment ([9]) verkündet werden.

Im SM bilden die elektrisch neutralen Neutrinos zusammen mit den elektrisch geladenen Elektronen, Myonen und Tauonen drei Leptonenpaare (e, ν_e) , (μ, ν_μ) , (τ, ν_τ) jeweils eines Flavours (zuzüglich der jeweiligen Antiteilchen). Sie nehmen im Gegensatz zu den Quarks und den elektrisch geladenen Leptonen lediglich an der schwachen Wechselwirkung teil und können deshalb die Materie kompletter Planeten in den meisten Fällen ungehindert durchqueren. Deshalb gelingt ein Nachweis in Experimenten nur unter großem Aufwand und mit entsprechend starken Neutrinoquellen. Im SM werden die Neutrinos als masselos angenommen, was gleichermaßen die Grenzen dieses Modells aufzeigt, da Neutrinos massebehaftet sind.

1.2 Neutrinooszillation

Fusionsreaktionen in der Sonne führen zu einer großen Anzahl emittierter Elektron-Neutrinos, die man auf der Erde nachweisen kann. Das *Standardmodell der Sonne* liefert in diesem Zusammenhang einen Wert für die zu erwartende Anzahl an Neutrinos, welche allerdings nur zu etwa einem Drittel nachgewiesen werden konnte. Da die theoretische Berechnung des Neutrinoflusses anderweitig verifiziert werden konnte, führten die *fehlenden* Neutrinos zum sogenannten *solaren Neutrino*problem. Mit dem SNO-Experiment [10], welches sensitiv auf alle Flavoureigenzustände war, konnte der korrekt berechnete Gesamtfluss der solaren Neutrinos bestätigt werden.

Ein Lösungsvorschlag war der zunächst nur hypothetische Übergang der Elektron-Neutrinos in andere Flavoureigenzustände, sodass auf der Erde weniger Elektron-Neutrinos ankommen als erwartet. Diese Übergänge in andere Flavoureigenzustände werden als *Neutrinooszillation* bezeichnet. Gemäß dieser Theorie sind die Flavoureigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$ mit $\alpha = e, \mu, \tau$ nicht mehr identisch mit den Masseneigenzuständen $|\nu_i\rangle$ mit $i = 1, 2, 3$, sondern lediglich quantenmechanische Superpositionen derselben:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle . \quad (1.4)$$

Für die Masseneigenzustände gilt analog

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle . \quad (1.5)$$

Dabei ist U die unitäre Neutrino-Mischungsmatrix, auch als Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix (MNS) bekannt.

Wenn die Flavoureigenzustände verschiedene Superpositionen derselben Masseneigenzuständen sind, müssen zur Existenz unterschiedlicher Flavourzustände mindestens zwei Masseneigenzustände unterschiedlich sein. Werden nun die Massen vieler Neutrinos eines Flavours gemessen, so können damit nicht alle Messungen eine Masse von Null ergeben.

Die experimentelle Nachweis der Neutrinooszillation gelang erstmals am Super-Kamiokande-Experiment [3]. Weitere Experimente bestätigten diese Beobachtung. Es konnten lediglich die Quadrate von Differenzen der Neutrinomassen jeweils zweier Masseneigenzustände bestimmt werden, nicht jedoch die absoluten Werte für die Massen. Infolgedessen sind zwei Szenarien denkbar, wie in Abb. 1.1 zu sehen ist.

Der Nachweis der Neutrinooszillation ist das erste Beispiel für die Physik jenseits des SM und zeigt, dass es weiterer grundlegender theoretischer Modelle in der Teilchenphysik bedarf.

1.3 Bestimmung der Neutrinomasse

Nach mehrfacher Bestätigung der Existenz von Neutrinooszillationen wird in der Neutrinophysik die Bestimmung absoluter Massenwerte fokussiert.

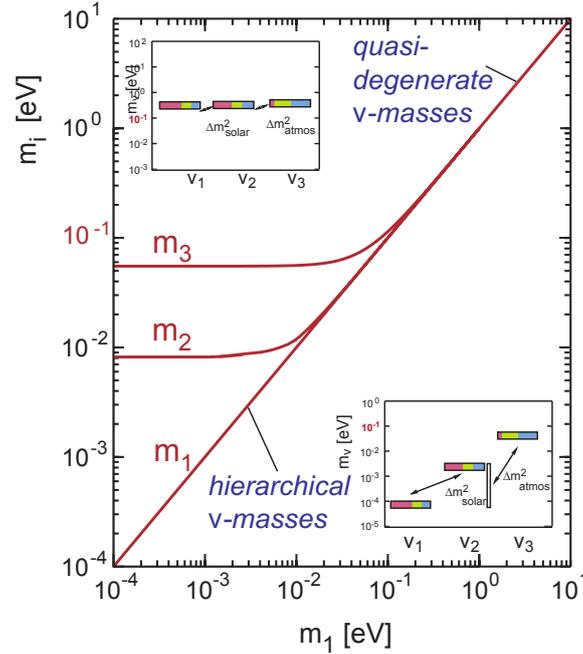


Abbildung 1.1: Massenskala der Neutrinos mit zwei unterschiedlichen Szenarien. Aus [5]. Dargestellt sind die Massen der drei Masseneigenzustände in Abhängigkeit der Masse des ersten Masseneigenzustands. Es gibt den *hierarchischen Fall* ($\Delta m^2 \approx m_i^2$) und den *quasi-degenerierten Fall* ($\Delta m^2 \ll m_i^2$). Beide Fälle sind nach den Ergebnissen aus den bisherigen Experimenten zur Neutrinooszillation denkbar.

Kosmologie

Die Kosmologie und Astrophysik liefern Möglichkeiten zur Bestimmung bzw. Einschränkung der Summe aller Masseneigenzustände. Eine Untersuchung des kosmischen Mikrowellenhintergrunds führt in Verbindung mit Annahmen über die Struktur des Universums zu modellabhängigen Obergrenzen für die Summe der Neutrinomassen. Der WMAP-Satellit lieferte Daten, mit denen die folgende Obergrenze angegeben werden kann [11]:

$$\sum_{\nu} m_{\nu} < 1,3 \text{ eV} \quad (95 \% \text{ C. L.})^2 \quad (1.6)$$

Betazerfall

Der β -Zerfall bietet eine modellunabhängige Methode zur Bestimmung der Neutrinomasse. Das energiedifferentielle β -Spektrum der Zerfallselektronen

$$\frac{dN}{dE} = C \cdot F(Z, E) \cdot p_e \cdot (E + m_e \cdot c^2) (E_{\text{EP}} - E) \sqrt{(E_{\text{EP}} - E)^2 - m_{\nu}^2 \cdot c^4} \Theta(E_{\text{EP}} - E - m_{\nu}^2 \cdot c^2) \quad (1.7)$$

²Es werden in der vorliegenden Arbeit natürliche Einheiten verwendet, sodass bei Massenangaben das Quadrat der Lichtgeschwindigkeitskonstante nicht auftaucht.

folgt aus den Energie- und Impulserhaltungen. Dabei bezeichnet

$$C = \frac{G_F^2 \cdot \cos^2 \Theta_C \cdot (g_V^2 + 3g_A^2)}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} \quad (1.8)$$

eine Konstante, welche die Fermikonstante G_F , den Cabibbo-Winkel Θ_C und die Kopplungskonstanten g_V^2 bzw. g_A^2 der schwachen Wechselwirkung beinhaltet. Das differentielle Spektrum ist abhängig vom Neutrinomassenquadrat und kann damit nach seiner Messung zur Bestimmung der Neutrinomasse

$$m_{\bar{\nu}_e}^2 = \sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2 \quad (1.9)$$

des Elektron-Antineutrinos genutzt werden. Bisherige Experimente aus Mainz und Troitsk konnten durch Messung des β -Spektrums aus dem Tritiumzerfall lediglich folgende Obergrenzen für die Neutrinomasse angeben:

$$\begin{aligned} \text{Mainz : } m_{\bar{\nu}_e} &< 2,3 \text{ eV} & (95 \% \text{ C. L.}) & [12] \\ \text{Troitsk : } m_{\bar{\nu}_e} &< 2,05 \text{ eV} & (95 \% \text{ C. L.}) & [4] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Doppelbetazerfall

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung bzw. Abschätzung der Neutrinomasse bietet der doppelte β -Zerfall. Bei diesem Zerfall werden simultan zwei Neutronen in Protonen umgewandelt. Es gibt zum einen den neutrinobehafteten und zum anderen den neutrinolosen doppelten β -Zerfall (vgl. Abb. 1.2). Letzterer kann zur Bestimmung der Neutrinomasse genutzt werden. Er ist jedoch im Vergleich zum neutrinobehafteten doppelten β -Zerfall extrem unterdrückt und nur möglich, wenn es sich bei dem nur virtuell auftretenden Neutrino um ein Majorana-Teilchen handelt. Dies bedeutet, dass Teilchen und Antiteilchen identisch sind. Zur Bestimmung der Neutrinomasse werden Halbwertszeiten der Übergänge gemessen, welche von der effektiven Majorana-Neutrinomasse

$$\langle m_\nu \rangle = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| \quad (1.11)$$

abhängen. Da bislang umstritten ist, ob beim Heidelberg-Moskau-Experiment [13] ein neutrinoloser doppelter β -Zerfall nachgewiesen wurde, werden dazu derzeit weitere Experimente durchgeführt bzw. befinden sich in ihrer Vorbereitungsphase.

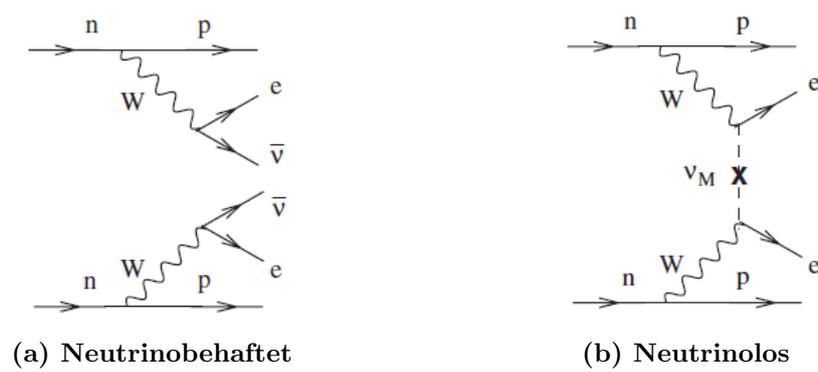


Abbildung 1.2: Doppelbetazerfall. Aus [14].

2. Das KATRIN Experiment

In diesem Kapitel wird das KATRIN-Experiment vorgestellt. Es hat eine Modell-unabhängige¹ Bestimmung der Neutrinomasse mit einer Sensitivität von $m_\nu \leq 200 \text{ meV}$ (90 % C. L.) zum Ziel.

In Abschnitt 2.1 wird zunächst das Messprinzip von KATRIN erläutert, welches auf einem sogenannten *MAC-E-Filter* beruht. Abschnitt 2.2 widmet sich daraufhin den wichtigsten Komponenten des Experiments und beschreibt zusammenfassend deren Funktionsweise.

2.1 Messprinzip

Zur Bestimmung der Neutrinomasse wird das **integrierte β -Spektrum** des KATRIN-Experiments gemessen. Die in der Zeit t_{qU} detektierte Anzahl $N(qU)$ an β -Elektronen aus dem Tritiumzerfall hängt neben der eingestellten *Retardierungsenergie* qU (siehe Definition (2.2)) auch von der Endpunktsenergie E_{EP} und dem Neutrinomassenquadrat m_ν^2 des differentiellen β -Spektrums aus Gl. (1.7) ab:

$$N(qU) \propto t_{qU} \int_{qU}^{E_{\text{EP}}} \frac{dN}{dE}(E_{\text{EP}}, m_\nu^2) \cdot R(E, qU) dE. \quad (2.1)$$

Elektronen aus dem β -Zerfall von molekularem Tritium werden mithilfe supraleitender Magnete von der Tritiumquelle durch eine Transportstrecke in Richtung eines Tandemspektrometers geleitet. Dabei werden sie durch eine angelegte Gegen- bzw. Retardierungsspannung U zwischen der Tritiumquelle und dem Spektrometer abgebremst, sodass Elektronen mit geringeren kinetischen Startenergien als der Retardierungsenergie

$$qU := q \cdot (U_A - U_0) \quad (2.2)$$

¹Die Neutrinomassenbestimmung mit dem KATRIN-Experiment basiert im Wesentlichen auf Energie- und Impulserhaltung.

nicht durch das Spektrometer gelangen können und stattdessen reflektiert werden. Dabei bezeichnen U_0 das elektrische Potential der Tritiumquelle, U_A das Potential des Spektrometers und q die negative Einheitsladung des Elektrons. Durch Variation der Gegenspannung wird das β -Spektrum vermessen. Dabei werden Elektronen mit kinetischen Energien $> qU$ detektiert, da nur diese die Potentialbarriere überwinden können. Das Spektrometer stellt somit ein integrierendes Hochpassfilter dar. Die um qU verminderte Startenergie $E_{\text{kin},0}$ wird als **Überschussenergie** ($E_{\text{kin},0} - qU$) der Elektronen bezeichnet.

Im Besonderen sind die Messergebnisse bei Überschussenergien knapp unterhalb der Endpunktenergie E_{EP} von Interesse, da hier das integrierte ebenso wie das differentielle β -Spektrum besonders sensitiv auf das Neutrinomassenquadrat m_ν^2 ist.

2.1.1 MAC-E-Filter

Bei der Analyse der β -Elektronen ist deren kinetische Startenergie von Interesse. Die Gegenspannung beeinflusst jedoch lediglich die longitudinale Komponente $E_{\text{kin}}^{\parallel}$ bezüglich der führenden Magnetfeldlinie und lässt die Komponente E_{kin}^{\perp} der transversalen Bewegung unberührt. Deshalb müssen die Elektronen adiabatisch kollimiert werden, sodass sie sich anschließend möglichst parallel zum elektrischen Feld bewegen und E_{kin}^{\perp} minimal wird. Diese Kollimation findet vor allem im Hauptspektrometer statt, welches einen *MAC-E-Filter*² darstellt. Das Funktionsprinzip ist in Abb. 2.1 veranschaulicht.

Die sogenannte **Analysierebene** bezeichnet die Fläche im Spektrometer, in der $E_{\text{kin}}^{\parallel}$ aller detektierten Elektronen minimal wird. In der Analysierebene entscheidet sich somit, ob ein Elektron transmittiert oder reflektiert wird.

Nach [16] ist das Produkt

$$\gamma \cdot \mu = \frac{E_{\text{kin}}^{\perp}}{B} \cdot \frac{(\gamma + 1)}{2} \quad (2.3)$$

aus magnetischem Moment μ und Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} + 1 \quad (2.4)$$

für kleine Magnetfeldgradienten eine adiabatische Konstante. Deshalb gilt für Elektronen, die in der Quelle bei einer magnetischen Feldstärke B_0 mit der Transversalenergie $E_{\text{kin},0}^{\perp}$ gestartet sind und sich nun an einer beliebigen Position \mathbf{r} des Experiments befinden, folgende Relation:

$$\frac{E_{\text{kin},0}^{\perp}(\gamma_0 + 1)}{B_0} = \frac{E_{\text{kin},\mathbf{r}}^{\perp}(\gamma_{\mathbf{r}} + 1)}{B_{\mathbf{r}}} \quad (2.5)$$

²*Magnetic Adiabatic Collimation with an Electrostatic Filter.*

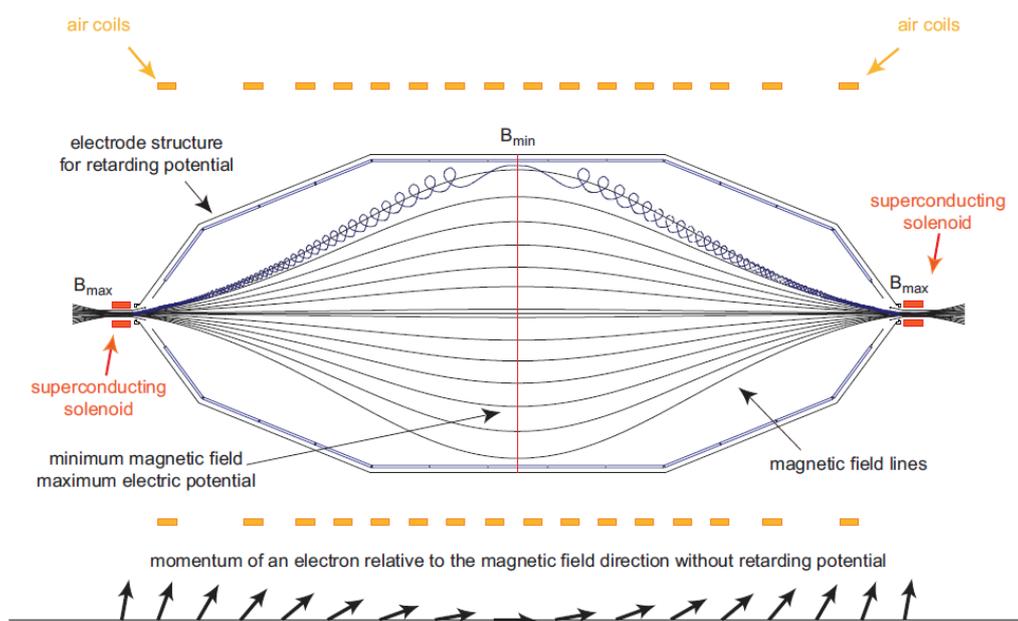


Abbildung 2.1: Funktionsprinzip eines MAC-E-Filters. Aus [15]. Die isotrop emittierten β -Elektronen der Tritiumquelle führen Zyklotronbewegungen entlang der Magnetfeldlinien aus. Ein Magnetfeldgradient innerhalb des Spektrometers erhält in adiabatischer Näherung das Produkt aus dem Lorentzfaktor γ und dem magnetischen Moment μ . Durch eine Verringerung der magnetischen Feldstärke erhöht sich die Longitudinalenergie $E_{\text{kin}}^{\parallel}$ bei simultaner Abnahme der Transversalenergie E_{kin}^{\perp} . Ein elektrisches Feld, welches gleichgerichtet ist wie das Magnetfeld, beeinflusst lediglich die Vorwärtsenergie, welche nach Kollimation der Elektronen näherungsweise der gesamten kinetischen Startenergie $E_{\text{kin}}^{\perp} + E_{\text{kin}}^{\parallel}$ entspricht. Die Analysierebene befindet sich ungefähr in der Mitte des Spektrometers bei minimaler Magnetfeldstärke.

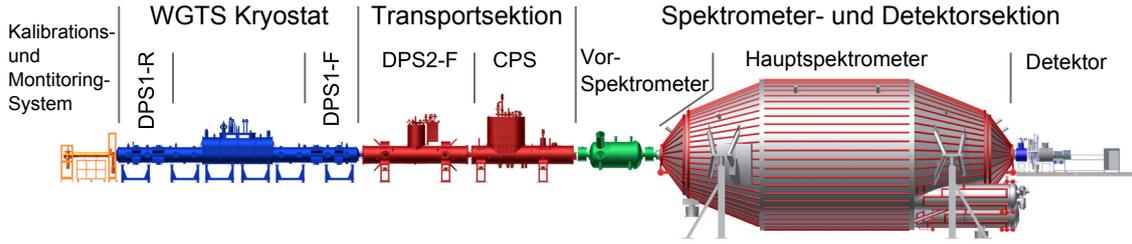


Abbildung 2.2: Ein Überblick des Aufbaus für das KATRIN-Experiment. Aus [17], modifiziert. Die gezeigte Anordnung besitzt eine Gesamtlänge von knapp 70 m. Anmerkung: Die hier gezeigte Darstellung der Transportsektion ist nicht mehr aktuell. Siehe dazu Abb. 2.4.

Findet bei konstantem elektrischen Potential beispielsweise eine Verdopplung der Magnetfeldstärke B_r statt, dann verdoppelt sich die Transversalenergie der Elektronen auf Kosten ihrer Longitudinalenergie. Wurde bereits die gesamte Longitudinalenergie eines Elektrons in Transversalenergie umgewandelt, dann wird es bei weiterer Erhöhung von B_r reflektiert. Die maximale Magnetfeldstärke B_P besitzt der Pinchmagnet am Ende des Hauptspektrometers. Somit definiert er den maximalen Öffnungswinkel

$$\Theta_0^{\max} = \arcsin \sqrt{\frac{B_0}{B_P}} \approx 51^\circ, \quad (2.6)$$

weshalb alle Elektronen mit größerem Startwinkel als Θ_0^{\max} reflektiert werden. Dadurch wird eine Energieauflösung des Spektrometers von

$$\Delta E = \frac{B_A}{B_P} \cdot \frac{(\gamma_A + 1)}{(\gamma_P + 1)} \cdot E_{\text{kin,EP}} \approx 0,95 \text{ eV} \quad (2.7)$$

gewährleistet. Elektronen, welche unter maximalem Öffnungswinkel Θ_0^{\max} starten und die erforderliche Vorwärtsenergie zum Überwinden der Potentialbarriere besitzen, behalten in der Analysierebene die restliche kinetische Energie ΔE in Form von Transversalenergie bei.

2.2 Experimenteller Aufbau

Der gesamte Aufbau von KATRIN ist schematisch in Abb. 2.2 zu sehen. Er wird im Folgenden anhand von vier Komponenten erläutert, die zum Verständnis der Funktionsweise essentiell sind. Abb. 2.3 gibt zudem einen Überblick des globalen elektromagnetischen Designs.

2.2.1 Tritiumquelle

Die fensterlose und gasförmige Tritiumquelle (**WGTS** - *Windowless Gaseous Tritium Source*) besteht aus einem 10 m langen Strahlrohr mit einem Durchmesser

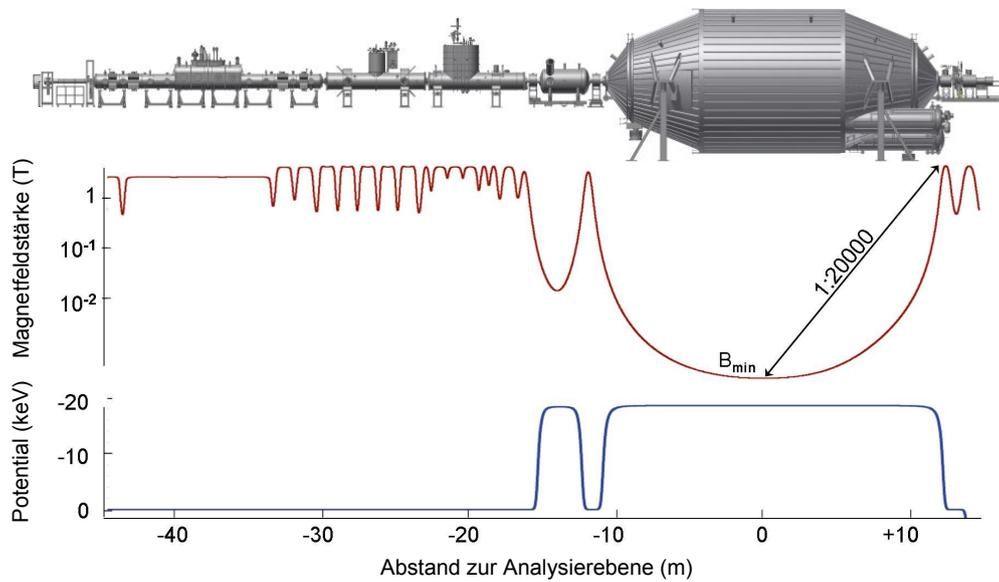


Abbildung 2.3: Der longitudinale Verlauf des elektrischen Potentials und der Magnetfeldstärke beim KATRIN-Experiment. Aus [18], modifiziert. Die magnetische Feldstärke besitzt in der WGTS einen Wert von bis zu 3,6 T und steigt in der Transportsektion stellenweise auf 5,6 T an, gefolgt von einem ersten Abfall im Vorspektrometer und einem zweiten Abfall im Hauptspektrometer auf das globale Minimum von $3 \cdot 10^{-4}$ T. Der Betrag des elektrischen Potentials nimmt innerhalb der beiden Spektrometer auf über 18 kV zu und verringert dadurch die Vorwärtsenergie der Elektronen so lange, bis diese die Potentialbarriere überwinden.

von 90 mm, in das durch feine Kapillare gasförmiges Tritium mit konstanter Rate eingelassen wird. Das Strahlrohr ist zu beiden Seiten hin offen, sodass die β -Zerfallselektronen die Quelle mit nur sehr geringen Energieverlusten verlassen können. Die Energieverluste erfolgen durch die Streuung der Elektronen an den Gasmolekülen. Diese werden nahezu vollständig durch insgesamt zwölf Turbomolekularpumpen der ersten *Differentiellen Pump-Sektion* (DPS1-R und DPS1-F) abgepumpt. Anschließend wird das abgepumpte Tritiumgas innerhalb eines geschlossenen Kreislaufs gereinigt und zurück in die WGTS geführt. Hierdurch kann eine Tritiumreinheit von über 95 % erreicht werden.

Ein sehr wichtiger Parameter des Experiments ist die **Säulendichte** der Tritiumquelle. Bei longitudinaler Projektion des Strahlrohrs gibt sie Auskunft über die Anzahl der Teilchen pro Fläche. Für die Langzeitmessungen ist eine Säulendichte von $5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ vorgesehen, die während der Datennahme im Promillebereich stabilisiert wird [17]. Zur Aufrechterhaltung einer stabilen Säulendichte sind ein konstanter Einlassdruck sowie eine konstante Temperatur³ der Quelle unerlässlich.

Eine höhere Säulendichte hätte zwar eine entsprechend höhere Emissionsrate von Elektronen zur Folge, die es zu detektieren gilt, jedoch steigt damit auch die Wahrscheinlichkeit, dass Elektronen durch Stöße mit Tritiummolekülen einen Energieverlust erfahren. Dies beeinflusst das integrierte β -Spektrum und muss bei den Analysen berücksichtigt werden (siehe dazu Kap. 3).

Die zu detektierenden β -Elektronen werden mit supraleitenden Magneten aus der Quelle adiabatisch herausgeführt. Das Magnetfeld der WGTS hat im Strahlrohr eine Stärke von etwa $B_0 = 3,6 \text{ T}$.

2.2.2 Transportsektion

Da das Strahlrohr an seinen Enden offen ist, können trotz der DPS1-F neben Elektronen auch neutrale Tritiummoleküle sowie Tritiumionen aus der WGTS in die Transportsektion gelangen. Diese dient einerseits zur Weiterleitung der Elektronen zu den Spektrometern und andererseits zur Minimierung des Tritiumflusses. Tritiumzerfälle außerhalb der WGTS führen zu einer kritischen Erhöhung des Untergrunds und beeinflussen negativ die Sensitivität des KATRIN-Experiments. Aus diesem Grund ist es notwendig, alle Ionen und neutrale Moleküle aus der Transportstrecke zu entfernen und sie somit am Eindringen in die Spektrometer zu hindern. Während der Einlassdruck des Tritiumgases etwa 10^{-3} mbar beträgt, herrscht nach der Transportsektion bereits ein Ultrahochvakuum mit einem Druck $< 10^{-11} \text{ mbar}$.

Die Transportsektion besteht aus den zwei folgenden, jeweils etwa 7 m langen Komponenten::

- Die *Differentielle PumpStrecke* (DPS) beinhaltet vier Turbomolekularpumpen. Zusammen mit den Turbomolekularpumpen der DPS1-F wird damit der Gasdruck um mehrere Größenordnungen reduziert.

³Die WGTS wird bei einer inneren Temperatur von etwa 30 K betrieben.

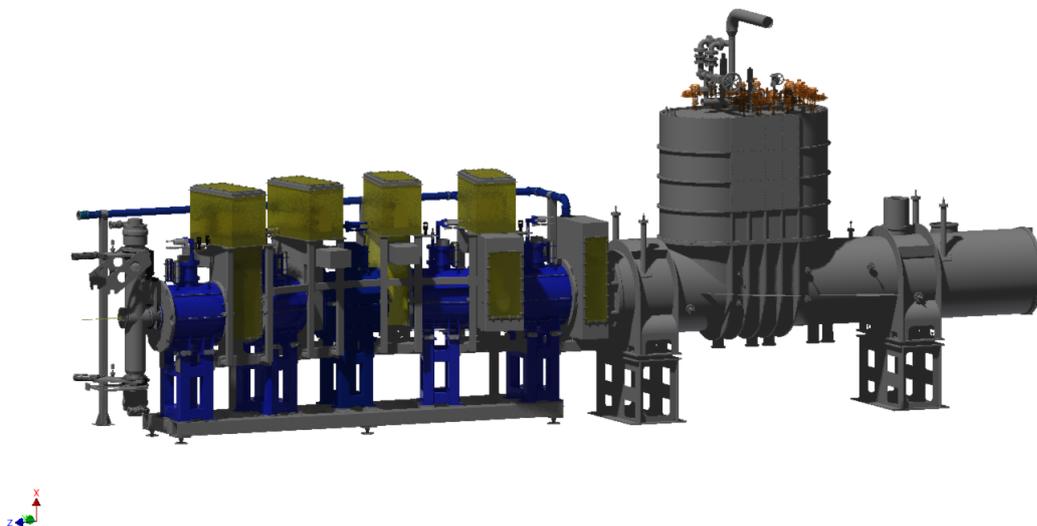


Abbildung 2.4: Die Transportsektion. Aktuelles CAD-Bild aus [19]. In der linken Bildhälfte ist die DPS zu erkennen, welche vier Turbomolekularpumpen umfasst. Rechts im Bild befindet sich die CPS, welche als passive Pumpe fungiert. Durch Biegungen des Strahlrohrs können die meisten unerwünschten Teilchen abgefangen werden.

- Die Kryopumpstrecke (CPS - *Cryogenic Pumping Section*) ist eine passive Kryopumpe und ermöglicht durch eine Adsorption fast aller verbliebenen Moleküle an ihrer 3 bis 5 K kalten Innenwand eine Reduzierung des Gasdrucks um weitere sieben Größenordnungen. Die Oberfläche der Innenwand ist dazu mit kondensiertem Argon (*argon frost*) bedeckt.

Sowohl in der DPS als auch in der CPS verläuft das Strahlrohr nicht linear, wodurch ein direktes Durchqueren der Transportsektion für das Restgas unetribunden wird.

Die Elektronen werden mit Hilfe des 5,6 T starken Magnetfelds adiabatisch durch die Transportsektion zu den Spektrometern geführt.

2.2.3 Spektrometer

Als Spektrometer wird ein Tandemspektrometer, bestehend aus einem Haupt- und einem Vorspektrometer, verwendet. Das Vorspektrometer dient der groben Selektion der Elektronen und beruht ebenfalls auf dem Prinzip eines MAC-E-Filters, welches in Abschnitt 2.1.1 beschrieben wird. In der $63,6 \text{ m}^2$ großen Analysierebene des Hauptspektrometers erfolgt anschließend die präzisere Selektion.

Vorspektrometer

Da Elektronen mit kinetischen Energien weit unterhalb der Endpunktsenergie E_{EP} nicht zum untersuchten Teil des integrierten β -Spektrums beitragen, sollen diese vor

dem Eintreten in das Hauptspektrometer reflektiert werden. Andernfalls wäre mit einer Elektronenrate $> 10^{10} \text{ s}^{-1}$ im Hauptspektrometer zu rechnen, was eine starke Erhöhung des Untergrunds durch Restgasionisationen zur Folge hätte.

An dem, mit einer Länge von 3,4 m und einem Durchmesser von 1,7 m, vergleichsweise kleinen Vorspektrometer liegt zur Reflexion niederenergetischer Elektronen eine feste Spannung von 18,3 kV zur WGTS an. Infolgedessen gelangen nur noch etwa 10^3 Elektronen pro Sekunde mit Energien nahe des Endpunkts in das Hauptspektrometer.

Hauptspektrometer

Der Tank des Hauptspektrometers weist eine Länge von 23,3 m und einen inneren Durchmesser von 9,8 m auf. Mit diesen Abmessungen kann in Kombination mit dem magnetischen Design die Energieauflösung $\Delta E \approx 0,95 \text{ eV}$ und eine ausreichend große Zählrate erreicht werden. Für die Zählrate ist insbesondere der Durchmesser des Spektrometers entscheidend. Er legt fest, wie groß der zur Messung beitragende Querschnitt der Tritiumquelle ist (vgl. Abb. 4.7). Der magnetische Flussschlauch von $\Phi = 191 \text{ T cm}^2$ weitet sich von 90 mm in der Quelle auf 9 m in der Mitte des Hauptspektrometers auf. Die Länge des Spektrometers gewährleistet einen ausreichend kleinen Gradienten des Magnetfelds, sodass eine in guter Näherung adiabatische Bewegung der Elektronen ermöglicht wird.

Neben Ionen führen auch Wechselwirkungen der kosmischen Strahlung mit der Tankwand zu Untergrundereignissen. Zur Reduktion von solchen unerwünschten Sekundärelektronen befindet sich im Inneren des Hauptspektrometertanks ein zweilagiges Drahtelektrodensystem in der Nähe der Tankwand. Diese Elektroden liegen auf niedrigerem Potential als der Tank selbst und erzeugen dadurch ein abschirmendes elektrisches Feld. Zusätzlich kann mit den Elektroden eine Feinjustierung des Potentials in der Analysierebene vorgenommen werden.

2.2.4 Detektor

Elektronen mit ausreichender kinetischer Energie und kleinerem Startwinkel als Θ_0^{\max} aus Gl. (2.6) können durch den Pixeldetektor (**FPD** - *Fokal Plane Detektor*) nachgewiesen werden. Es handelt sich dabei um eine segmentierte PIN-Diode aus Silizium mit einem Durchmesser von 90 mm (siehe Abb. 2.5). Alle Segmente bzw. Pixel des Detektors sind flächengleich⁴ und können separat ausgelesen werden. Damit lassen sich radiale und azimutale Inhomogenitäten der Tritiumdichte innerhalb der Quelle auflösen.

Jeder der 148 Pixel kann Elektronenraten bis etwa 60 kHz bewältigen [20]. Eine Energieauflösung des Detektors von 1 keV garantiert eine Unterscheidung zwischen den β -Elektronen und dem Großteil der Elektronen aus Untergrundereignissen.

⁴Die Pixel sind zwar flächengleich, jedoch nicht deckungsgleich.

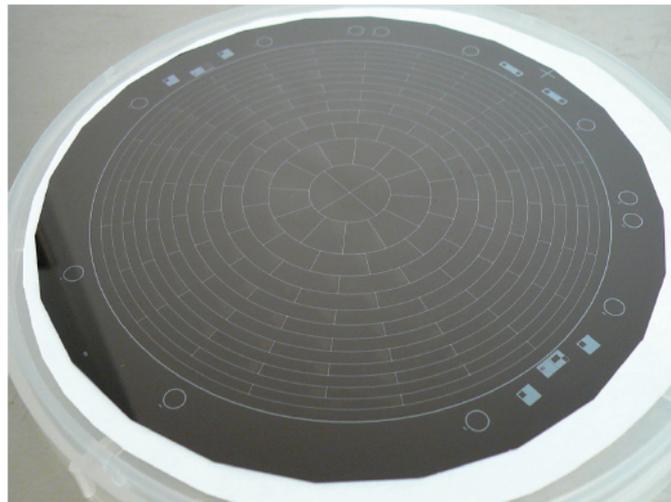


Abbildung 2.5: Der Pixeldetektor (FPD). Aus [21]. Der Detektor umfasst 148 Pixel mit jeweils gleicher Fläche. Im Zentrum befinden sich vier Pixel, gefolgt von zwölf Ringen mit jeweils zwölf weiteren Pixeln.

3. Beschreibung der Simulationsmethoden

Dieses Kapitel beschreibt die Simulationsmethoden, welche in den nachfolgenden Kapiteln dieser Arbeit zum Einsatz kommen. Da der Bestimmung der Energieverlustfunktion in dieser Arbeit eine herausragende Bedeutung zukommt, folgt mit Abschnitt 3.1 zunächst eine kurze Einführung der Streuprozesse zwischen Elektronen und molekularem Tritium in der WGTS. Die damit einhergehenden Energieverluste der Elektronen werden für numerische Berechnungen durch die *Energieverlustfunktion* beschrieben. Auf solchen numerischen Berechnungen basiert das Programmpaket *Source Spectrum Calculations (SSC)*, welches in Abschnitt 3.2 vorgestellt wird und zur Simulation der Tritiumquelle sowie zur Berechnung des integrierten β -Spektrums genutzt werden kann. Eine andere Herangehensweise zur Beschreibung des KATRIN-Experiments bietet das Programmpaket **KASSIOPEIA** in Abschnitt 3.3, das für Monte-Carlo-Methoden verwendet werden kann und in Kap. 5 zum Einsatz kommt. Die Analyse von simulierten KATRIN-Spektren erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit dem Analysepaket **KaFit** und wird im letzten Abschnitt des vorliegenden Kapitels beschrieben.

3.1 Streuprozesse und Energieverlustfunktion

Es folgt eine Zusammenfassung der unterschiedlichen Streuprozesse von Elektronen an molekularem Tritium. Für eine detaillierte theoretische Beschreibung sowie zum Studium experimenteller Resultate sei auf [22–30] verwiesen¹.

Inelastische Streuung

Tritiummoleküle stellen einen gebundenen Zustand aus zwei Tritiumatomen dar, dessen Bindungsenergie, je nach quantenmechanischem Zustand, variiert. Es existieren neben **elektronischen Anregungszuständen** auch gemeinsame **Vibrations-**

¹Die angegebene Literatur beschreibt vorwiegend die Streuung geladener Teilchen an molekularem Wasserstoff, was eine gute Näherung für molekulares Tritium darstellt.

und Rotationszustände der beiden Atomkerne. Daher gibt es deutlich mehr Anregungszustände als bei atomarem Tritium. Weiterhin sind **dissoziative Anregungen** möglich, also Aufspaltungen der Molekülverbindung mit wiederum mehreren möglichen Anregungszuständen der resultierenden Atome bzw. Ionen. Alle genannten Anregungen können durch Stöße mit Elektronen ausreichender kinetischer Energien erfolgen. Dies bringt einen quantisierten Energieverlust der gestreuten Elektronen mit sich, welcher im Fall elektronischer Anregungen für molekularen Wasserstoff mindestens 11,18 eV beträgt [26]. Molekularer Wasserstoff ist diesbezüglich repräsentativ für molekulares Tritium, da elektronische Anregungen ebenso wie **Ionisationsprozesse** Isotop-unabhängig sind, während jedoch die Anregungszustände der Tritiumkerne von denen des Wasserstoffs differieren. Sämtliche Anregungen und die bei etwa 15,4 eV Energieverlust beginnenden Ionisationen sind gleichermaßen Folge inelastischer Streuprozesse. Für eine kinetische Energie der Elektronen um 18,6 keV ist dabei die Anregung von Vibrationszuständen aufgrund ihres unwahrscheinlichen Eintretens vernachlässigbar.

Elastische Streuung

Neben den genannten inelastischen Streuprozessen kann es aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung zwischen Elektronen und Tritiumkernen zu elastischen Streuungen kommen. Der durchschnittliche Energieverlust durch elastische Streuungen ist mit etwa 16 meV [31] sehr viel kleiner als die Energieverluste durch die schwächsten elektronischen Anregungen. Rotationseffekte infolge von Stößen können aus praktischen Gründen als *quasielastische Streuung* ebenfalls den elastischen Streuprozessen zugeordnet werden, da sie Energieverluste $\lesssim 2$ eV zur Folge haben.

Winkeländerungen

Bei Betrachtung differentieller Wirkungsquerschnitte $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ wird zwischen verschiedenen Raumwinkeln Ω unterschieden, in welche die Elektronen gestreut werden. Unter Winkeländerungen $\Delta\Theta$ ist im Folgenden die Änderung des Polarwinkels Θ zu verstehen, welcher durch den Impulsvektor des Elektrons vor dem Stoß mit jenem nach dem Stoß eingeschlossen wird. Nach Experimenten von Ulsh et al. mit 25 keV-Elektronen an molekularem Wasserstoff nehmen die differentiellen Wirkungsquerschnitte mit größeren Winkeländerungen ab [30]. Bei inelastischer Streuung gehen große Winkeländerungen mit größeren Energieverlusten ΔE einher und sind daher insbesondere auf Ionisationen zurückzuführen. Für Energieverluste < 40 eV beträgt die durchschnittliche Winkeländerung durch inelastische Streuprozesse etwa $0,5^\circ$. Die durchschnittlichen Winkeländerungen durch elastische Streuprozesse sind mit etwa 3° deutlich größer.

Größe der Wirkungsquerschnitte

Unter Wirkungsquerschnitten seien in der restlichen Arbeit stets die über alle Raumwinkel integrierten **totalen Wirkungsquerschnitte** zu verstehen. Mit **komplettem Wirkungsquerschnitt** σ ist die Summe des elastischen und inelastischen totalen Wirkungsquerschnitts gemeint. Für kinetische Energien der Elektronen um 18,6 keV gilt $\sigma \approx 3,7 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$, wobei die inelastischen Streuprozesse mit $\sigma_{\text{inel}} \approx 3,4 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ den stark dominanten Effekt darstellen.

Energieverlustfunktion

Die Energieverlustfunktion $f(\epsilon)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, welche jedem Energieverlust ϵ im Hinblick auf sein mögliches Eintreten eine Wahrscheinlichkeitsdichte zuordnet. Dabei setzt die Energieverlustfunktion das Eintreten genau einer Streuung voraus. Winkeländerungen bleiben durch die Energieverlustfunktion unberücksichtigt. Mathematisch wird $f(\epsilon)$ durch den normierten energiedifferentiellen Wirkungsquerschnitt beschrieben:

$$f(\epsilon) := \frac{1}{\sigma} \cdot \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon'} \right|_{\epsilon} . \quad (3.1)$$

Aus dieser Definition folgt die Normierung

$$\int_{\epsilon=0}^{+\infty} f(\epsilon') d\epsilon' = 1 , \quad (3.2)$$

welche konsistent mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation ist, wonach sich durch eine beliebige Streuung zu 100 % irgendein positiver Energieverlust ergibt. In Abb. 3.1 ist die Energieverlustfunktion für Elektronen mit einer kinetischen Energie von 18575 eV bis zu Energieverlusten $\epsilon = 50$ eV dargestellt. Bestimmt wurde diese Energieverlustfunktion aus einem Programmcode² [32] von Dr. F. Glück. Sie kann für numerische Berechnungen der *Antwortfunktion* verwendet werden. Siehe dazu Abschnitt 4.2.

3.2 Simulation der Tritiumquelle und des integrierten Spektrums

Zum Erreichen der hohen Sensitivität des KATRIN-Experiments sind detaillierte Kenntnisse der Tritiumquelle sowie die Auswirkung verschiedener Quellparameter auf das integrierte β -Spektrum vonnöten. Das Programmpaket SSC [33–35] ermöglicht einerseits die Simulation der Tritiumquelle mit allen wesentlichen Quellparametern und andererseits eine darauf aufbauende numerische Berechnung des Spektrums.

Simulation der Tritiumquelle

Ein wichtiger Simulationsparameter zur Beschreibung der WGTS ist die Stärke und der Verlauf des **Magnetfelds**. Dieses Magnetfeld ist zur Führung der emittierten β -Elektronen auf Zyklotronbahnen in Richtung Hauptspektrometer erforderlich. Weiterhin definiert die Magnetfeldstärke des Emissionsortes den maximalen Öffnungswinkel aus Gl. (2.6). Zum eindimensionalen Verlauf der Magnetfeldstärke innerhalb der WGTS siehe Abb. 4.6.

²Dieser Programmcode zur Beschreibung der Streuprozesse basiert vorwiegend auf theoretischen Berechnungen zu molekularem und atomarem Wasserstoff.

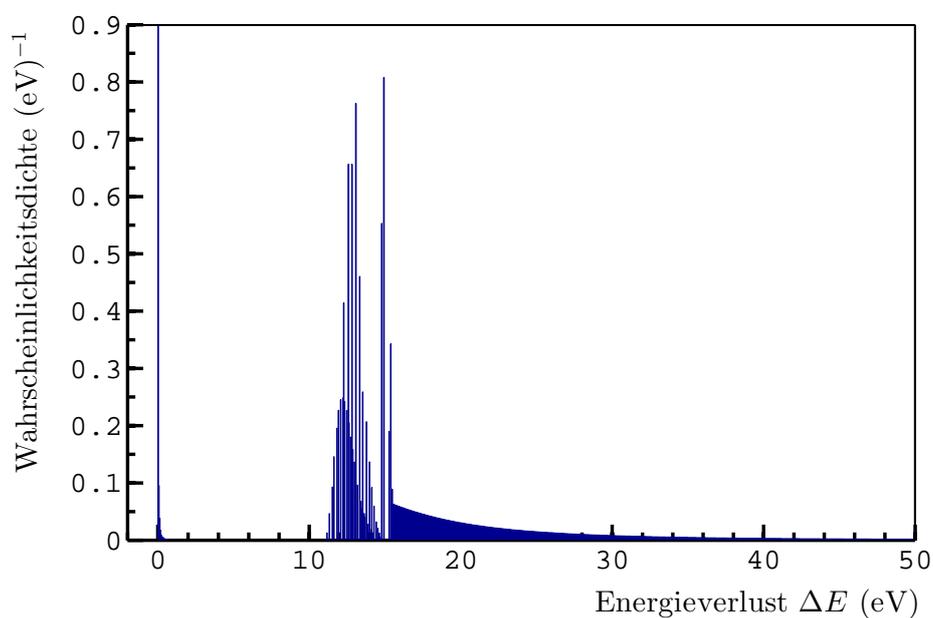


Abbildung 3.1: Simulationsmodell der Energieverlustfunktion für Energieverluste durch elastische und inelastische Streuprozesse bis 50 eV. Die Beiträge elastischer Streuung sind in Form von Energieverlusten $\lesssim 1$ eV zu erkennen. Elektronische Anregungen in Kombination mit angeregten Vibrationszuständen haben Energieverluste im Bereich 11-15 eV zur Folge, während um 15 eV die Energieverluste durch dissoziative Anregungen zu sehen sind. Ab etwa 15,4 eV beginnt das Kontinuum der Ionisationsprozesse.

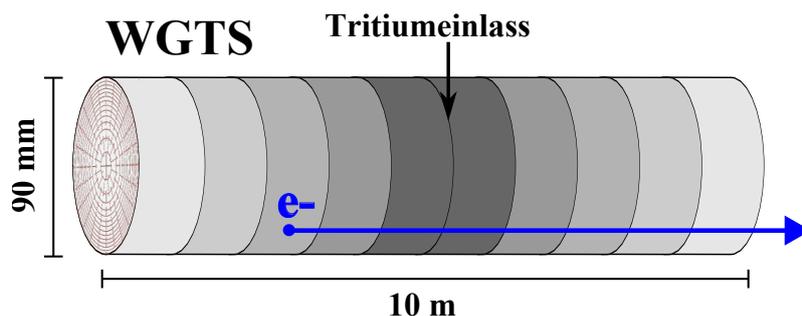


Abbildung 3.2: Longitudinale Unterteilung der WGTS in Slices. Schema aus [34], modifiziert. Durch Verwendung vieler Slices kann beispielsweise das in z -Richtung inhomogene Dichteprofil präzise aufgelöst werden. Weitere Unterteilungen können radial und azimuthal vorgenommen werden.

Das **Dichteprofil** des Tritiumgases im Strahlrohr ist ein weiterer wichtiger Simulationsparameter. In Regionen hoher Gasdichte, nahe des Tritiumeinlasses, werden beispielsweise im zeitlichen Mittel mehr Elektronen emittiert als an den Enden des Rohrs. Die Berechnung des Dichteprofiles beruht auf eigens dafür entwickelten und durchgeführten Gasdynamiksimulationen der Forschungsgruppe von Prof. Sharipov³ [36–39]. Das **Temperaturprofil** des Tritiumgases beeinflusst ebenfalls sein Dichteprofil und ist daher ebenso ein Simulationsparameter.

Zum Umgang mit ortsabhängigen Simulationsparametern findet eine manipulierbare **Segmentierung der WGTS** statt. Longitudinale Inhomogenitäten werden durch Unterteilung der WGTS in sogenannte *Slices* berücksichtigt (vgl. Abb. 3.2). Diese Slices können radial und azimuthal weiter in kleinere Segmente unterteilt werden. Näheres zu dieser Vorgehensweise ist in Abschnitt 4.1.4 zu finden.

Berechnung des integrierten β -Spektrums

Durch ein präzises Modell der WGTS und durch Berücksichtigung der wichtigsten Parameter des restlichen KATRIN-Experiments kann mit numerischen Methoden eine Antwortfunktion⁴ berechnet werden, welche zusammen mit dem ebenfalls berechneten differentiellen β -Spektrum integriert wird. Daraus resultiert ein berechnetes integriertes β -Spektrum. Die Energieverlustfunktion des vorherigen Abschnitts kann in SSC eingelesen und zur Berechnung der Antwortfunktion verwendet werden.

Wahl der Schrittweite eingestellter Gegenspannungen

Durch Variation der Retardierungsenergie qU kann das integrierte β -Spektrum bei einer künftigen Messung wie auch in den Simulationen abgerastert werden. Für sämtliche Simulationen dieser Arbeit wird qU in äquidistanten Schritten um jeweils 50 meV variiert. Das Hochspannungsnetzgerät [40] zur Einstellung der Retardierungsspannung liefert eine maximale Spannung von 35 kV und verfügt über eine Auflösung von 22 Bit, sodass Schrittweiten von 50 meV unproblematisch sein sollten. Die Energieverlustfunktion der Simulationen liegt dazu ebenfalls diskret als n -Tupel von Wahrscheinlichkeitswerten für 50 meV breite Energieverlustintervalle vor.

³Universidade Federal do Paraná, Brasilien.

⁴Die Transmissions- und Antwortfunktion für das KATRIN-Experiment werden in Kap. 4.2 eingeführt.

Tabelle 3.1: KATRIN-Standardparameter. Auswahl aus [5].

Parameter	Wert
Säulendichte	$\rho d = 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$
Magnetfeldstärke in der WGTS	$B_0 \approx 3,6 \text{ T}$ (vgl. Abb. 4.6)
Magnetfeldstärke in der Analysierebene	$B_A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$
Magnetfeldstärke des Pinchmagneten	$B_P = 6 \text{ T}$
Endpunktenergie des Tritiumspektrums	$E_{EP} = 18575 \text{ eV}$

KATRIN-Standardparameter

Wenn in den folgenden Kapiteln die Verwendung von *KATRIN-Standardparametern* erwähnt wird, sind darunter bestimmte Orientierungswerte für die KATRIN-Parameter bei den Hauptmessungen zu verstehen, welche grundlegende Berechnungen und Simulationen ermöglichen bzw. vergleichbar machen. Siehe dazu Tab. 3.1.

3.3 Teilchentracking in der Tritiumquelle

Um weitere Effekte und Prozesse höherer Ordnungen berücksichtigen zu können, die sich auf die Trajektorien und die kinetischen Energien der Elektronen auswirken, wurde das Programmpaket KASSIOPEIA [41] konzipiert und stetig weiterentwickelt. Für diese Arbeit wird lediglich ein sogenanntes *Teilchentracking* innerhalb der Tritiumquelle durchgeführt, auch wenn ein globales Tracking für das Gesamtexperiment möglich wäre. Für das Erreichen einer Statistik von $\sim 10^8$ Elektronen (vgl. Abschnitt 5.2) wären globale Simulationen mit KASSIOPEIA angesichts gegebener Hardwareressourcen jedoch sehr zeitintensiv, sodass präzise Trackingmethoden für das Verhalten der Elektronen in der Quelle mit analytischen Berechnungen für das grundlegende Verhalten außerhalb der Quelle kombiniert werden.

Zur Berücksichtigung des Magnetfelds und des Tritiumdichteprofiles greift KASSIOPEIA auf das oben beschriebene Programmpaket SSC zurück. Gegenüber den analytischen und numerischen Methoden können beim Teilchentracking in der WGTS beispielsweise die Winkeländerungen durch Streuprozesse sowie deren Auswirkung auf das weitere Streuverhalten untersucht werden. Die Energieabhängigkeit der einzelnen Wirkungsquerschnitte wird dabei ebenfalls berücksichtigt.

3.4 Analyse des Spektrums

Das integrierte β -Spektrum, welches beim KATRIN-Experiment gemessen wird, muss sehr genau untersucht werden, um die Neutrinomasse mit einer bisher unerreichten Präzision zu bestimmen. Mit einem Funktionsfit des aus der Theorie und den angenommenen Parametern berechneten Spektrums an das gemessene Spektrum kann der freie Fitparameter m_ν^2 bestimmt werden.

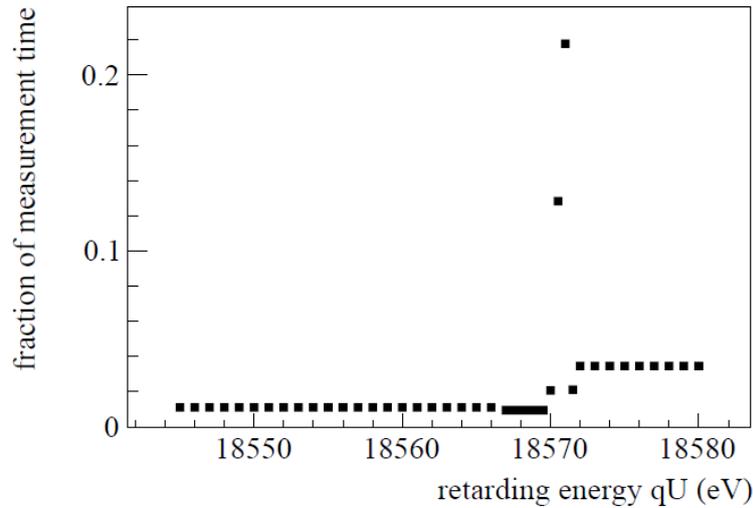


Abbildung 3.3: Geplante Messzeitverteilung auf unterschiedliche Retardierungsspannungen bei den KATRIN-Hauptmessungen. Aus [35]. Knapp unterhalb des Endpunkts E_{EP} ist der Verlauf des Spektrums besonders stark mit m_ν^2 korreliert, sodass hier verhältnismäßig lang gemessen wird.

3.4.1 Untersuchung des simulierten Spektrums mit KaFit

Im Rahmen der KATRIN-Hauptmessungen muss nach [5, 35] das integrierte β -Spektrum lediglich für einzelne Werte der Retardierungsenergie bestimmt werden. Die Messzeitverteilung aus Abb. 3.3 ist für ein 30 eV-Analyseintervall konzipiert und derart für eine Untergrundrate von 10^{-2} cps optimiert, dass Analysen des Spektrums möglichst sensitiv auf m_ν^2 sind [5]. Für weitere Analyseintervalle gibt es entsprechend andere optimierte Messzeitverteilungen.

Bei Untersuchungen verschiedener Effekte im Hinblick auf die Neutrinomassenbestimmung wird in dieser Arbeit mit dem Analysepaket KaFit [42] zunächst ein integriertes β -Spektrum für die qU -Werte der Messzeitverteilung simuliert. Dabei greift KaFit auf SSC zurück. Es können ein oder mehrere Parameter des integrierten β -Spektrums, im Folgenden ist es exemplarisch die Säulendichte, zur näheren Untersuchung verändert werden. Da die genaue Neutrinomasse unbekannt ist und bisher nach [4] lediglich eine Obergrenze von 2,05 eV (95 % C. L.) angegeben werden kann, wird m_ν^2 in der Simulation Null gesetzt. Anschließend werden die erhaltenen Erwartungswerte für die detektierten Elektronen auf künstlichem Wege statistischen Unsicherheiten unterzogen, sodass hierdurch eine realistische Gesamtmessung für drei Jahre KATRIN-Betrieb bei veränderter Säulendichte simuliert wird.

Zur Analyse dieses Spektrums wird in einem weiteren Schritt ein Spektrum mit Standard-Säulendichte und ohne statistische Fluktuationen simuliert. Bei einem abschließenden Funktionsfit werden vier freie Fitparameter dieses Analysespektrums so lange variiert, bis mit der sogenannten *Maximum-Likelihood-Methode* [43] ein Bestwert für die Fitparameter gefunden wird, sodass beide Spektren möglichst kleine Differenzen zueinander aufweisen. Dabei sind neben m_ν^2 die Endpunktsenergie E_{EP}

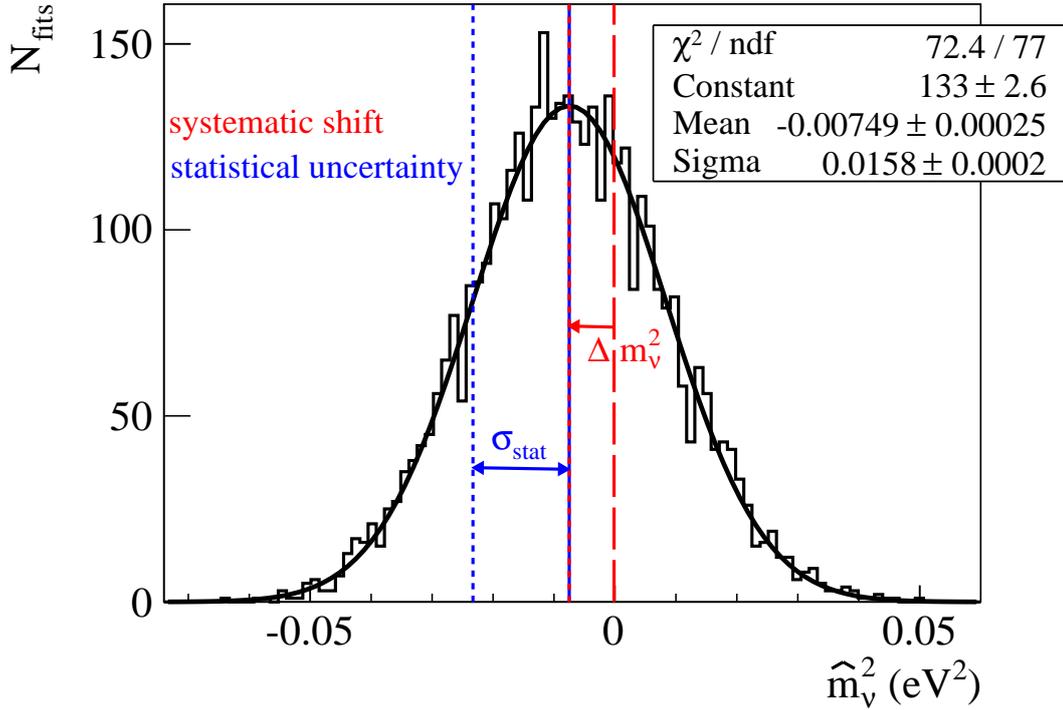


Abbildung 3.4: Exemplarische Auftragung von 4000 Bestwerten für das Neutrinomassenquadrat. Aus [35]. Die Werte für \hat{m}_ν^2 stammen aus Simulationen mit KaFit, wobei zur Erzeugung der analysierten Spektren stets $m_\nu^2 = 0$ gewählt wurde. Die systematische Unsicherheit Δm_ν^2 ist Folge einer veränderten Säulendichte beim analysierten Spektrum. Die Standardabweichung der Gaußkurve liefert einen Wert für die statistische Unsicherheit bei der Bestimmung des Neutrinomassenquadrats durch das KATRIN-Experiment.

des Spektrums, die Signalrate \dot{N}_S aus Gl. (2.1) und die Rate \dot{N}_U des Untergrunds die drei weiteren freien Parameter, da sie nicht genau bekannt sind.

Der für diese Arbeit gewählte *frequentistische Ansatz* sieht eine vielfache⁵ Wiederholung der oben beschriebenen Vorgehensweise vor, wobei die künstlichen statistischen Fluktuationen jedes Mal erneut per Zufallsgenerator erzeugt werden. Die bei jeder Spektrumsanalyse resultierenden Bestwerte \hat{m}_ν^2 für das Neutrinomassenquadrat werden gemäß Abb. 3.4 in einem Histogramm aufgetragen und beschreiben in guter Näherung eine Gaußverteilung. Durch den Fit einer Gaußkurve an die aufgetragenen Bestwerte, kann über den Schwerpunkt dieser Gaußkurve das finale Ergebnis für die ermittelte Neutrinomasse aus mindestens 1000 KATRIN-Messungen angegeben werden. In aller Regel ergibt sich ein Neutrinomassenquadrat, welches aufgrund der veränderten Säulendichte beim analysierten Spektrum nicht mit Null vereinbar ist. Auf diese Weise wird untersucht, welche Auswirkung die ungenaue Kenntnis einzelner Parameter, wie beispielsweise der Säulendichte, auf die Bestimmung der Neutrinomasse hat.

⁵Bei KaFit-Simulationen dieser Arbeit werden jeweils mindestens 1000 Spektren simuliert und analysiert.

Neben einer solchen frequentistischen Herangehensweise sind *bayessche* Analysemethoden zur späteren Auswertung des gemessenen Spektrums beim KATRIN-Experiment in Entwicklung [44].

3.4.2 Statistische und systematische Unsicherheiten

Auch wenn die oben beschriebene frequentistische Untersuchung des Spektrums ohne eine vorherige Parametermanipulation bei den analysierten Spektren erfolgt, so ergeben sich dennoch näherungsweise normalverteilte Bestwerte \hat{m}_ν^2 wie in Abb. 3.4. Dies ist auf die künstliche Erzeugung statistischer Fluktuationen zurückzuführen, die bei einer späteren Messung unvermeidbar sein werden. Die Breite der Gaußkurve ist somit ein Maß für die **Sensitivität des KATRIN-Experiments**. Bezogen auf ein 30 eV-Analyseintervall ist sie in [5] mit

$$\sigma_{\text{stat}} = 18 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2 \quad (3.3)$$

angegeben. Die Abweichung des Schwerpunkts der Gaußkurve in Abb. 3.4 von $m_\nu^2 = 0$ stellt dagegen eine **systematische Unsicherheit** dar, welche in diesem Fall durch die veränderte Säulendichte beim analysierten Spektrum bedingt wird. Die gesamte systematische Unsicherheit für ein 30 eV-Analyseintervall beträgt

$$\sigma_{\text{syst}} \leq 17 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2 \quad (3.4)$$

und kann nach [5] in fünf dominierende Unsicherheiten von jeweils maximal $\Delta m_\nu^2 = 7,5 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$ zerlegt werden, die quadratisch addiert σ_{syst} ergeben.

4. Transmissionsfunktion und Antwortfunktion

Das vorliegende Kapitel befasst sich primär mit einer mathematischen Beschreibung der Transmissions- und Antwortfunktion (*Response-Funktion*) beim KATRIN-Experiment. Die Antwortfunktion baut dabei mathematisch und physikalisch auf der Transmissionsfunktion auf und bestimmt zusammen mit dem differentiellen β -Spektrum den Verlauf des integrierten β -Spektrums aus Gl. (2.1). In Abschnitt 4.1 werden zunächst grundlegende Konzepte zum Verständnis des Transmissionsvorgangs eingeführt. Im Anschluss daran wird die Transmissionsfunktion in verallgemeinerter Form mit beliebiger Winkelverteilung der emittierten Elektronen beschrieben und schließlich explizit mit speziellen KATRIN-Parametern und isotroper Elektronenemission hergeleitet. Die Abweichungen von idealisierten Bedingungen und deren Auswirkungen werden diskutiert. Abschnitt 4.2 widmet sich der Antwortfunktion, wie sie im KATRIN Design Report [5] zu finden ist. In diesem Zusammenhang wird eine präzisere Berechnung der Antwortfunktion vorgestellt, welche auf mehrere angepasste Transmissionsfunktionen zurückgreift. Beide Berechnungsmethoden werden im Anschluss verglichen. Die in [5] verwendete Antwortfunktion führt zu einer systematischen Unsicherheit auf das Neutrinomassenquadrat von $(8,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ (eV)}^2$ und ist damit im Hinblick auf spätere Spektrumsanalysen obsolet. Außerdem findet eine Untersuchung relativistischer Einflüsse auf die Antwortfunktion und der daraus resultierenden systematischen Unsicherheit statt.

4.1 Transmission und Transmissionsfunktion

4.1.1 Transmission

Unter *Transmission* eines in der WGTS gestarteten Elektrons versteht man das Durchqueren des gesamten Experiments bis zum Detektor. Entscheidend für die Transmission eines Elektrons ist seine longitudinale Energiekomponente auf seiner Bahn durch das Hauptspektrometer. Mit der adiabatischen Transformation aus Gl. (2.5), der Energieseparation $E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^{\parallel} + E_{\text{kin}}^{\perp}$, der vorausgesetzten Parallelität des

magnetischen und elektrischen Feldes sowie der Energieerhaltung $E_{\text{kin},\mathbf{r}} = E_{\text{kin},0} - q \cdot (U_{\mathbf{r}} - U_0)$ erhält man die longitudinale kinetische Energie an einer beliebigen Stelle $\mathbf{r} = (x, y, z)$ der Trajektorie [45]. Mit der im weiteren Verlauf verwendeten Notation der kinetischen Energie $E \equiv E_{\text{kin}}$ ergibt dies

$$E_{\mathbf{r}}^{\parallel} = E_0 - q \cdot (U_{\mathbf{r}} - U_0) - \frac{B_{\mathbf{r}} (\gamma_0 + 1)}{B_0 (\gamma_{\mathbf{r}} + 1)} E_0 \sin^2 \Theta_0. \quad (4.1)$$

Dabei beschreibt der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung die Änderung der longitudinalen kinetischen Energie durch das retardierende bzw. beschleunigende elektrische Feld. Der dritte Term gibt die Transversalenergie für die betrachtete Stelle \mathbf{r} an, welche von der gesamten kinetischen Energie subtrahiert wird. Physikalisch sinnvoll sind lediglich positive Energien. Bereiche, in denen nach Gl. (4.1) $E_{\mathbf{r}}^{\parallel}$ negative Werte annimmt, können demnach nicht erreicht werden. Das Elektron verliert in diesem Fall seine komplette kinetische Longitudinalenergie und wird reflektiert.

Die Stelle \mathbf{r}_A , an der E^{\parallel} im Falle einer Transmission minimal wird, heißt **Analysierpunkt**. Verringert man die Startenergie, bis das Elektron gerade noch transmittiert wird, so strebt E^{\parallel} am Analysierpunkt gegen Null. Die Lage des Analysierpunkts eines Elektrons hängt u. a. von der Startposition in der Quelle ab, da das Elektron auf einer Zyklotronbahn der jeweils führenden Magnetfeldlinie folgt. Elektronen, die am Rand des Strahlrohrs der WGTS emittiert werden, folgen ebenso den äußeren Magnetfeldlinien im Hauptspektrometer. Der Verlauf der Magnetfeldlinien im Hauptspektrometer ist in Abb. 4.1 veranschaulicht.

Doch auch bei fixem Startpunkt ist \mathbf{r}_A abhängig vom Startwinkel Θ_0 des Elektrons. Dies lässt sich mit Gl. (4.1) erklären: Der dritte Term ist proportional zu $\sin^2 \Theta_0$ und hat bei größeren Startwinkeln einen entsprechend stärkeren Einfluss. Auch wenn die Stelle des minimalen Potentials und der minimalen Magnetfeldstärke in einem Punkt auf der Teilchenbahn im Hauptspektrometer zusammenfallen, so entspricht diese Stelle nicht unbedingt dem Analysierpunkt. Lediglich für $\Theta_0 = 0^\circ$ ist dies sicher der Fall. Dann verschwindet der dritte Term und das Minimum von $E_{\mathbf{r}}^{\parallel}$ wird allein durch das Minimum von $U_{\mathbf{r}}$ bestimmt. Ansonsten sind jedoch die Gradienten des Magnetfelds und des Potentials in der Umgebung ihres gemeinsamen Minimums zu beachten. Bei großem Magnetfeldgradienten gewinnt das Elektron zwar durch das elektrische Feld an Longitudinalenergie E^{\parallel} , jedoch wird es durch die anwachsende Magnetfeldstärke schneller abgebremst. Das bedeutet, dass die Lage des Analysierpunkts nicht zwangsläufig mit dem Potentialminimum zusammenfällt, sondern von Θ_0 und vom elektromagnetischen Design abhängt.

Um diesen Effekt winkelabhängiger Analysierpunkte klein zu halten, wird in [45] ein Magnetfelddesign empfohlen, bei dem es zwei Minima der Magnetfeldstärke pro Feldlinie im Hauptspektrometer gibt. In diesem Fall besitzt die Magnetfeldstärke ein lokales Maximum an der Stelle des minimalen Potentials. Der zweite und dritte Term aus Gl. (4.1) wirken dadurch nicht mehr entgegengesetzt. Zu sehen ist die Variante mit einem Minimum in Abb. 4.2(a) und mit zwei Minima in Abb. 4.2(b).

Die Analysierpunkte sind bei einem Magnetfelddesign mit zwei Minima nur sehr schwach abhängig vom Startwinkel. Abb. 4.3 zeigt die Lage der Analysierpunkte

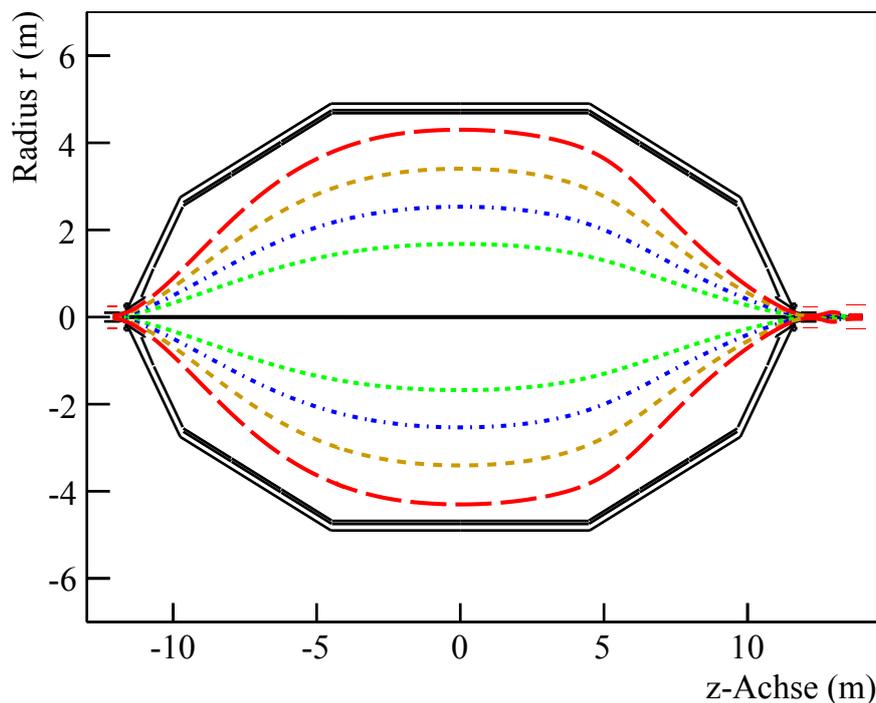
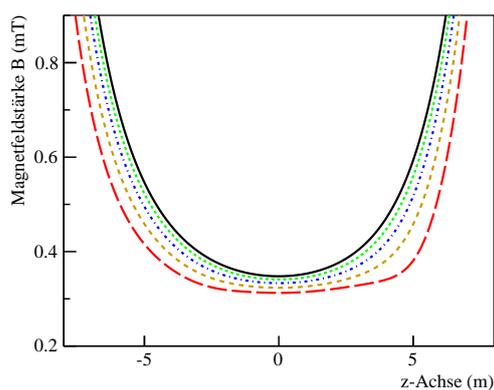
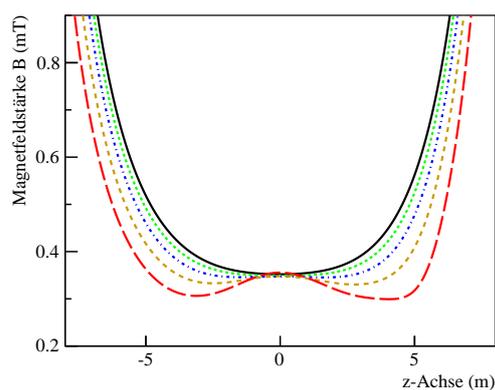


Abbildung 4.1: Verlauf der magnetischen Feldlinien im Hauptspektrometer. Aus [45], modifiziert. Die Analysierpunkte von Elektronen, welche im äußersten Bereich der WGTS emittiert werden, liegen aufgrund der resultierenden Trajektorien nahe am Rand des Spektrometers.



(a) ein Minimum



(b) zwei Minima

Abbildung 4.2: Magnetfelddesign im Hauptspektrometer. Aus [45], modifiziert. Abb. (a) zeigt die Variante mit einem Minimum pro Feldlinie und Abb. (b) die Variante mit zwei Minima. Die aufgetragenen Kurven von Abb. (a) korrespondieren mit den Magnetfeldlinien aus Abb. 4.1. Das Minimum des Potentials liegt in beiden Varianten bei $z = 0$.

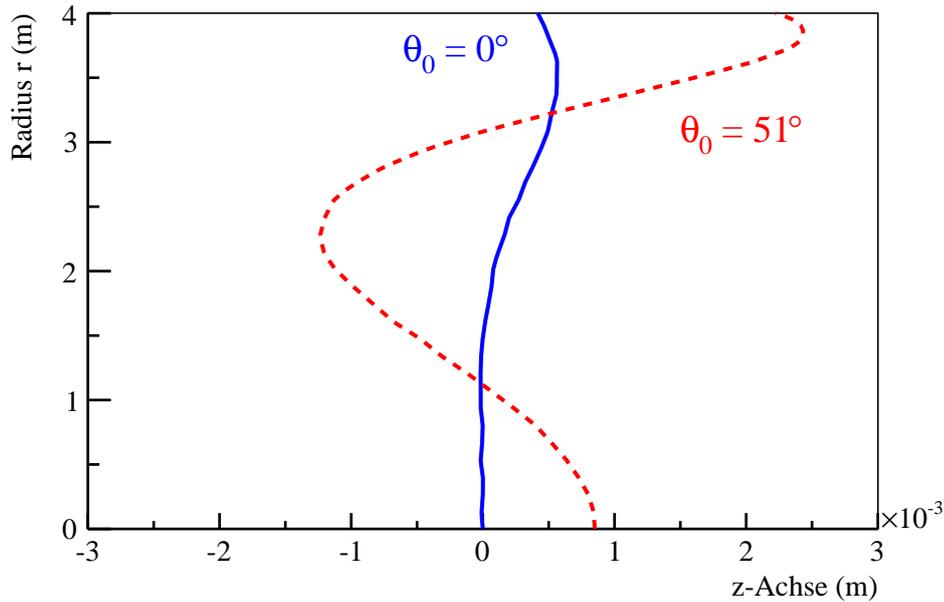


Abbildung 4.3: Die Lage der Analysierpunkte für $\Theta_0 = 0^\circ$ und $\Theta_0 = 51^\circ$. Aus [45], modifiziert. Aufgrund des elektromagnetischen Designs sind die Analysierpunkte abhängig vom Startwinkel und liegen nicht in einer Ebene. Man beachte die Skala der z-Achse.

für $\Theta_0 = 0^\circ$ und $\Theta_0 = 51^\circ$. Entlang der z-Achse bewegen sich die Analysierpunkte lediglich in einem Intervall von knapp 4 mm.

Die Menge aller Analysierpunkte bei fixem Startwinkel bildet die sog. **Analysierebene**¹. Aufgrund der schwachen Winkelabhängigkeit der Analysierpunkte im Fall der Variante mit zwei Minima seien im Folgenden winkelunabhängige Analysierpunkte bzw. eine winkelunabhängige Analysierebene vorausgesetzt. Dass auch in diesem Fall nicht von einem festen B_A ausgegangen werden kann, wird in Abschnitt 4.1.4 erläutert.

4.1.2 Transmissionsfunktion - allgemeiner Fall

Die Transmissionsfunktion des KATRIN-Experiments ordnet jedem Wertepaar, bestehend aus elektronischer Startenergie E_0 und Retardierungsenergie² qU , die Transmissionswahrscheinlichkeit $T(E_0, qU)$ zu. Hierbei gibt es für die Transmissionswahrscheinlichkeit gemäß elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung zwei gleichberechtigte Sichtweisen [46]:

1. Man betrachte entweder die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen, an einer bestimmten Stelle in der WGTS startenden Elektrons, den Pixeldetektor zu erreichen (*bayesscher Wahrscheinlichkeitsbegriff*), oder

¹Es handelt sich strenggenommen um eine „Analysierfläche“. Lediglich bei idealisierten Feldkonfigurationen wäre sie planar.

²Es gelte wie bereits in Kap. 2 die Notation $qU \equiv q \cdot (U_A - U_0)$.

2. man gehe von einer möglichst großen Anzahl von Elektronen aus, die alle an derselben Stelle in der WGTS starten und betrachte davon die relative Anzahl detektierter Elektronen (*frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*).

Im Folgenden wird von der bayesschen Sichtweise Gebrauch gemacht.

Die Transmissionsfunktion berücksichtigt keine Stöße mit Molekülen in der WGTS und geht somit von einer idealisierten Quelle aus. Erst bei der Antwortfunktion (siehe Abschnitt 4.2) werden Energieverluste durch elastische und inelastische Streuprozesse berücksichtigt.

Wenn ein Elektron transmittiert wird, so besitzt es definitionsgemäß in der Analyseebene die geringste longitudinale kinetische Energie auf seiner Bahn durch das Hauptspektrometer. Wenn dieses Elektron nicht transmittiert wird, dann aus dem Grund, dass es bereits vor Erreichen der Analyseebene reflektiert wird³. Zusammengefasst kann gesagt werden, dass eine Transmission genau dann stattfindet, wenn E_A^{\parallel} aus Gleichung (4.1) in der Analyseebene einen positiven, das heißt physikalisch sinnvollen Wert annimmt. Dies drückt die **Transmissionsbedingung**⁴

$$E_A^{\parallel} > 0 \quad (4.2)$$

aus. Unabhängig vom Startwinkel Θ_0 des Elektrons findet für negative Überschussenergien ($E_0 - qU$) keine Transmission statt, da in diesem Fall auch bei $\Theta_0 = 0^\circ$, also bei gesamter kinetischer Startenergie in longitudinaler Richtung $E_0^{\parallel} = E_0$, die Gegenspannung zu groß für eine Transmission ist. Dagegen findet für Überschussenergien oberhalb der Energieauflösung⁵ ΔE eine Transmission sicher statt. Die kinetische Startenergie E_0 reicht dabei aus, um auch bei maximalem Startwinkel Θ_0^{\max} die Gegenspannung überwinden zu können. Die wesentliche Berechnung der Transmissionsfunktion beschränkt sich somit auf Überschussenergien zwischen 0 und ΔE . Schematisch ist die Transmissionsfunktion in Abb. 4.4 zu sehen.

Bei folgender Betrachtung sei der Startwinkel Θ_0 eines in der WGTS startenden Elektrons zwischen Null und Θ_0^{\max} und ansonsten nicht näher bekannt. Die Überschussenergie soll nun im Bereich zwischen Null und der Energieauflösung ΔE liegen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Theta_0 < \Theta_0^{\max} \\ 0 &< (E_0 - qU) < \Delta E. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dann besitzt dieses Elektron eine durch die Transmissionsfunktion bestimmte Transmissionswahrscheinlichkeit T mit $0 < T < 1$. Mit gegebener Startenergie E_0 und gegebenen Quell- und Spektrometerparametern $\boldsymbol{\alpha} \equiv \alpha_1, \alpha_2, \dots$, welche bestimmte

³Es seien hier lediglich Startwinkel berücksichtigt, die kleiner als der maximale Startwinkel Θ_0^{\max} sind. Für alle größeren Startwinkel wird das Elektron unabhängig von seiner Startenergie durch das Magnetfeld des Pinch-Magneten reflektiert (vgl. Abschnitt 2.1.1).

⁴Der Grenzfall $E_A^{\parallel} = 0$ hat keinen Einfluss auf die Transmissionsfunktion und könnte ebenso in die Transmissionsbedingung mit aufgenommen werden, wie es beispielsweise in [18] gehandhabt wird.

⁵Zur Energieauflösung sei auf Abschnitt 2.1.1 verwiesen.

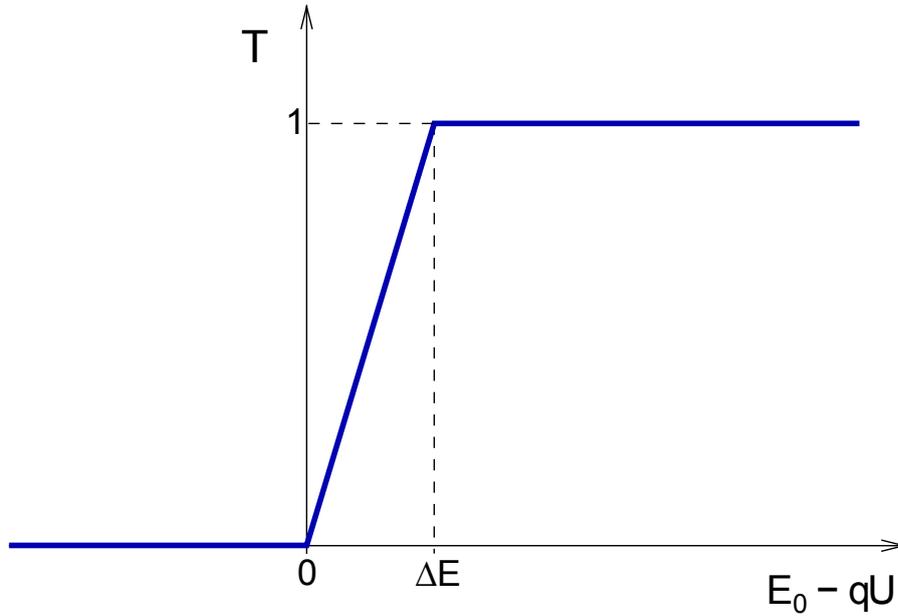


Abbildung 4.4: Die Transmissionsfunktion - schematischer Verlauf. Für negative Überschussenergien ist die Transmissionswahrscheinlichkeit Null. Für Überschussenergien größer als ΔE ist die Transmissionswahrscheinlichkeit 100 %. Den hier linearisierten Verlauf dazwischen gilt es genau zu berechnen.

Konfigurationen wie beispielsweise Magnetfelder oder die eingestellte Gegenspannung U charakterisieren, kann über die Transmissionsbedingung (4.2) ein Startwinkel $\Theta_0^{\text{grenz}}(E_0, \alpha)$ berechnet werden, bis zu welchem eine Transmission stattfindet (siehe Gl. (4.7)). Je größer E_0 bei sonst identischen Parametern ist, desto weiter nähert sich Θ_0^{grenz} dem generellen Maximalwinkel Θ_0^{max} an.

Man geht nun von einer bekannten, vom Polarwinkel Θ abhängigen Winkelverteilung $\omega(\Theta)$ der startenden Elektronen mit folgender Normierung aus:

$$\int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{max}}} \omega(\Theta) \, d\Theta = 1. \quad (4.4)$$

Die Transmissionsfunktion kann durch Integration der Winkelverteilung $\omega(\Theta)$ von 0 bis $\Theta_0^{\text{grenz}}(E_0, \alpha)$ angegeben werden [47, 48]:

$$T := \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{grenz}}} \omega(\Theta) \, d\Theta. \quad (4.5)$$

Diese Gleichung liefert die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron unter Voraussetzung (4.3) transmittiert wird.

4.1.3 Transmissionsfunktion - explizite Berechnung

Aus der Transmissionsbedingung (4.2) folgt zusammen mit der Relation (4.1) eine Transmissionsbedingung für den Startwinkel:

$$\Theta_0 < \arcsin \sqrt{\frac{E_0 - qU}{E_0} \frac{B_0}{B_A} \frac{(\gamma_A + 1)}{(\gamma_0 + 1)}}. \quad (4.6)$$

Für den Grenzfall $\Theta_0 \rightarrow \arcsin \sqrt{(\dots)}$ und unter zusätzlicher Berücksichtigung der Relation (2.4) für den Lorentzfaktor γ erhält man den Grenzwinkel⁶

$$\Theta_0^{\text{grenz}} = \arcsin \sqrt{\frac{E_0 - qU}{E_0} \frac{B_0}{B_A} \frac{2mc^2}{(2mc^2 + E_0)}} \quad (4.7)$$

mit der Ruhemasse m des Elektrons. Alle Startwinkel bis Θ_0^{grenz} führen innerhalb der Rahmenbedingungen (4.3) zu einer Transmission.

Verwendet man, wie in Abschnitt 1.3 behandelt, eine gemäß Gl. (4.4) normierte **isotrope Winkelverteilung**⁷ $\omega(\Theta) = (1 - \cos \Theta_0^{\text{max}})^{-1} \sin \Theta$, so ergibt dies in Gl. (4.5) eingesetzt folgende Transmissionsfunktion:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{grenz}}} \frac{\sin \Theta}{1 - \cos \Theta_0^{\text{max}}} d\Theta \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \Theta_0^{\text{grenz}}}}{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \Theta_0^{\text{max}}}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nun können der Ausdruck für Θ_0^{grenz} mit (4.7) und Θ_0^{max} mit (2.6) ersetzt werden. Man gelangt unter Einbeziehung sämtlicher möglicher Überschussenergien auch außerhalb der Grenzen $0 < (E_0 - qU) < \Delta E$ zur **relativistischen Transmissionsfunktion des KATRIN-Experiments**⁸

$$T(E_0, qU) = \begin{cases} 0 & , (E_0 - qU) \leq 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{E_0 - qU}{E_0} \frac{B_0}{B_A} \frac{2mc^2}{(2mc^2 + E_0)}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B_0}{B_P}}} & , 0 < (E_0 - qU) < \Delta E \\ 1 & , (E_0 - qU) \geq \Delta E. \end{cases} \quad (4.9)$$

Der Einfluss durch die relativistische Berechnung äußert sich insbesondere bei der Energieauflösung. Mit der Ruheenergie $mc^2 \approx 511$ keV des Elektrons [49] und einer

⁶Der Lorentzfaktor γ_A wurde für die hier relevanten Überschussenergien $(E_0 - qU) \ll E_0$ gleich eins gesetzt.

⁷Über den Azimutalwinkel Φ wurde bereits integriert.

⁸Eine alternative Herleitung ist für den klassischen Grenzfall in [18] zu finden.

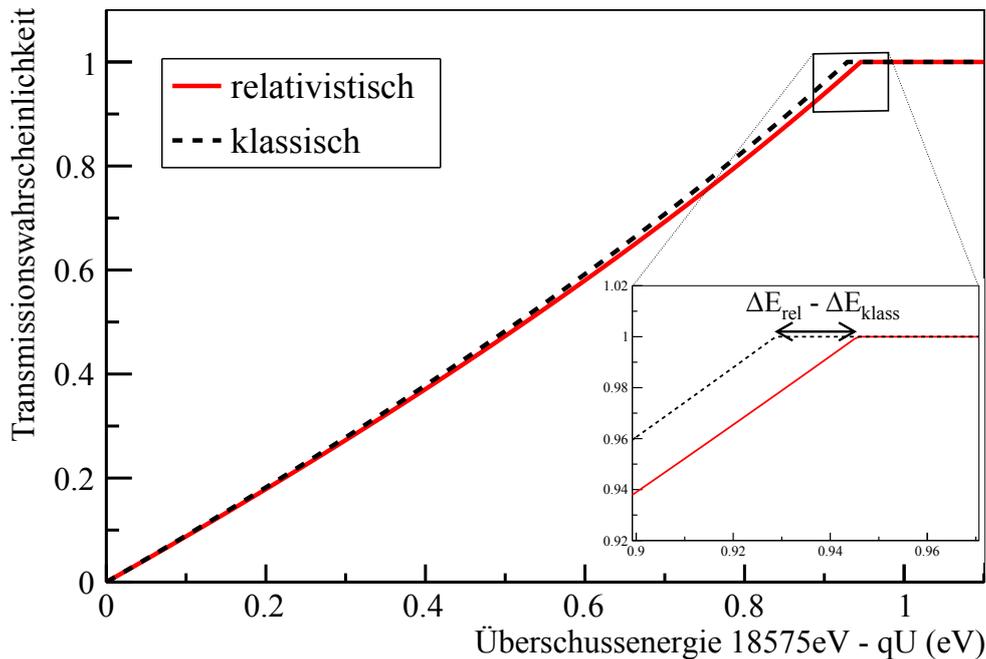


Abbildung 4.5: Der relativistische Einfluss auf die Transmissionsfunktion. Bei relativistischer Rechnung vergrößert sich die Breite der Transmissionsfunktion ΔE um knapp 2%. Für die Kurve wurden KATRIN-Standardparameter (siehe [5]) verwendet.

Startenergie von $E_0 = 18575$ eV erhält man eine Verbreiterung der Energieauflösung um etwa 1,82% gegenüber der klassischen Betrachtungsweise. Für die Energieauflösung bei KATRIN-Standardparametern bedeutet dies eine Verbreiterung um etwa 17 meV von $\Delta E_{\text{klass}} \approx 929$ meV auf $\Delta E_{\text{rel}} \approx 946$ meV. Siehe dazu Gl. (2.7). Die Transmissionsfunktion (4.9) sowie der relativistische Einfluss darauf sind in Abb. 4.5 dargestellt.

Die Auswirkung einer nicht-relativistischen Berechnung der Transmissionsfunktion bzw. der weiter unten eingeführten Antwortfunktion auf die Bestimmung der Neutrinomasse wird in Abschnitt 4.2.1 diskutiert.

4.1.4 Abweichungen vom Idealfall

Bei bekannter Winkelverteilung der Elektronenemission ist die Transmissionsfunktion durch die Stärke und den Verlauf des elektrischen und des magnetischen Feldes bestimmt. Besonders empfindlich reagiert sie auf die Feldkonfigurationen im Hauptspektrometer, das heißt auf die Beschaffenheit und die Position der Luftspulen und Elektroden im Spektrometertank. Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, beeinflusst eine Veränderung der Feldkonfigurationen beispielsweise die genaue Lage der Analysierebene und ebenso deren Abhängigkeit vom Startwinkel Θ_0 .

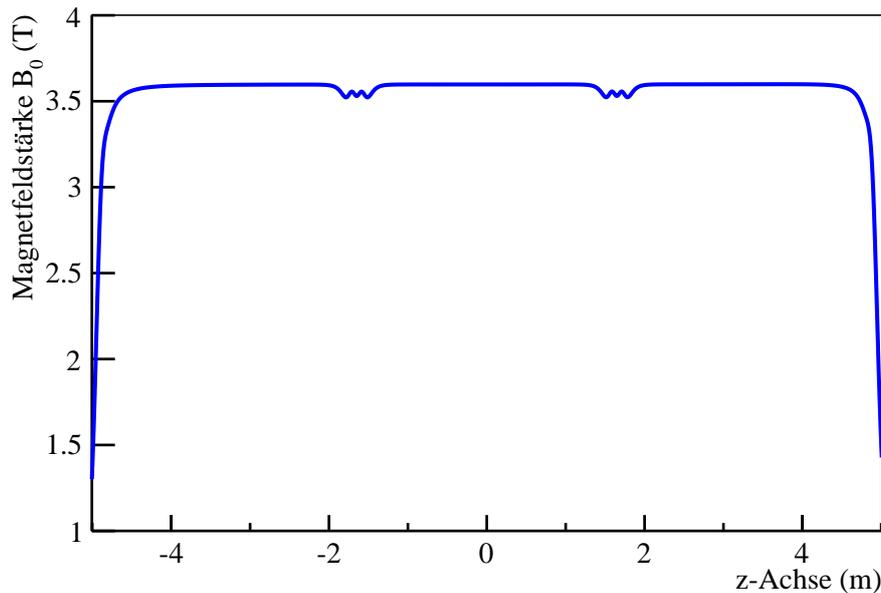


Abbildung 4.6: Magnetfeldstärke in der WGTS in Abhängigkeit der z-Koordinate. Aus [35], modifiziert. Speziell an den äußeren Rändern und etwa 1,75 m in beide Richtungen vom Mittelpunkt entfernt sind Inhomogenitäten zu erkennen.

Segmentierung des Startvolumens

Selbst bei einer winkelunabhängigen Analysierebene genügt es nicht, die KATRIN-Transmissionsfunktion (4.9) global für das Gesamtexperiment zu berechnen. Vielmehr ist es erforderlich, aufgrund des technisch realisierbaren elektrischen und magnetischen Feldes zwischen verschiedenen Segmenten⁹ der WGTS, in denen Elektronen starten, zu differenzieren.

Dies hat zwei Gründe:

1. Zum einen sind in der WGTS das Potential U_0 und die Magnetfeldstärke B_0 nur näherungsweise konstant. Vor allem hängt B_0 vom genauen Startpunkt der Elektronen ab. Entscheidend ist dabei die z-Koordinate, wie in Abb. 4.6 zu sehen.
2. Zum anderen können U_A und B_A ebenfalls variieren. Es ist entscheidend, wo die jeweils betrachtete Teilchenbahn die Analysierebene durchstößt¹⁰. Abb. 4.7 veranschaulicht das Abbildungsverhalten der WGTS auf die Analysierebene bzw. auf den Pixeldetektor. Das Potential und die Magnetfeldstärke der Analysierebene sind hauptsächlich von der radialen Position des Analysierpunkts abhängig [45, 50]. Solche Inhomogenitäten ΔU_A und ΔB_A des Potentials bzw. der magnetischen Feldstärke innerhalb der Analysierebene führen dazu, dass

⁹Siehe dazu Abschnitt 3.2.

¹⁰vgl. Analysierpunkt r_A aus Abschnitt 4.1.1.

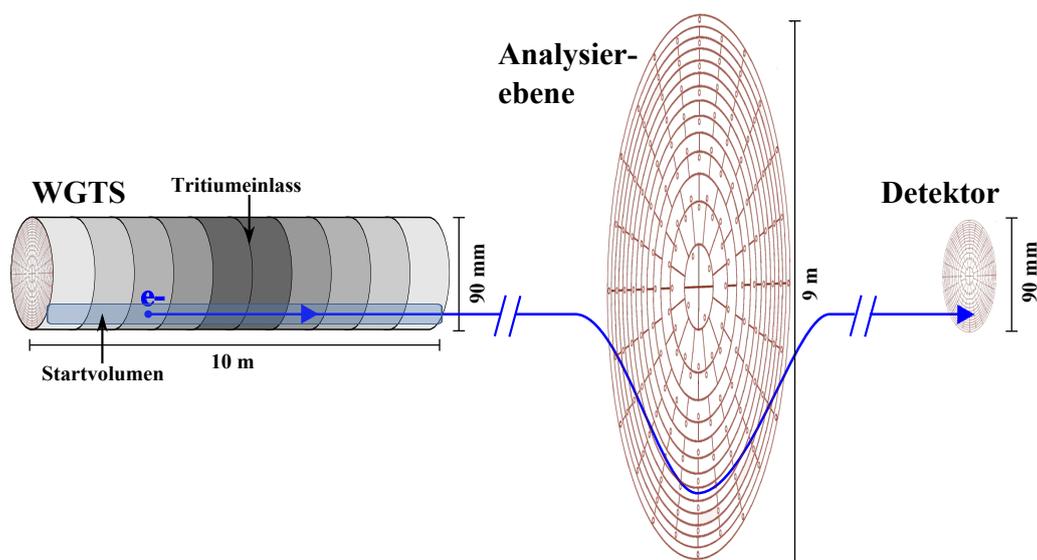


Abbildung 4.7: Abbildungsverhalten der WGTS auf die Analysierebene bzw. auf den Pixeldetektor. Aus [35], modifiziert. Abhängig vom betrachteten Startvolumen des Elektrons durchstößt die Teilchenbahn im Fall einer Transmission die Analysierebene in einem bestimmten, eingeschränkten Bereich. Den Detektor trifft das Elektron auf einem entsprechenden Pixel.

verschiedene Analysierpunkte mit unterschiedlichen Transmissionsfunktionen einhergehen. Abb. 4.8 illustriert den Einfluss dieser Inhomogenitäten auf die Transmissionsfunktionen gemäß Gl. (4.9).

Die Segmentierung des Pixeldetektors (vgl. Abb. 2.5) erlaubt eine Zuordnung von detektierten Elektronen und deren Startvolumen in der WGTS. Gleichmaßen kann eine Fläche zugeordnet werden, in welcher die Elektronen die Analysierebene passieren. Das zugeordnete Startvolumen erstreckt sich jedoch über die gesamte Längsachse der WGTS (siehe Abb. 4.7). Somit können zwar Transmissionsfunktionen¹¹ mit unterschiedlichen Werten für U_A und B_A mit einer gewissen Auflösung unterschieden werden, eine differenzierte Zuordnung von U_0 und B_0 ist dagegen nicht möglich. Zur Berücksichtigung von Feldinhomogenitäten im Startvolumen und in der zugehörigen Teilfläche der Analysierebene wird eine Mittelung verschiedener Transmissionsfunktionen für Elektronen aus unterschiedlichen Bereichen des Startvolumens vorgenommen. Dies verbreitert die resultierende Transmissionsfunktion und ist daher bei der Simulation von KATRIN-Messungen zu berücksichtigen. Zur Mittelung wird das Startvolumen in kleinere Segmente unterteilt. Für j Segmente werden die jeweils zugehörigen Transmissionsfunktionen T_j berechnet und zur Mittelung mit einem Gewichtungsfaktor g_j versehen. Dieser Gewichtungsfaktor trägt dem Umstand Rechnung, dass aus unterschiedlichen Segmenten im zeitlichen Mittel unterschiedlich viele Elektronen emittiert werden, die zur Messung beitragen. Der Faktor g_j soll

¹¹Sobald Energieverluste durch Streuung an den Tritiummolekülen nicht mehr vernachlässigt werden können, misst man Antwortfunktionen (siehe Abschnitt 4.2) anstelle der Transmissionsfunktionen. Das Konzept der Segmentierung kann jedoch gleichermaßen angewandt werden.

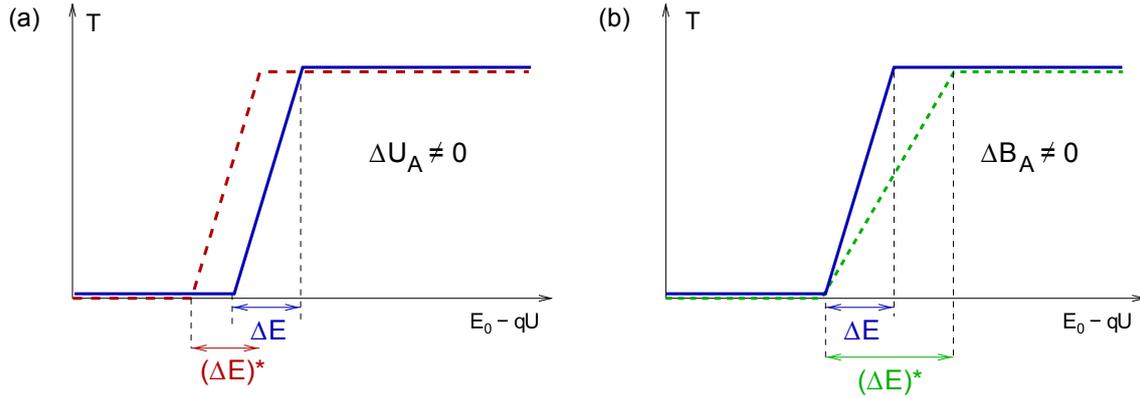


Abbildung 4.8: Auswirkung von Potential- und Magnetfeldinhomogenitäten innerhalb der Analysierebene. Aus [5], modifiziert. Abb. a) zeigt den Einfluss von ΔU_A : Geht man fälschlicherweise von einem globalen qU aus, so wird die Transmissionsfunktion abhängig von r_A verschoben, behält jedoch ihre Form. Abb. b) zeigt den Einfluss von ΔB_A : Breite und Verlauf der Transmissionsfunktion werden beeinflusst, nicht jedoch die Stelle beginnender Transmission.

deshalb proportional zu dieser Anzahl N_j von Elektronen des j -ten Segments sein. Proportional zu N_j ist sowohl die Säulendichte $(\rho d)_j$ des Segments j als auch der Raumwinkel $\Omega_j = 2\pi(1 - \cos(\Theta_0^{\max})_j)$, welcher durch $\Theta_0 = (\Theta_0^{\max})_j$ begrenzt wird. Wegen $\Omega_j \propto (1 - \cos(\Theta_0^{\max})_j)$ ist

$$g_j = (\rho d)_j \cdot \left(1 - \cos(\Theta_0^{\max})_j\right) \quad (4.10)$$

eine mögliche Realisierung des Gewichtungsfaktors. Die gemittelte Transmissionsfunktion \bar{T} berechnet sich dann zu

$$\bar{T} = \frac{g_1 \cdot T_1 + g_2 \cdot T_2 + \dots}{\sum_j g_j} \quad (4.11)$$

Um die Inhomogenitäten der Magnetfeldstärke in der WGTS (vgl. Abb 4.6) zu berücksichtigen, wird das Startvolumen longitudinal in einzelne Segmente unterteilt. Zur Berücksichtigung der Inhomogenitäten ΔU_A und ΔB_A innerhalb der Analysierebene ist eine zusätzliche radial-azimutale Unterteilung des Startvolumens erforderlich. Dazu ist eine sehr genaue Kenntnis der Inhomogenitäten innerhalb kleiner Teilflächen vonnöten. Es kann beispielsweise mit einer winkelselektiven Elektronenkanone, ähnlich der aus Abschnitt 5.1, eine präzisere Vermessung der Inhomogenitäten in der Analysierebene durchgeführt werden. Siehe dazu [48]. Entsprechend der Unterteilung des Detektors in 148 flächengleiche Pixel (siehe Abschnitt 2.2.4) kann eine Abschätzung der Teilfläche innerhalb der Analysierebene erfolgen, die einem Pixel beziehungsweise einem Startvolumen zuzuordnen ist: Bei einem Radius der Analysierebene von 4,5 m wie in Abb. 4.7 ist diese Teilfläche etwa 0,43 m² groß. Verschiedene Transmissionsfunktionen, welche mit unterschiedlichen Analysierpunkten dieser Teilfläche korrespondieren, können vom Detektor nicht weiter aufgelöst werden, weshalb zusätzlich segmentiert und wie in Gl. (4.11) gemittelt werden sollte.

Restunschärfe

Es bleibt zu erwähnen, dass die Resultate durch die beschriebenen Mittelungen in ihrer Güte beschränkt sind, selbst bei präziser Kenntnis der Magnetfeldstärke und Dichteverteilung in der WGTS sowie der Inhomogenitäten in der Analysierebene. Grund hierfür ist die Tatsache, dass auch Elektronen, die alle an einem fixen Punkt in der Quelle mit einem ebenso fixen Winkel Θ_0 starten, unterschiedliche Analysierpunkte haben können. Dies wiederum liegt daran, dass die Elektronen Zyklotronbahnen mit einem Zyklotronradius r_A in der Analysierebene beschreiben. Da der azimutale Startwinkel Φ_0 alle Werte zwischen Null und 2π annehmen kann, können diese Elektronen sämtliche Analysierpunkte innerhalb einer Kreisfläche mit dem Radius $2 \cdot r_A$ besitzen. Siehe dazu Abb. 4.9. Mit der Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in äußeren Feldern [16] und der relativistischen adiabatischen Transformation (2.5) erhält man

$$r_r = \sqrt{\frac{E_P^\perp \cdot (E_P/c^2 + m)}{q^2 B_P B_r}} \quad (4.12)$$

mit der Ruhemasse m , dem lokalen Zyklotronradius r_r sowie der lokalen Magnetfeldstärke B_r des Elektrons. Diese Gleichung besagt, dass der Zyklotronradius eines unter festem Winkel in der WGTS gestarteten Elektrons proportional zu $(B_r)^{-\frac{1}{2}}$ ist und sein Maximum deshalb bei minimaler Magnetfeldstärke vorliegt. Unter Verwendung von KATRIN-Standardparametern ergibt sich für den Grenzfall¹² $E_P^\perp = E_P = 18575 \text{ eV}$ ein Zyklotronradius in der Analysierebene von $r_A \approx 8 \text{ mm}$. Dies führt zu einer Fläche von etwa $0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ in der Analysierebene, auf welcher ein punktförmiges Segment der WGTS abgebildet wird. Eine Segmentierung der WGTS mit einer einhergehenden Segmentierung der Analysierebene kann deshalb nur sinnvoll sein, wenn die resultierenden Teilflächen deutlich größer als $0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ sind. Angesichts der korrespondierenden Fläche eines Detektorpixels von $0,43 \text{ cm}^2$ in der Analysierebene ist der Zyklotronradius in guter Näherung vernachlässigbar.

¹²Dies bedeutet, dass die Elektronen mit $\Theta_0 = \Theta_0^{\text{max}}$ starten.

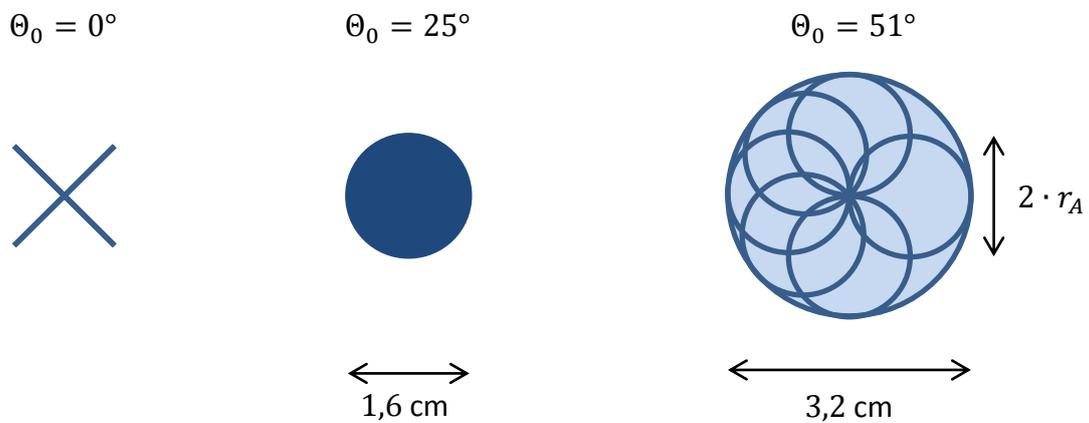


Abbildung 4.9: Die Ausdehnung der Fläche, in welcher Elektronen mit fixem Startpunkt beim Durchqueren der Analysierebene lokalisiert sein können. Starten diese Elektronen zusätzlich mit fixem Azimutwinkel Φ_0 , so liegen die möglichen Analysierpunkte auf einem Kreisring mit dem Zyklotronradius r_A . Da jedoch alle Azimutwinkel erlaubt sind, bilden die möglichen Analysierpunkte einen Kreis mit doppeltem Zyklotronradius. Durch die Mitte der zur Veranschaulichung dargestellten Teilringe aus dem rechten Kreis verläuft die jeweils führende Magnetfeldlinie. Beispielhaft sind die Kreise im Maßstab 1:1 für drei unterschiedliche Startwinkel θ_0 dargestellt.

4.2 Die Antwortfunktion

Bei der Antwortfunktion des KATRIN-Experiments gelten grundsätzlich alle Vorüberlegungen zur Transmission aus Abschnitt 4.1.1, nun jedoch mit zusätzlicher Berücksichtigung von elastischen und inelastischen Streuprozessen in der Tritiumquelle. Die Auswirkung der durch Streuprozesse verursachten Winkeländerungen wird hier bei der mathematischen Beschreibung außer Acht gelassen. Berücksichtigt werden hingegen Energieverluste gemäß der Energieverlustfunktion (siehe Abschnitt 3.1).

4.2.1 Näherungsweise Berechnung

Es seien die Potentiale U_0 und U_A sowie die Magnetfeldstärken B_0 und B_A bei Betrachtung eines Segments der WGTS als konstante Parameter angenommen. Dann ergibt sich für die Antwortfunktion dieses Segments nach [5]:

$$\begin{aligned}
 R(E_0, qU) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon T(E_0 - \epsilon, qU) \cdot \{\overline{P}_0 \cdot \delta(\epsilon) + \overline{P}_1 \cdot f(\epsilon) + \overline{P}_2 \cdot (f \otimes f)(\epsilon) + \dots\} \\
 &= \int_{\epsilon=0}^{E_0 - qU} d\epsilon \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} T(E_0 - \epsilon, qU) \cdot \overline{P}_i \cdot f_i(\epsilon)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

mit den **Strefunktionen**:

$$\begin{aligned}
 f_0(\epsilon) &:= \delta(\epsilon) \\
 f_1(\epsilon) &:= f(\epsilon) \\
 f_2(\epsilon) &:= (f \otimes f)(\epsilon) \\
 f_3(\epsilon) &:= (f \otimes f \otimes f)(\epsilon) \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dabei bezeichnet $\delta(\epsilon)$ die Dirac'sche Delta-Distribution [51] und $f(\epsilon)$ die **Energieverlustfunktion** aus Abschnitt 3.1. Die mittleren Streuwahrscheinlichkeiten \overline{P}_i werden weiter unten eingeführt. Der Operator \otimes bezeichnet die mathematische **Faltung**, welche folgendermaßen definiert ist [51]:

$$(f \otimes g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \epsilon) \cdot g(\epsilon) d\epsilon. \tag{4.15}$$

Es seien f und g zwei Funktionen beziehungsweise Distributionen mit $(f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C})$. Aufgrund der Integration ist die Faltung bezüglich f und g eine assoziative, kommutative und distributive Operation.

Die Antwortfunktion resultiert bei fixer Retardierungsenergie qU aus einer Faltung der Transmissionsfunktion T mit der Summe

$$\overline{P}_0 \cdot f_0(\epsilon) + \overline{P}_1 \cdot f_1(\epsilon) + \overline{P}_2 \cdot f_2(\epsilon) + \dots \tag{4.16}$$

Die einzelnen Terme der Summe (4.16) beschreiben die Energieverluste durch (mehrfache) Streuungen: Der Term $\overline{P}_0 \cdot f_0(\epsilon)$ berücksichtigt den Anteil der ungestreuten Elektronen, $\overline{P}_1 \cdot f_1(\epsilon)$ den Anteil einfach gestreuter Elektronen und so weiter. Der ganzzahlige Parameter N_{streu} aus Gl. (4.13) gibt an, bis zu welchen Ordnungen die Streuungen berücksichtigt werden. Aus der Definition der Streufunktionen $f_i(\epsilon)$ ist ersichtlich, dass jeder Term $\overline{P}_i \cdot f_i(\epsilon)$ eine i -fache Faltung mit der Energieverlustfunktion $f(\epsilon)$ bewirkt, was einem Energieverlust durch i -fache Streuung entspricht. Gäbe es beispielsweise lediglich monochromatische Energieverluste der Größe ϵ' , so hätte die auf eins normierte Energieverlustfunktion die Form einer Delta-Distribution $f(\epsilon) \equiv \delta(\epsilon - \epsilon')$ und würde bei einer Faltung mit der Transmissionsfunktion T lediglich eine Verschiebung um ϵ' bewirken. Dies hätte zur Folge, dass die Transmission einzelner Elektronen erst bei einer um ϵ' erhöhten Startenergie beginnen würde, da genau dann eine Kompensation des Energieverlustes stattfände.

Die Integrationsgrenzen in Gl. (4.13) kommen dadurch zustande, dass außerhalb der Grenzen jeweils ein Teilintegrand verschwindet: Bei $\epsilon \leq 0$ ist $f = 0$, da es keine negativen Energieverluste gibt, und für $\epsilon > (E_0 - qU)$ ist $T = 0$ (siehe (4.9)).

Bei einer Auftragung der Antwortfunktion über der Überschussenergie wie in Abb. 4.10 handelt es sich strenggenommen nicht mehr um eine Faltung von T mit den Termen $\overline{P}_i \cdot f_i(\epsilon)$ wie oben beschrieben, da nun qU anstelle von E_0 variiert wird¹³. Jedoch besitzt die Transmissionsfunktion aus Gl. (4.9) bei großen Startenergien $E_0 \approx 18,6 \text{ keV}$ in erster Näherung eine effektive Abhängigkeit von der Überschussenergie ($E_0 - qU$), sodass das Resultat von demjenigen einer Faltung nur unwesentlich abweicht.

Wie bereits bei der Transmissionsfunktion in Abschnitt 4.1.4 beschrieben, kann analog zu \overline{T} eine mittlere Antwortfunktion \overline{R} für ein segmentiertes Startvolumen in der Quelle berechnet werden.

Streuwahrscheinlichkeiten

Die longitudinale Unterteilung des zu einem Detektorpixel gehörigen Startvolumens ist in diesem Fall noch wichtiger als bei der Transmissionsfunktion, da das nun berücksichtigte Streuverhalten der Elektronen von der Startposition in der WGTS abhängt.

Aufgrund der sehr geringen Wahrscheinlichkeit¹⁴ einer Streuung pro Tritiummolekül folgt die Anzahl i der Streuprozesse eines Elektrons aus dem betrachteten Segment der WGTS einer Poissonverteilung mit den Streuwahrscheinlichkeiten

$$P_i := \exp(-\sigma \cdot \rho d_{\text{eff}}) \frac{(\sigma \cdot \rho d_{\text{eff}})^i}{i!} \quad (4.17)$$

¹³Bei der späteren Messung des Tritiumspektrums kann ebenfalls nur qU variiert werden.

¹⁴Man beachte dazu die Größenordnung des Wirkungsquerschnitts $\mathcal{O}(\sigma) = 10^{-22} \text{ m}^2$ (vgl. Abschnitt 3.1).

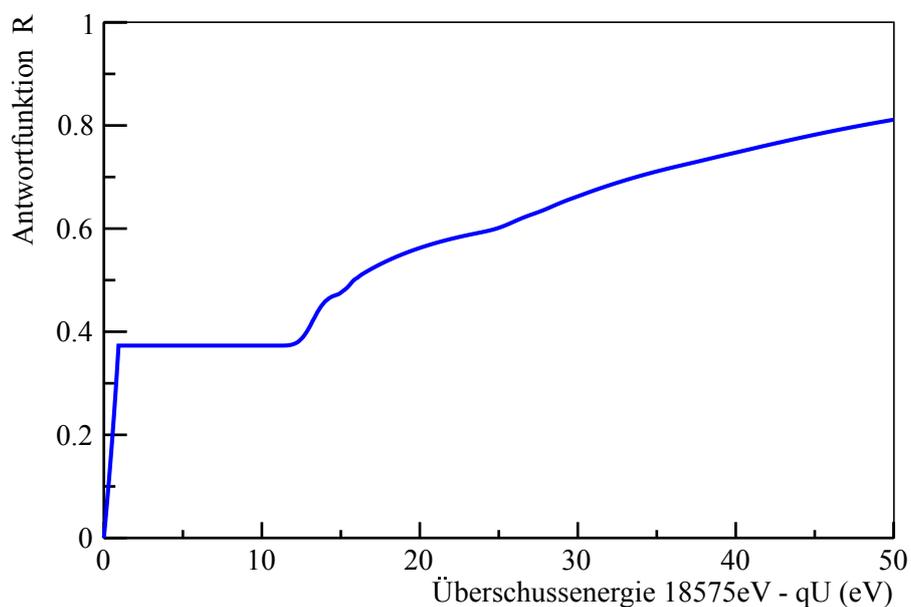


Abbildung 4.10: Die Antwortfunktion mit der näherungsweise Berechnung aus Gl. (4.13) und der Energieverlustfunktion aus Abschnitt 3.1. Dargestellt ist eine Mittelung aus zehn verschiedenen Antwortfunktionen einzelner Segmente bzw. *Slices* (vgl. Abb. 3.2). Deutlich zu sehen ist ein Anstieg im Bereich einer Überschussenergie von etwa 12,5 eV durch einsetzende inelastische Einfachstreuung. Etwas schwächer fällt der Anstieg durch einsetzende inelastische Zweifachstreuung im Bereich von $(E_0 - qU) \approx 25$ eV aus.

und der darin enthaltenen **effektiven Säulendichte**

$$\rho d_{\text{eff}}(z, \Theta_0) := \frac{1}{\cos \Theta_0} \int_{z=z'}^{z_{\text{max}}} \rho(z') dz', \quad (4.18)$$

die das Elektron in der Quelle passiert [34]. Dabei ist z die z -Koordinate des Elektron-Startpunkts innerhalb der Quelle und z_{max} die z -Koordinate des Übergangs von der WGTS zur Transportsektion (vgl. Abb. 2.2). Der Parameter σ gibt den kompletten Wirkungsquerschnitt aller möglichen Streuprozesse an, welche in der Energieverlustfunktion berücksichtigt sind.

Entscheidend bei der Berechnung der Antwortfunktion aus Gl. (4.13) sind die **mittleren Streuwahrscheinlichkeiten**

$$\begin{aligned} \overline{P}_i \equiv \overline{P}_i(z) &:= \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{max}}} \omega(\Theta) \cdot P_i(z, \Theta) d\Theta \\ \omega(\Theta) \stackrel{\text{isotrop}}{=} &\frac{1}{1 - \cos \Theta_0^{\text{max}}} \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{max}}} \sin(\Theta) \cdot P_i(z, \Theta) d\Theta, \end{aligned} \quad (4.19)$$

welche die Beiträge der i -fach-Streuungen gemäß ihres mittleren Auftretens gewichten. Eine Mittelung der Streuwahrscheinlichkeiten ist trotz Betrachtung eines festen Startpunkts¹⁵ erforderlich, da die effektive Säulendichte (siehe Gl. (4.18)) und somit die Streuwahrscheinlichkeiten vom Startwinkel Θ_0 abhängen. In Abb. 4.11 ist die Winkelabhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeiten dargestellt. Integriert wird das Produkt aus Streuwahrscheinlichkeit P_i und normierter isotroper Winkelverteilung $(1 - \cos \Theta_0^{\text{max}})^{-1} \sin \Theta$ über alle zur Transmission beitragenden Startwinkel.

Gültigkeit nur bei kleinem Maximalwinkel

Da nur die gemittelten Streuwahrscheinlichkeiten \overline{P}_i als Faktoren in die Antwortfunktion aus Gl. (4.13) eingehen, berechnet sich hier jeder Summand durch eine Faltung der Transmissionsfunktion T mit der jeweiligen Streufunktion f_i . Das Ergebnis dieser Faltung wird anschließend mit der entsprechenden mittleren Streuwahrscheinlichkeit \overline{P}_i multipliziert. Dadurch wird jedoch vernachlässigt, dass Elektronen mit kleinem Startwinkel Θ_0 beispielsweise eine höhere Wahrscheinlichkeit $P_0(\Theta_0)$ besitzen, ungestreut zu bleiben, als Elektronen mit größerem Startwinkel. Die Winkelverteilung der ungestreuten Elektronen ist somit nicht mehr isotrop. Dies ändert die Form des ersten Summanden. Ähnlich kann bei den weiteren Summanden argumentiert werden. Der folgende Abschnitt beschreibt die erforderlichen Änderungen bei der Berechnung der Antwortfunktion. Gl. (4.9) stellt somit lediglich eine Näherung für kleine Maximalwinkel Θ_0^{max} oder schnell abfallende Winkelverteilungen

¹⁵Bei ausreichend kleinen Segmenten kann als Startpunkt der Elektronen die Mitte des betrachteten Segments herangezogen werden.

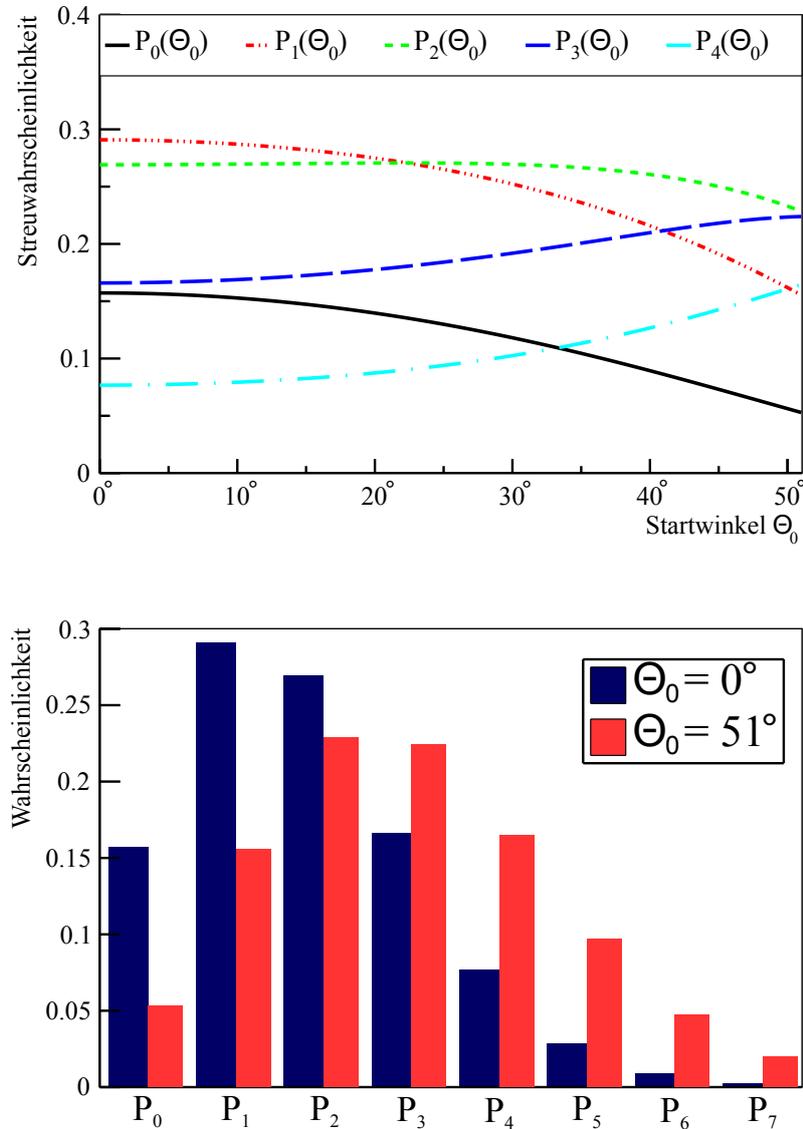


Abbildung 4.11: Die Abhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeiten P_i vom Startwinkel Θ_0 . Das obere Diagramm zeigt den Verlauf der Streuwahrscheinlichkeiten P_0 bis P_4 bei variablem Startwinkel. Das Säulendiagramm stellt P_0 bis P_7 gemäß einer Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung dar und unterscheidet zwischen den Extremfällen $\Theta_0 = 0^\circ$ und $\Theta_0 = 51^\circ$. Die Anzahl von Streuprozessen ist poissonverteilt mit einer Varianz bzw. einem Erwartungswert von $(\sigma \cdot \rho d_{\text{eff}})$. Für diese Darstellung wurde der komplette Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{tot}} \approx 3,7 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ (vgl. Abschnitt 3.1) und eine effektive Säulendichte von $\rho d_{\text{eff}}(\Theta_0) = 5 \cdot 10^{21} \cdot (\cos \Theta_0)^{-1} \text{ m}^{-2}$ verwendet. Auf das KATRIN-Experiment bezogen, entspricht dies dem Beschuss mit einer Elektronenkanone (vgl. Kap. 5), sodass alle Elektronen die komplette WGTS mit einer effektiven Säulendichte $\rho d_{\text{eff}}(z = \text{const}, \Theta_0 = \text{const})$ durchqueren.

dar, sodass die Winkelabhängigkeit¹⁶ der Streuwahrscheinlichkeiten kaum zum Tragen kommt.

4.2.2 Exakte Berechnung

Da sowohl die Winkelverteilung $\omega(\Theta_0)$ der Elektronen als auch die Streuwahrscheinlichkeiten $P_i(\Theta_0)$ eine Abhängigkeit von Θ_0 aufweisen, darf die Integration über alle beitragenden Startwinkel nicht separat für $\omega(\Theta_0)$ und $P_i(\Theta_0)$ ausgeführt werden. Daher kann bei der korrekten Berechnung der Antwortfunktion nicht, wie bisher, auf die Transmissionsfunktion T aus Gl. (4.9) zurückgegriffen werden.

Modifizierte Transmissionsfunktionen

Die bisherige Notation zur Berechnung der Antwortfunktion kann beibehalten werden, sofern man in Gl. (4.13) die Transmissionsfunktion T durch modifizierte Transmissionsfunktionen T_i^* ersetzt. Es ergibt sich die Antwortfunktion eines Segments mit beliebig großem Maximalwinkel Θ_0^{\max} :

$$R^*(E_0, qU) := \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} d\epsilon \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} T_i^*(E_0 - \epsilon, qU) \cdot \bar{P}_i \cdot f_i(\epsilon) . \quad (4.20)$$

Sofern bei der allgemeinen Berechnungsformel der Transmission (4.8) die winkelabhängigen Streuwahrscheinlichkeiten $P_i(\Theta_0)$ in den Integranden mit aufgenommen werden, erhält man die benötigten modifizierten Transmissionsfunktionen

$$T_i^*(E_0, qU) := \begin{cases} 0 & , (E_0 - qU) < 0 \\ \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{grenz}}(E_0, qU)} \frac{(\sin \Theta) \cdot P_i(\Theta)}{(1 - \cos \Theta_0^{\max}) \cdot \bar{P}_i} d\Theta & , 0 \leq (E_0 - qU) < \Delta E \\ 1 & , (E_0 - qU) \geq \Delta E \end{cases} \quad (4.21)$$

mit dem Grenzwinkel Θ_0^{grenz} aus Gl. (4.7) und den gemittelten Streuwahrscheinlichkeiten aus Gl. (4.19). Diese modifizierten Transmissionsfunktionen T_i^* weisen gegenüber der bisherigen Transmissionsfunktion T eine ähnliche Gestalt auf: In beiden Fällen sind die Funktionen für negative Überschussenergien Null sowie konstant eins für größere Überschussenergien als ΔE . Die entscheidende Änderung gegenüber T sind die Verläufe von T_i^* für $0 \leq (E_0 - qU) < \Delta E$. Abb. 4.12 zeigt die T_i^* der ersten vier Werte für i . Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Verläufe einzelner T_i^* stark unterscheiden, weshalb die bisherige Verwendung einer einzelnen Funktion T eine erhebliche Näherung darstellt. Eine äquivalente Sichtweise zur korrekten Berücksichtigung winkelabhängiger Streuwahrscheinlichkeiten wurde bereits in [52] vorgestellt.

¹⁶Bei Taylorentwicklung der Streuwahrscheinlichkeiten um $\Theta_0 = 0$ ergibt sich erst in zweiter Ordnung eine Winkelabhängigkeit.

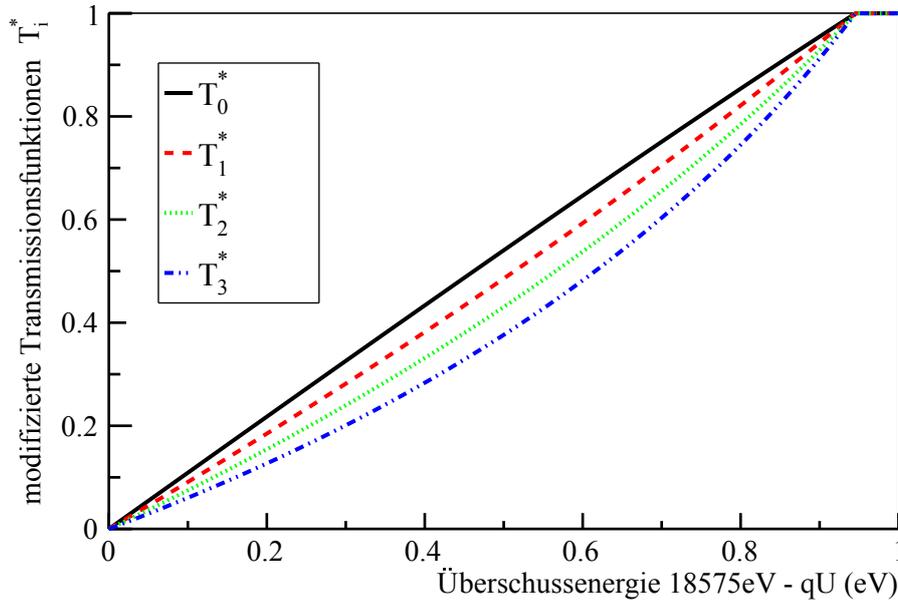


Abbildung 4.12: Die modifizierten Transmissionsfunktionen T_i^* . Aufgetragen sind die T_i^* mit $i = 0, 1, 2, 3$ für Überschussenergien zwischen Null und einem Elektrenovolt unter Verwendung der KATRIN-Standardparameter und einer Segmentierung der WGTS in zehn *Slices*.

Zur Interpretation der modifizierten Transmissionsfunktionen werden zunächst nur alle ungestreuten Elektronen betrachtet. Diese besitzen die modifizierte Transmissionsfunktion T_0^* . Unter Verwendung von Simulationsparametern wie in Abb. 4.12 ergibt sich bei einer eingestellten Überschussenergie von 0,6 eV eine Transmissionswahrscheinlichkeit der ungestreuten Elektronen von etwa 60%. Zum Vergleich werden nun lediglich alle dreifach gestreuten Elektronen mit der modifizierten Transmissionsfunktionen T_3^* betrachtet. Bei einer Überschussenergie von erneut 0,6 eV besitzen diese Elektronen trotz identischem Grenzwinkel $\Theta_0^{\text{grenz}}(E, qU)$ eine Transmissionswahrscheinlichkeit von unter 50%. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Winkelverteilung aller ungestreuten Elektronen nicht isotrop ist: Elektronen, die bei kleineren Winkeln Θ_0 starten, besitzen gegenüber größeren Startwinkeln eine höhere Wahrscheinlichkeit P_0 ungestreut zu bleiben. Dementsprechend werden diese Elektronen im Vergleich zur isotropen Verteilung vermehrt unter kleinen Winkeln emittiert. Analoge Argumentationen lassen sich für die Betrachtung mehrfach gestreuter Elektronen finden.

Die Hypothese, dass die winkelabhängigen Streuwahrscheinlichkeiten $P_i(\Theta)$ bereits bei der Berechnung der Transmissionsfunktionen berücksichtigt werden müssen, kann durch eine Monte-Carlo-Simulation mit KASSIOPEIA¹⁷ verifiziert werden.

Zum Vergleich beider Berechnungsweisen der Antwortfunktion R bzw. R^* ist in Abb. 4.13 die relative Abweichung von R^* zu R aufgetragen. Zu erkennen ist, dass die

¹⁷Zu KASSIOPEIA siehe Abschnitt 3.3.

weitaus größten Abweichungen von über 15 % bei minimal positiven Überschussenergien vorliegen. Dies liegt daran, dass in diesem Bereich aufgrund nicht vorhandener inelastischer Streuung jeweils der erste Term $\overline{P_0} \cdot T$ bzw. $\overline{P_0} \cdot T_0^*$ aus den Gleichungen (4.13) und (4.20) dominiert, wobei die darin enthaltenen Funktionen T und T_0^* für $0 \leq (E_0 - qU) < \Delta E$ einen deutlich unterschiedlichen Verlauf besitzen. In Abb. 4.14 sind die Antwortfunktionen R und R^* für kleine Überschussenergien bis 1 eV zusammen aufgetragen, wobei hier deutlich eine absolute Abweichung zu erkennen ist. Die relative Abweichung von R^* zu R liegt für größere Überschussenergien bei weniger als 1,5 Promille (vgl. Abb. 4.13, unten).

Im aktuellen Programmpaket Source Spectrum Calculations¹⁸ (SSC) ist neben der bisherigen Antwortfunktion R nun auch R^* als Klasse implementiert.

4.2.3 Einfluss auf die Bestimmung der Neutrinomasse

Im Folgenden wird untersucht, welche Einflüsse die Berechnungsweise der Antwortfunktion auf die Bestimmung der Neutrinomasse hat. Dazu werden, wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, mindestens 1000 KATRIN-Messungen mit einer bestimmten Antwortfunktion simuliert und anschließend auf Grundlage einer veränderten Antwortfunktion analysiert. Für die simulierten Messungen wird stets die Antwortfunktion aus Gl. 4.20 verwendet und eine Neutrinomasse von $m_\nu = 0$ eV angenommen. Der Fitparameter m_ν^2 der einzelnen Analysen führt dann zu einer resultierenden systematischen Unsicherheit Δm_ν^2 . Sämtliche Ergebnisse inklusive verwendeter Parameter sind tabellarisch im Anhang A.1.1 zu finden.

Berechnungsweise aus dem KATRIN Design Report

Zunächst wird der Einfluss auf m_ν^2 durch Analyse mit der genäherten Antwortfunktion aus Gl. (4.13) untersucht. In Abb. 4.13 ist zu sehen, dass die weitaus größte Abweichung durch die genäherte Berechnungsweise bei minimalen Überschussenergien vorliegt. Das integrierte β -Spektrum wird durch diese Abweichung an jeder Stelle qU beeinflusst. Somit ist eine resultierende systematische Unsicherheit für alle Analyseintervalle zu erwarten. Es ist eine deutliche Abhängigkeit von der Größe des Analyseintervalls festzustellen: Während bei einem Analyseintervall von 10 eV mit $\Delta m_\nu^2 = (+1 \pm 1) \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$ keine aussagekräftige systematische Unsicherheit auf m_ν^2 induziert wird, ergeben sich deutliche Unsicherheiten bei Vergrößerung des Analyseintervalls. Bei dem größten betrachteten Analyseintervall von 40 eV bewirkt die genäherte Antwortfunktion eine systematische Unsicherheit von $\Delta m_\nu^2 = (+11,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$, was bereits in der Größenordnung der entsprechenden statistischen Unsicherheit von $\sigma_{\text{stat}} = (0,149 \pm 0,0003) (\text{eV})^2$ liegt. Die große Abhängigkeit zwischen Δm_ν^2 und dem Analyseintervall rührt offenbar daher, dass es sich, wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, um vier unterschiedlich stark korrelierte Fitparameter handelt. Auffällig bei den zuletzt genannten Analyseintervallen ist, dass der Fitparameter der Amplitude im Fall des 10 eV-Analyseintervalls einen Wert von $1,00007 \pm 0,00007$ aufweist und im Fall des 40 eV-Analyseintervalls einen Wert von $0,9994887 \pm 0,000008$, also deutlich kleiner. Eine Vorhersage des Fitverhaltens erscheint hier äußerst schwierig. Weiterführende Untersuchungen in diese Richtung

¹⁸Zu SSC siehe Abschnitt 3.2.

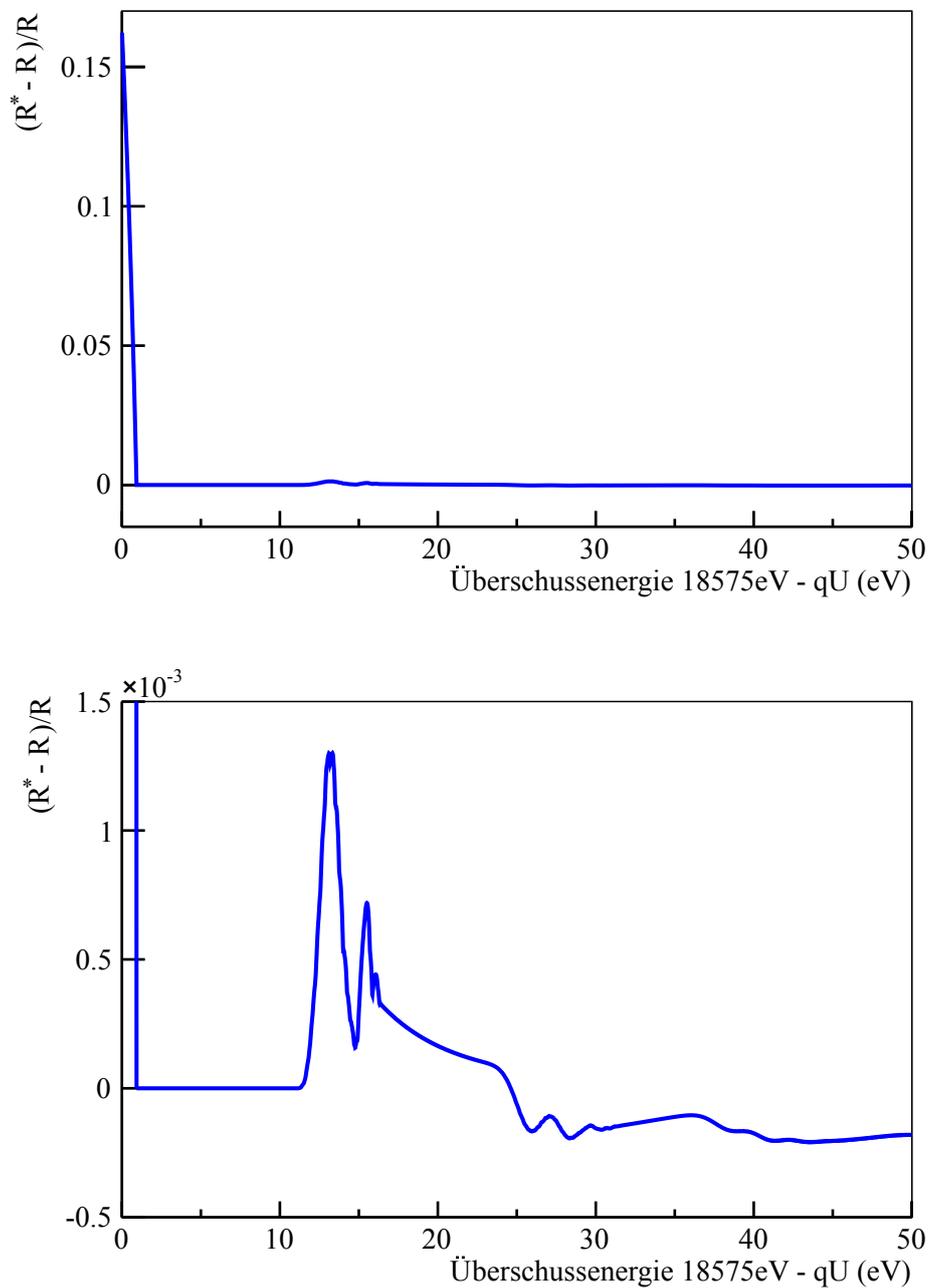


Abbildung 4.13: Relative Abweichung der Antwortfunktion R^* zur Antwortfunktion R für Überschussenergien zwischen Null und 50 eV. Die untere Kurve zeigt einen vertikal vergrößerten Ausschnitt der oberen. Man beachte dazu die Skala der Ordinate. Es wurden KATRIN-Standardparameter und eine in zehn *Slices* segmentierte WGTS verwendet.

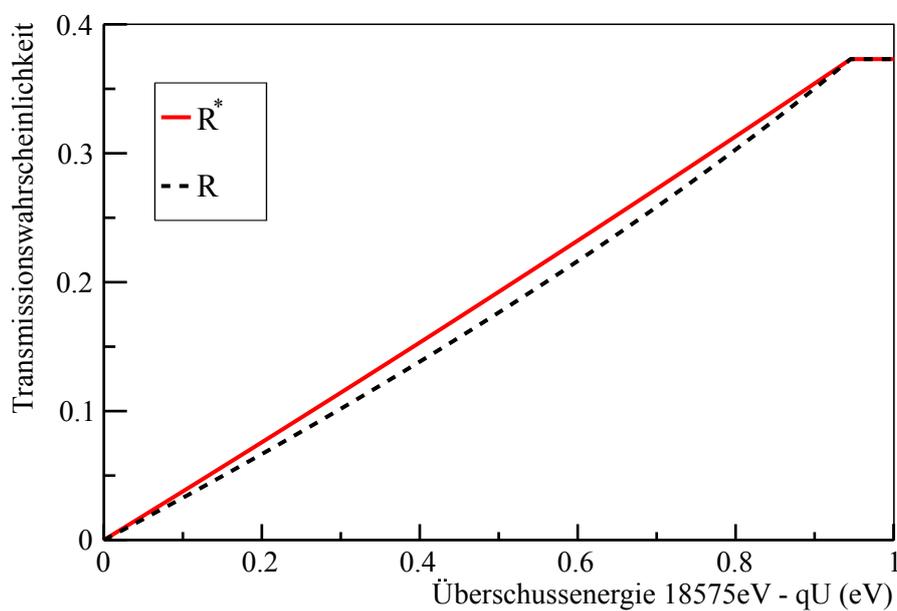


Abbildung 4.14: Die Antwortfunktion $R^*(E_0, qU)$ im Vergleich zur genäherten Antwortfunktion $R(E_0, qU)$ aus Abschnitt 4.2.1. Aufgetragen sind beide Funktionen für eine Überschussenergie bis 1 eV, sodass lediglich der erste Anstieg zu sehen ist. Hier gilt $R^*(E_0 = \text{const}, qU) \geq R(E_0 = \text{const}, qU)$. In bisherigen Berechnungen wurde $R(E_0, qU)$ verwendet [5].

sind zu empfehlen. In jedem Fall sollte unabhängig vom Analyseintervall die Berechnung der Antwortfunktion nach Gl. (4.20) angewendet werden, da auch beim 10 eV-Analyseintervall ein größerer Wert für Δm_ν^2 unter leicht veränderten Simulationsparametern denkbar erscheint.

Nicht-relativistische Berechnungsweise

Der Einfluss auf m_ν^2 durch eine Analyse mit der Antwortfunktion nach Gl. (4.20), jedoch ohne relativistische Korrektur, weist im Gegensatz zum bisher betrachteten Effekt kaum eine Abhängigkeit vom Analyseintervall auf: Bei einem Analyseintervall von 10 eV ergibt sich $\Delta m_\nu^2 = (-7 \pm 1) \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$, was sich im Rahmen von weniger als einer Standardabweichung mit den Werten für die restlichen Analyseintervalle deckt. Zu beachten ist, dass Δm_ν^2 im Gegensatz zum oben genannten Fall ein negatives Vorzeichen besitzt. Vorsicht ist daher geboten bei simultaner Betrachtung beider Effekte, da sich die Auswirkungen auf m_ν^2 zwar teilweise aufheben können, jedoch nicht immer in gleichem Maße. So ist dies stark vom Analyseintervall abhängig, wie aus Tab. A.3 im Anhang A.1.1 hervorgeht. Doch selbst bei gleichem Analyseintervall sind mit anderen Simulationsparametern, wie beispielsweise einer anderen Energieverlustfunktion oder einer geänderten Säulendichte, deutlich unterschiedliche Werte für Δm_ν^2 denkbar.

Bei einzelner Betrachtung der diskutierten Näherungen der Antwortfunktion wird deutlich, dass zur Analyse der KATRIN-Hauptmessungen die Berechnungsweise aus Gl. 4.20 verwendet werden muss. Für ein Analyseintervall von 30 eV übersteigt der Wert für Δm_ν^2 in beiden Fällen bereits die systematische Unsicherheit von $\pm 6 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$, welche in [5] als Obergrenze für die Bestimmung der Antwortfunktion angegeben ist.

5. Simulierte Messung einer Antwortfunktion

Dieses Kapitel dient zur Vorbereitung auf die im nächsten Kapitel vorgestellte Methode zur Bestimmung der Energieverlustfunktion, welche auf eine spezielle Antwortfunktion zurückgreift. Diese Antwortfunktion weicht von den im letzten Kapitel vorgestellten ab und wird unter Verwendung einer Elektronenkanone vor Beginn der KATRIN-Hauptmessungen zu bestimmen sein. Die Elektronenkanone ist Teil des Kalibrations- und Monitoring-Systems aus Abb. 2.2. In Abschnitt 5.1 sind die wesentlichen Eigenschaften und Aufgaben der Elektronenkanone zusammengefasst. Dabei werden jene Eigenschaften fokussiert, welche für die vorliegende Arbeit relevant sind. Im Anschluss wird in Abschnitt 5.2 beschrieben, wie mithilfe des Programmpakets KASSIOPEIA die Messung einer Antwortfunktion für die Elektronenkanone durch Teilcentracking simuliert wird. Zusätzlich werden die Streuwahrscheinlichkeiten ermittelt und mit numerischer Berechnung verglichen.

5.1 Elektronenkanone

Eine detaillierte und aktuelle Beschreibung der oben genannten Elektronenkanone inklusive angestrebter Spezifikationen und möglicher Anwendungsbereiche ist in [53] zu finden.

Funktionsweise und Spezifikationen

Die Elektronenkanone wird im Rahmen der KATRIN-Kollaboration entwickelt und basiert physikalisch auf dem **photoelektrischen Effekt**, welcher das Austreten einzelner Elektronen aus dem gebundenen Zustand in einem Feststoff ermöglicht, sobald die Energie auftreffender Photonen die nötige Austrittsarbeit für die Elektronen übersteigt. Zur Bereitstellung der erforderlichen Photonen dient eine UV-Lichtquelle. Bei dem Feststoff, aus welchem Elektronen ausgelöst werden, handelt es sich aufgrund seiner geeigneten Austrittsarbeit um Gold. Die ausgelösten Elektronen

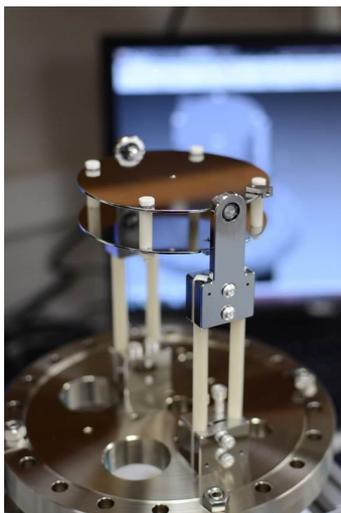


Abbildung 5.1: Die Elektronenquelle der Elektronenkanone inklusive Lochblende. Aus [54]. Zur Einstellung verschiedener Startwinkel kann die Quelle durch Schrittmotoren an den Halterungen geneigt werden.

werden elektrostatisch auf eine gewünschte kinetische Energie¹ von etwa 18,6 keV beschleunigt und durch ein magnetisches Feld in die WGTS geführt. Da für die Messung der Antwortfunktion nach Abschnitt 6.3.2 Emissionsraten $\gtrsim 10^4 \text{ e}^- \text{ s}^{-1}$ erforderlich sind und dazu die Photonenenergie deutlich größer als die Austrittsarbeit gewählt werden muss, ist keine monochromatische Emission möglich. Es ergeben sich infolge dessen Standardabweichungen $s_E < 0,2 \text{ eV}$ für die resultierende **Energieverteilung** der Elektronen. Weiterhin ist die Elektronenkanone **winkelselektiv**, sodass basierend auf einem Schrittmotor durch Neigung der Elektronenquelle unterschiedliche Startwinkel² Θ_0 der Elektronen eingestellt werden können (siehe Abb. 5.1). Analog zur Energie kann auch für den Startwinkel lediglich ein Erwartungswert eingestellt werden, wobei hier die zugrundeliegende Winkelverteilung bei kleinen eingestellten Startwinkeln schmaler wird. Für die in dieser Arbeit diskutierten Methoden ist lediglich eine Einstellung von $\Theta_0 = 0^\circ$ erforderlich, sodass die resultierende Standardabweichung s_Θ der Winkelverteilung in der WGTS $< 1^\circ$ und nach ersten Simulationen annähernd gaußverteilt ist (siehe [53]).

Anwendungsgebiete

Anwendungsgebiete der Elektronenkanone des Kalibrations- und Monitoring-Systems sind neben der Bestimmung der Energieverlustfunktion (siehe dazu Kap. 6) beispielsweise die Überwachung der Säulendichte³ während der KATRIN-Hauptmessungen oder Messungen von Transmissionsfunktionen bei leerer Tritiumquelle.

¹Eine kinetische Energie der Elektronen knapp oberhalb des Endpunktes des Tritiumspektrums ist bei Messungen mit der Elektronenkanone im Falle einer gefüllten Tritiumquelle sinnvoll, da andernfalls lediglich eine Kombination von Elektronen der Elektronenkanone und aus Tritiumzerfällen gemessen werden kann.

²Als Winkel der Elektronen sind die Polarwinkel gemeint, welche durch Elektronenimpuls und Magnetfeld eingeschlossen werden.

³Der Wert Säulendichte muss nicht direkt bestimmt werden. Die Kenntnis des Produkts aus Säulendichte und inelastischem Wirkungsquerschnitt reicht aus. Siehe dazu Abschnitt 6.1.3.

Zusätzlich können bei hohen Emissionsraten $> 10^6 \text{ e}^- \text{ s}^{-1}$ *Elektronenfallen* identifiziert und untersucht werden, welche zu einer unerwünschten Speicherung vieler Elektronen führen.

5.2 Simulation mit Teilchentracking

Da sich die oben genannte Elektronenkanone sowie die WGTS noch im Aufbau befinden, wird eine Messung der Antwortfunktion simuliert. Dazu werden mit dem Programmpaket KASSIOPEIA für die Werte 0,1 eV und 0,2 eV der Standardabweichung s_E jeweils etwa 100 Millionen Elektronen durch die WGTS getrackt. Die gewählte Startenergie entspricht mit 18575 eV ungefähr der Endpunktsenergie des Tritiumspektrums. Um die Simulationsdauer zu verringern, wird eine adiabatische Berechnungsweise nach Gl. (2.5) verwendet. Berücksichtigt werden der Verlauf des Magnetfeldes der WGTS (vgl. Abb. 4.6) und ein eindimensionales Dichteprofil (siehe [55]) des Tritiumgases. Auf Grundlage der energieabhängigen elastischen und inelastischen Wirkungsquerschnitte finden Streuprozesse mit entsprechenden Energieverlusten und Winkeländerungen statt. Die **Startposition** aller Elektronen wird fix gewählt und liegt von der DPS1-R kommend mittig am Ende des Strahlrohres der Tritiumquelle. Die Startwinkel werden gemäß einer Gaußverteilung gewürfelt, wobei deren Standardabweichung $< 1^\circ$ ist, sodass sich erst bei maximaler Magnetfeldstärke in der WGTS eine Standardabweichung $\approx 1^\circ$ ergibt. Jedes Elektron wird so lange getrackt, bis es entweder das andere Ende des Strahlrohres der WGTS erreicht oder zuvor infolge von Streuprozessen reflektiert wird. Informationen, wie beispielsweise die Endposition des Elektrons, seine kinetische Energie und sein Winkel an dieser Endposition oder die Anzahl ereigneter Streuungen inklusive einzelner Energieverluste und Winkeländerungen, werden gespeichert.

Bestimmung der Antwortfunktion aus den Trackingergebnissen

Zur Bestimmung der Antwortfunktion werden zunächst jene Elektronen selektiert, welche bei ihrer Endposition einen Winkel besitzen, der entsprechend der dortigen Magnetfeldstärke klein genug ist, um nicht durch den Pinchmagneten vor Erreichen des Detektors reflektiert zu werden (vgl. *Maximalwinkel* aus Gl. (2.6)). Elektronen, welche bereits innerhalb der WGTS reflektiert werden, sind ebenfalls von der Selektion ausgeschlossen. Der Anteil der selektierten Elektronen beträgt in beiden Simulationen etwa 99,974 %. Für diese Elektronen wird anhand ihrer kinetischen Energie, ihres Winkels und der Magnetfeldstärke an ihrer jeweiligen Endposition ermittelt, wie viele der Elektronen bei einzelnen Retardierungsenergien qU transmittiert werden. Dazu wird Gl. (4.1) angewendet, sodass die Elektronen nicht weiter getrackt werden müssen. Mögliche Streuprozesse außerhalb der WGTS bleiben damit unberücksichtigt. Wie in Abschnitt 3.1 angeregt, werden die Werte für qU in 50 meV-Schritten variiert. Nach Normierung der einzelnen Anzahlen transmittierter Elektronen auf die Anzahl aller gestarteten Elektronen ergibt sich für $s_E = 0,1 \text{ eV}$ und $s_E = 0,2 \text{ eV}$ jeweils eine Antwortfunktion. Die Antwortfunktion für $s_E = 0,1 \text{ eV}$ ist im oberen Diagramm der Abb. 6.8 für Überschussenergien bis 50 eV zu sehen.

Resultierende Streuwahrscheinlichkeiten

Da während des Teilchentrackings alle Informationen über die Streuprozesse gespeichert werden, können daraus Streuwahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Zur

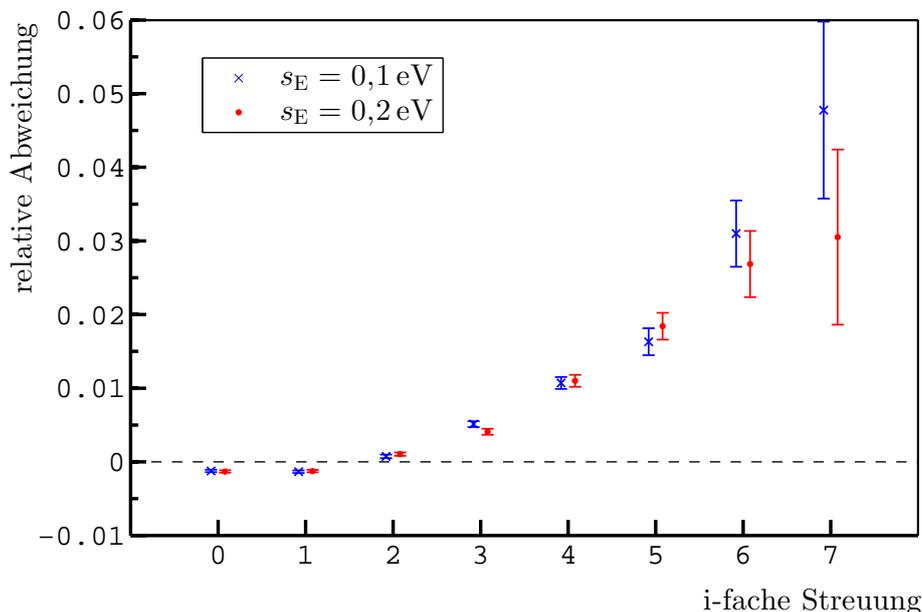


Abbildung 5.2: Relative Abweichung der Streuwahrscheinlichkeiten beim Teilchentracking gegenüber numerischer Berechnung. Die Ergebnisse der beiden Simulationen sind im Rahmen ihrer Unsicherheiten miteinander vereinbar. Tendenziell finden aufgrund der Winkeländerungen beim Teilchentracking in gesteigertem Maße Mehrfachstreuungen statt.

Extraktion der Energieverlustfunktion im nachfolgenden Kapitel sind die Streuwahrscheinlichkeiten für **inelastische Streuungen** von Interesse. Ein Vergleich der ermittelten inelastischen Streuwahrscheinlichkeiten mit numerischer Berechnung⁴ ist in Abb. 5.2 dargestellt.

Unterschiede zur numerischen Berechnung der Streuwahrscheinlichkeiten

Den wesentlichen Unterschied zur numerischen Berechnung stellen die Winkeländerungen infolge von Streuprozessen dar. Diese Winkeländerungen werden lediglich beim Teilchentracking berücksichtigt. Zur Veranschaulichung der Auswirkung von Winkeländerungen sei eine WGTS mit konstantem Dichteprofil angenommen, welche longitudinal in viele Slices gleicher Größe unterteilt ist (vgl. Abb. 3.2). Mit dem Startwinkel eines Elektrons und der Säulendichte im ersten Slice kann dem Elektron für diesen Slice eine Streuwahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Solange das Elektron nicht gestreut wird, bleibt diese Wahrscheinlichkeit für alle folgenden Slices gleich. Sobald jedoch eine Streuung stattfindet, verändert sich aufgrund der Winkeländerung auch die Streuwahrscheinlichkeit für die folgenden Slices. Winkeländerungen gehen sowohl mit elastischen als auch inelastischen Streuprozessen einher. Da die Elektronen bei sehr kleinem Winkel starten, vergrößert sich in den meisten

⁴Numerisch werden die Streuwahrscheinlichkeiten nach Gl. (6.4) berechnet.

Fällen ihr Winkel nach der ersten Streuung, sodass beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, überhaupt nicht inelastisch zu streuen, beim Teilchentracking um etwa 1 Promille kleiner ist als bei der numerischen Berechnung.

Ein weiterer Unterschied des Teilchentrackings im Hinblick auf die Streuwahrscheinlichkeiten ergibt sich beispielsweise aus der Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte in Kombination mit Energieverlusten durch Streuung und Synchrotronabstrahlung.

Im folgenden Kapitel werden die Streuwahrscheinlichkeiten numerisch berechnet, da die relativen Unterschiede der ersten vier Streuwahrscheinlichkeiten gegenüber denjenigen aus dem Teilchentracking im Promillebereich liegen.

Die Ergebnisse aus dem Teilchentracking sind im Anhang A.2 zu finden.

6. Extraktion der Energieverlustfunktion

Im vorliegenden Kapitel wird eine Methode zur experimentellen Bestimmung der Energieverlustfunktion aus Abschnitt 3.1 vorgestellt. Diese Methode wird im Folgenden *Extraktion* genannt, um eine Verwechslung mit der alternativen Methode *Entfaltung der Energieverlustfunktion*¹, wie sie in [6, 7] beschrieben wird, auszuschließen. Die Extraktionsmethode erfordert die Messung der Antwortfunktion für die Elektronenkanone, welche wie im vorangegangenen Kapitel mittels Teilchentracking simuliert werden kann. Im Gegensatz zur Methode aus [6, 7] wird bei der Extraktion lediglich die Messung der Antwortfunktion bei **einer** festen effektiven Säulendichte benötigt.

Da die Elektronenkanone für bestimmte Einstellungen ihrer Parameter eine charakteristische Winkel- und Energieauflösung aufweist, welche nicht mit der isotropen Emission und dem Energiespektrum der Elektronen durch Tritiumzerfälle vergleichbar ist, hat auch die Antwortfunktion für die Elektronenkanone eine für jene Einstellungen charakteristische Form. Diesem Umstand widmet sich Abschnitt 6.1, in welchem zunächst die Antwortfunktion für die Elektronenkanone aufbauend auf Kap. 4.2 hergeleitet wird. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden mögliche mathematische Näherungen der Antwortfunktion und deren Auswirkungen auf die Neutrinomassenbestimmung diskutiert. Zuletzt wird im Unterabschnitt 6.1.3 begründet, wie und warum die Wahrscheinlichkeit P_0^{inel} eines Elektrons, nicht inelastisch gestreut zu werden, bei einer Messung mit der Elektronenkanone bestimmt werden muss. In Abschnitt 6.2 wird unter Verwendung der beschriebenen Näherungen die Extraktionsmethode vorgestellt, welche zunächst nur die inelastische Energieverlustfunktion liefert. In Abschnitt 6.3 wird begründet, weshalb zur Messung der Antwortfunktion mit $\rho d \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ eine kleinere Säulendichte als für die KATRIN-Hauptmessungen sinnvoll ist. Eine Vergrößerung der Messdauer für jeweils eine eingestellte Gegenspannung U liefert lediglich in beschränktem Ma-

¹Hier werden mehrere Messungen der Antwortfunktion benötigt, aus welchen über ein lineares Gleichungssystem und eine mathematische Entfaltung die Energieverlustfunktion bestimmt wird.

ße eine Verbesserung der resultierenden statistischen Unsicherheiten, was im zweiten Teil dieses Abschnitts untersucht wird. Anschließend befasst sich Abschnitt 6.4 mit einer optionalen nachträglichen Berücksichtigung elastischer Streuung, welche bei der Extraktion selbst vernachlässigt wurde. Das Kapitel schließt mit Abschnitt 6.5, in welchem die Ergebnisse im Hinblick auf die Bestimmung der Neutrinomasse vorgestellt und diskutiert werden. Zusätzlich werden in diesem Abschnitt Optimierungsvorschläge vorgestellt und die wesentlichen Unterschiede der Extraktion zur Entfaltung der Energieverlustfunktion herausgearbeitet.

6.1 Vorüberlegungen

Zur Extraktion der Energieverlustfunktion wird eine Messung mit der Elektronenkanone des Kalibrations- und Monitoring-Systems² erforderlich sein. Da sich die Berechnung der Antwortfunktion nach Gl. (4.20) auf eine isotrope Elektronenemission bezieht, ist im Rahmen von Simulationen der Elektronenkanone eine Anpassung der Antwortfunktion erforderlich. Zu empfehlen ist eine Winkeleinstellung der Elektronenkanone von 0° , sodass eine möglichst schmale Verteilung des Startwinkels Θ_0 erreicht werden kann. Wie bereits in Kap. 5 wird auch bei den folgenden Berechnungen von einer um 0° normalverteilten Elektronenemission mit einer Standardabweichung von $s_\Theta = 1^\circ$ ausgegangen³. Die Verteilung der Startenergie E_0 wird gemäß Kap. 5 ebenfalls als gaußförmig angenommen mit zwei exemplarischen Werten der Standardabweichung von $s_E = 0,1 \text{ eV}$ bzw. $s_E = 0,2 \text{ eV}$.

In Abschnitt 6.1.1 wird zunächst die Antwortfunktion der Elektronenkanone für eine fixe kinetische Startenergie hergeleitet und anschließend durch Vernachlässigung der Winkelverteilung genähert. Abschnitt 6.1.2 widmet sich der Auswirkungen durch die Verteilung der Startenergie um E_0 trotz fester Einstellung der Elektronenkanone und schließt mit dem Ergebnis, dass diese Energieverteilung zwar eine Auswirkung auf die in Abschnitt 6.2 extrahierte Energieverlustfunktion hat, jedoch mit akzeptablen Folgen für die Bestimmung der Neutrinomasse. Für die Extraktion ist die Bestimmung des Produkts $\sigma_{\text{inel}} \cdot \rho d$ erforderlich, womit die inelastischen Streuwahrscheinlichkeiten P_i^{inel} errechnet werden können. Diese Bestimmung kann mit der in Abschnitt 6.1.3 vorgestellten Methode erfolgen.

6.1.1 Vernachlässigung der Winkelverteilung

Im Folgenden wird die Antwortfunktion für die Elektronenkanone mit den oben genannten Parametern bestimmt. Dabei bleibt zunächst die Energieverteilung der Elektronen unberücksichtigt, sodass die auf E_0 eingestellte Elektronenkanone ausnahmslos Elektronen mit fester Startenergie E_0 liefert. Eine zusätzliche Berücksichtigung der Energieverteilung findet im anschließenden Abschnitt statt.

²Zur Position des Kalibrations- und Monitoring-Syst. im KATRIN-Experiment siehe Abb. 2.2.

³Bei einer von 0° abweichenden Einstellung müsste die Berechnung der Antwortfunktion in Abschnitt 6.1.1 entsprechend angepasst werden.

Winkelverteilung der Elektronen

Der Winkel Θ bezüglich des Magnetfeldes ist als Polarwinkel stets positiv, weshalb sich als Verteilung $\omega(\Theta)$ eine halbseitig gaußförmige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$\omega(\Theta) = \sqrt{\frac{2}{s_\Theta^2 \cdot \pi}} \exp\left(-\frac{\Theta^2}{2s_\Theta^2}\right) \quad \text{mit } \Theta \geq 0 \quad (6.1)$$

ergibt. Diese Verteilung ist gemäß Gl. (4.4) auf eins normiert⁴ und enthält daher einen zusätzlichen Faktor 2 im Normierungskoeffizienten der klassischen Normalverteilung. Die Standardabweichung sei $s_\Theta = \frac{\pi}{180} \hat{=} 1^\circ$.

Antwortfunktion der Elektronenkanone

Zur allgemeinen Vorgehensweise bei der Herleitung von Transmissions- und Antwortfunktionen sei auf Kap. 4 verwiesen. Im aktuellen Abschnitt werden lediglich die erforderlichen Änderungen gegenüber den Gleichungen (4.19), (4.20) und (4.21) beschrieben und diskutiert.

Bei einer auf die Elektronenkanone ausgelegten Antwortfunktion fließt die Winkelverteilung der Elektronen an zwei Stellen in die Berechnungsformel mit ein:

1. Eine eingestellte Überschussenergie ($E_0 - qU$) liefert einen bestimmten Grenzwinkel $\Theta_0^{\text{grenz}} \leq \Theta_0^{\text{max}}$, bis zu welchem eine Transmission des jeweiligen Elektrons sicher stattfindet⁵. Wie wahrscheinlich es jedoch für das Elektron ist, einen entsprechenden Startwinkel zu besitzen, hängt von der zugehörigen Winkelverteilung ab. Die modifizierten Transmissionsfunktionen T_i^* beziehen sich auf eine isotrope Elektronenemission und müssen deshalb angepasst werden.
2. Da die Streuwahrscheinlichkeiten P_i von Θ_0 abhängen⁶, muss auch hier eine Mittelung der P_i stattfinden, sodass alle möglichen Startwinkel gemäß der Winkelverteilung berücksichtigt werden. Die bisherigen mittleren Streuwahrscheinlichkeiten \bar{P}_i berücksichtigen eine isotrope Winkelverteilung und können in dieser Form nicht verwendet werden.

Die Antwortfunktion R^{egun} der Elektronenkanone berechnet sich unter Berücksichtigung der gaußförmigen Winkelverteilung analog zu R^* aus Gl. (4.20):

$$R^{\text{egun}}(E_0, qU) := \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} d\epsilon \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} T_i^{\text{egun}}(E_0 - \epsilon, qU) \cdot \bar{P}_i^{\text{egun}} f_i(\epsilon) \quad (6.2)$$

⁴Strenggenommen ist $\omega(\Theta)$ hier nicht in Bezug auf $\Theta < \Theta_0^{\text{max}}$, sondern bezüglich aller positiven Winkel auf eins normiert. Jedoch sind die minimalen Beiträge von Winkeln größer als $\Theta_0^{\text{max}} \approx 51^\circ$ in Verbindung mit einer Standardabweichung von $s_\Theta = 1^\circ$ in Computersimulationen mit üblichen Fließkomma-Datentypen unmöglich zu berücksichtigen.

⁵Zu Θ_0^{grenz} siehe Gl. (4.7).

⁶Zur Winkelabhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeiten siehe Abb. 4.11.

mit den modifizierten Transmissionsfunktionen der Elektronenkanone:

$$T_i^{\text{egun}}(E_0, qU) := \begin{cases} 0 & , (E_0 - qU) < 0 \\ \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{grenz}}(E_0, qU)} \frac{P_i(\Theta) \cdot \exp\left(-\frac{\Theta^2}{2s_\Theta^2}\right)}{\overline{P}_i^{\text{egun}} \sqrt{s_\Theta^2} \cdot \pi/2} d\Theta & , 0 \leq (E_0 - qU) < \Delta E \\ 1 & , (E_0 - qU) \geq \Delta E \end{cases} \quad (6.3)$$

und den mittleren Streuwahrscheinlichkeiten der Elektronenkanone:

$$\overline{P}_i^{\text{egun}} := \sqrt{\frac{2}{s_\Theta^2 \cdot \pi}} \int_{\Theta=0}^{\Theta_0^{\text{max}}} \exp\left(-\frac{\Theta^2}{2s_\Theta^2}\right) \cdot P_i(z^{\text{egun}}, \Theta) d\Theta. \quad (6.4)$$

Die z-Koordinate der Elektronenkanone z^{egun} ist fix und ebenso ihre radiale Position⁷. Aus diesem Grund ist gegenüber der bisherigen Simulationen keine Mittelung mehrerer Antwortfunktionen für unterschiedliche Startpositionen der Elektronen notwendig.

Einfluss der Winkelverteilung

Die Winkelverteilung (6.1) hat aufgrund ihres Maximums bei 0° im Vergleich zu einer Deltadistribution $\delta(\Theta)$ lediglich einen minimalen Einfluss auf die Antwortfunktion R^{egun} . Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass Θ_0^{grenz} bei kleinen Überschussenergien rasant ansteigt und für $(E_0 - qU) = 50 \text{ meV}$ bereits einen Wert von über 10° aufweist (siehe dazu Abb. 6.1). Da bei einer Standardabweichung von $s_\Theta = 1^\circ$ alle weiteren Elektronen mit einem Startwinkel von über 10° in sehr guter Näherung vernachlässigt werden können, ergeben die Transmissionsfunktionen T_i^{egun} bereits bei minimalen Überschussenergien eine Transmissionswahrscheinlichkeit von praktisch 100 %.

Zum Vergleich der Antwortfunktion R^{egun} mit einer Antwortfunktion R^0 , welche die Winkelverteilung der Elektronen vernachlässigt⁸, ist in Abb. 6.2 der Betrag des relativen Unterschieds beider Antwortfunktionen über der Überschussenergie aufgetragen. Auch bei einer Überschussenergie von $(E_0 - qU) = 10 \text{ meV}$ liegt die relative Abweichung bereits bei unter 0,3 Promille und nimmt für größere Überschussenergien weiter ab. Der Einfluss der Winkelverteilung auf T_0^{egun} ist in dieser Darstellung für $(E_0 - qU) > 10 \text{ meV}$ nicht mehr zu erkennen. Die verbleibende Abweichung ist auf die Mittelung der Streuwahrscheinlichkeiten bei der Berechnung von R^{egun} zurückzuführen. Bei einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma \approx 3,7 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ ergibt sich folgende relative Abweichung von $\overline{P}_0^{\text{egun}}$ zu \overline{P}_0 :

$$\frac{\overline{P}_0^{\text{egun}} - \overline{P}_0}{\overline{P}_0} \approx -2,82 \cdot 10^{-4}. \quad (6.5)$$

⁷Durch Dipolspulen der WGTS kann zwar der Elektronenstrahl auf bestimmte Magnetfeldlinien gelenkt werden (siehe [53]), jedoch ist dies im Rahmen der Extraktion der Energieverlustfunktion nicht erforderlich.

⁸Dies bedeutet $\omega(\Theta) \equiv \delta(\Theta)$.

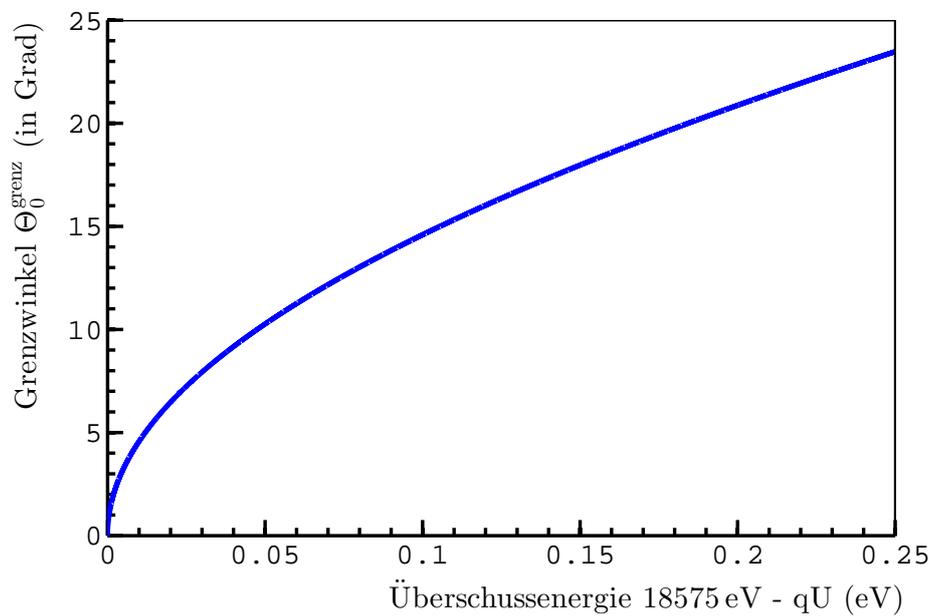


Abbildung 6.1: Der Anstieg des Grenzwinkels Θ_0^{grenz} bei geringen Überschussenergien ($E_0 - qU$). Bereits bei Überschussenergien von einigen meV steigt der Grenzwinkel um die mehrfache Standardabweichung an. Dadurch besitzen die Transmissionsfunktionen T_i^{egun} einen sehr steilen Anstieg. Verwendet wurden KATRIN-Standardparameter.

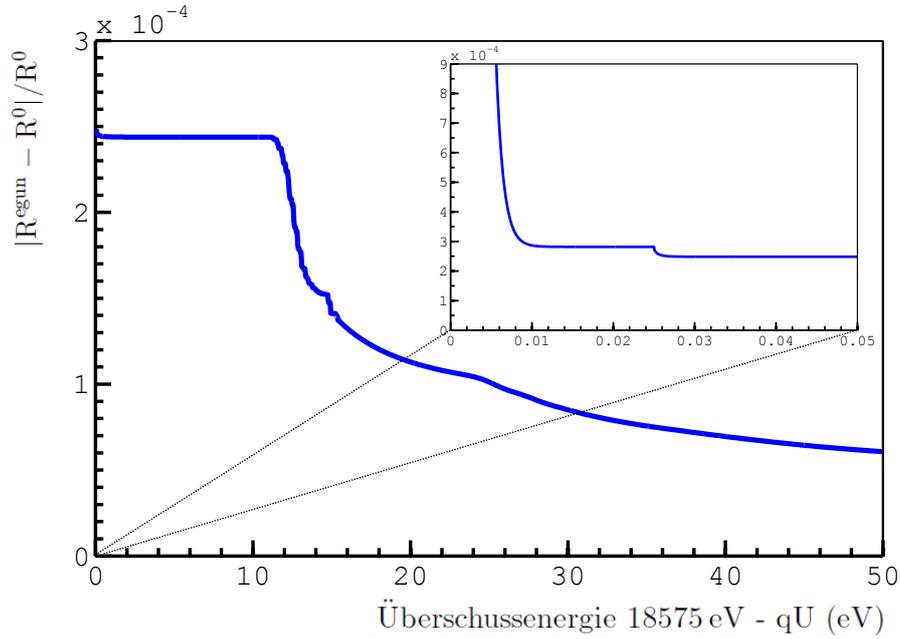


Abbildung 6.2: Der Betrag des relativen Unterschieds von R^{egun} gegenüber R^0 für Überschussenergien bis 50 eV. Bereits bei 10 meV verkleinert sich dieser Unterschied auf weniger als 0,3 Promille. Das Plateau zwischen 10 meV und 25 meV lässt sich darauf zurückführen, dass bei dieser Simulation der kleinstmögliche Energieverlust 25 meV beträgt. Bei kleineren Überschussenergien trägt lediglich $T_0^{\text{egun}} \cdot \overline{P}_0^{\text{egun}}$ zur Antwortfunktion bei. Für diese Simulation wurden KATRIN-Standardparameter und $N_{\text{streu}} = 5$ verwendet. *Achtung:* Bei der Extraktion der Energieverlustfunktion in Abschnitt 6.2 wird von einer kleineren Säulendichte als $\rho d = 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ ausgegangen, wodurch sich der hier dargestellte Verlauf geringfügig verändert.

Dies entspricht etwa der relativen Abweichung der Antwortfunktionen bei 10 meV, da in der Simulation 25 meV die geringsten Energieverluste darstellen⁹ und bei kleineren Überschussenergien entsprechend nur $T_0^{\text{egun}} \cdot \overline{P}_0^{\text{egun}}$ zur Antwortfunktion beiträgt.

Näherung der Antwortfunktion

Aufgrund des raschen Anstiegs der Transmissionsfunktionen T_i^{egun} werden diese im Folgenden durch Heaviside-Funktionen $H(E_0 - qU)$ mit einem Einheitsprung bei einer Überschussenergie von 0 eV ersetzt:

$$T_i^{\text{egun}}(E_0, qU) \approx H(E_0 - qU) = \begin{cases} 0 & , (E_0 - qU) \leq 0 \\ 1 & , (E_0 - qU) > 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Die Antwortfunktion R^{egun} aus Gl. (6.2) vereinfacht sich dadurch zusammen mit der Näherung $\overline{P}_i^{\text{egun}} \approx P_i$ zu einer Antwortfunktion R^0 , welche von Elektronen mit einem Startwinkel von exakt 0° ausgeht:

⁹Dieser minimale Energieverlust kommt durch die Einteilung der Energieverlustfunktion in einzelne 50 meV breite Intervalle zustande.

$$\begin{aligned}
R^{\text{egun}}(E_0, qU) &\approx R^0(E_0, qU) \\
&:= \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} d\epsilon \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} H(E_0 - qU - \epsilon) \cdot P_i \cdot f_i(\epsilon) \\
&= \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} f_i(\epsilon) d\epsilon. \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Diese idealisierte Antwortfunktion mit einer bis zur Überschussenergie integrierten Energieverlustfunktion $f_i(\epsilon)$ bildet die Grundlage zur in Abschnitt 6.2 vorgestellten Extraktionsmethode. Würden beispielsweise die Elektronen der Elektronenkanone isotrop emittiert werden, dann lägen die modifizierten Transmissionsfunktionen T_i^* aus Abb. 4.12 mit einer gewissen Breite ΔE vor, sodass die Faltung mit den T_i^* nicht auf eine einfache Integration wie in Gl. (6.7) reduziert werden könnte. Dies hätte wiederum zur Folge, dass zum Bestimmen der Energieverlustfunktion anstelle der Differentiation eine mathematische Entfaltung mit einhergehenden Fluktuationen unumgänglich wäre.

6.1.2 Vernachlässigung der Energieverteilung

Da die Elektronenkanone keine monochromatische Elektronenemission (siehe Abschnitt 5.1) bereitstellen kann, liefern die Antwortfunktionen $R^{\text{egun}}(E_0, qU)$ und $R^0(E_0, qU)$ aus den Gleichungen (6.2) bzw. (6.7) lediglich die Antwortfunktion der Elektronen mit entsprechender Startenergie E_0 . Bei der eigentlich zu erwartenden Antwortfunktion tragen jedoch alle möglichen Startenergien bei. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, müssen $R^{\text{egun}}(\epsilon, qU)$ bzw. $R^0(\epsilon, qU)$ mit der Verteilung $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ der Abweichungen einzelner Startenergien zur eingestellten Startenergie über ϵ gefaltet werden. Infolgedessen bezeichnet E_0 fortan die eingestellte Startenergie und nicht mehr die individuelle Startenergie eines bestimmten Elektrons. Unter Verwendung von R^0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
(R^0(\cdot, qU) \otimes S^{\text{egun}}(\cdot))(E_0, qU) &\stackrel{(4.15)}{=} \int_{-\infty}^{E_0-qU} R^0(E_0 - \xi, qU) \cdot S^{\text{egun}}(\xi) d\xi \\
&\stackrel{(6.7)}{=} \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i \int_{-\infty}^{E_0-qU} d\xi \int_{-\infty}^{E_0-qU} d\epsilon f_i(\epsilon - \xi) \cdot S^{\text{egun}}(\xi) \\
&= \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i \int_{-\infty}^{E_0-qU} (f_i \otimes S^{\text{egun}})(\epsilon) d\epsilon. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Hierbei wurden im letzten Schritt die Integrale vertauscht, sodass $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ mit der Streufunktion $f_i(\epsilon)$ gefaltet wird. In Abschnitt 6.2 erhält man durch Differentiation

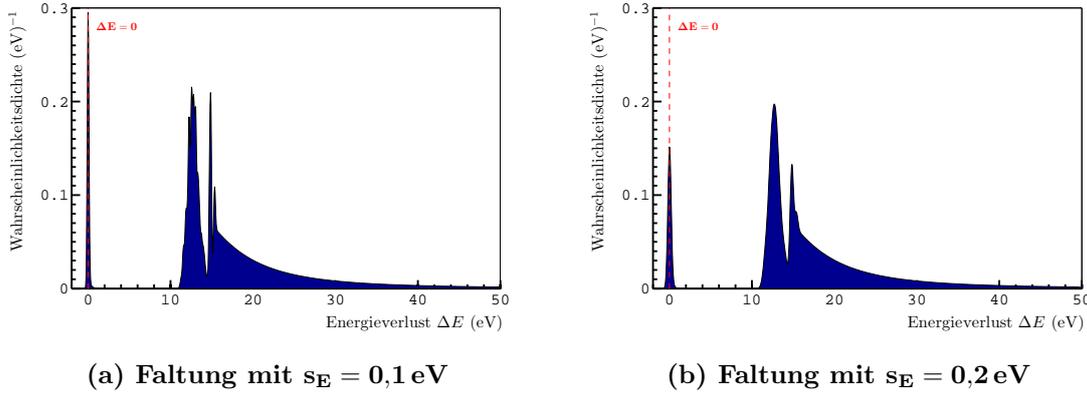


Abbildung 6.3: Faltung der Energieverlustfunktion mit der Verteilung $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ der Startenergieabweichungen zur eingestellten Startenergie E_0 . In Abb. (a) wurde eine Standardabweichung von $0,1 \text{ eV}$ und in Abb. (b) eine Standardabweichung von $0,2 \text{ eV}$ verwendet. In beiden Fällen ist bei Gebrauch dieser gefalteten Energieverlustfunktionen der Einfluss auf die Neutrinomassenbestimmung für Analyseintervalle bis 40 eV gering. Es sind mathematisch auch negative Energieverluste, d. h. Energiegewinne, möglich. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei einer an der Elektronenkanone eingestellten Energie E_0 auch Elektronen mit größeren Startenergien emittiert werden, wobei diese Energien auch nach kleinen elastischen Energieverlusten weiterhin E_0 übersteigen können. Mathematisch stellt dieser Fall demnach einen Energiegewinn trotz Streuung dar.

somit nicht die Energieverlustfunktion $f_1(\epsilon) \equiv f(\epsilon)$, sondern das Faltungsergebnis¹⁰ $(f \otimes S^{\text{egun}})(\epsilon)$.

Wie oben erwähnt, wird eine gaußförmige Energieverteilung mit den Standardabweichungen $s_E = 0,1 \text{ eV}$ bzw. $s_E = 0,2 \text{ eV}$ angenommen. Das Faltungsergebnis ist für diese Standardabweichungen in Abb. 6.3 zu sehen und kann mit der ungefalteten Energieverlustfunktion aus Abb. 3.1 verglichen werden.

Da die Energieverlustfunktion in die Antwortfunktionen des KATRIN-Experiments aus Gl. (4.20) mit einfließt, bewirken Analysen mit einer veränderten Energieverlustfunktion eine systematische Unsicherheit Δm_ν^2 auf das Neutrinomassenquadrat.

Zur Untersuchung solcher Auswirkungen durch Verwendung einer gefalteten Energieverlustfunktion werden, wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, mindestens 1000 KATRIN-Messungen mit der Energieverlustfunktion aus Abb. 3.1 simuliert. Anschließend werden diese simulierten Messungen auf Grundlage einer gefalteten Energieverlustfunktion analysiert. Dabei wird jedoch lediglich eine Faltung des inelastischen Teils der Energieverlustfunktion vorgenommen, da in Abschnitt 6.2 auch nur dieser Teil extrahiert wird.

Sämtliche Ergebnisse inklusive verwendeter Parameter sind tabellarisch im Anhang A.1.2 zu finden. In Abb. 6.4 sind die Werte Δm_ν^2 inklusive ihrer statistischen Unsicherheiten für unterschiedlich große Standardabweichungen von $0,1 \text{ eV}$, $0,2 \text{ eV}$ und

¹⁰Diese Aussage gilt nur für den inelastischen Anteil der Energieverlustfunktion im ersten Extraktionsintervall aus Abschnitt 6.2 und für die weiteren Intervalle näherungsweise, vgl. 6.2.

0,3 eV sowie für unterschiedliche Analyseintervalle von 20 eV, 30 eV und 40 eV dargestellt. Ein Analyseintervall von 10 eV wird nicht untersucht, da zu diesem Teil des integrierten β -Spektrums ebenfalls nur Energieverluste von maximal 10 eV beitragen. Die kleinsten Energieverluste durch inelastische Streuung beginnen jedoch auch im Fall der gefalteten Energieverlustfunktionen in entscheidendem Maße erst bei über 10 eV, vgl. Abb. 6.3.

Für die Werte von $s_E = 0,1$ eV und $s_E = 0,2$ eV ergeben sich nach Abb. 6.4 bei allen untersuchten Analyseintervallen im Rahmen der einfachen statistischen Standardabweichungen systematische Unsicherheiten mit $|\Delta m_\nu^2| < 1,25 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$. Für $s_E = 0,3$ eV ergäben sich bei den Analyseintervallen von 20 eV und 30 eV deutlich größere systematische Unsicherheiten mit bis zu $\Delta m_\nu^2 = +2,6 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$ innerhalb der einfachen statistischen Standardabweichung.

Während die Analyseintervalle von 20 eV und 30 eV bei dieser Untersuchung im Hinblick auf die systematischen Unsicherheiten sehr ähnliche Ergebnisse liefern, ist dies für das 40 eV-Intervall nicht der Fall. Hier ist auch für $s_E = 0,3$ eV kein Anstieg von $|\Delta m_\nu^2|$ festzustellen, und es ergeben sich gegenüber den anderen Analyseintervallen systematische Unsicherheiten mit negativem Vorzeichen. Eine Verdopplung der Anzahl der simulierten Messungen auf 2000 festigt dieses Ergebnis beim 40 eV-Intervall. Es sei deshalb darauf hingewiesen, dass aufgrund unterschiedlicher Messzeitverteilungen der einzelnen Analyseintervallen und aufgrund der Verwendung von vier unabhängigen Fitparametern kein trivialer Zusammenhang zwischen der verwendeten Energieverlustfunktion und dem Neutrinomassenquadrat besteht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei allen betrachteten Analyseintervallen in Kombination mit $s_E = 0,1$ eV und $s_E = 0,2$ eV die resultierenden systematischen Unsicherheiten auf m_ν^2 deutlich unter der systematischen Unsicherheit von $\pm 6 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$ liegen, welche in [5] als Obergrenze für die Bestimmung der Antwortfunktion angegeben ist.

Um bei sehr genau bekannter Verteilung S^{egun} mittels mathematischer Entfaltung zu einem verbesserten Ergebnis für die Energieverlustfunktion zu gelangen, müsste $f \otimes S^{\text{egun}}$ ebenfalls sehr genau bekannt sein. In Abschnitt 6.3 wird jedoch deutlich, dass gewisse Fluktuationen bei der Messung der Antwortfunktion und somit auch bei der Extraktion in Abschnitt 6.2 unumgänglich sein werden. Eine Verkleinerung der systematischen Unsicherheit auf Δm_ν^2 ist daher fraglich, kann jedoch untersucht werden.

In Abschnitt 6.2 wird zur Extraktion der Energieverlustfunktion die Faltung mit S^{egun} vernachlässigt, wodurch näherungsweise $f \otimes S^{\text{egun}}$ als Extraktionsergebnis resultiert. Da die Antwortfunktion aus Abschnitt 5.2 unter Berücksichtigung von S^{egun} per Teilchentracking simuliert wurde, ist die Auswirkung der Vernachlässigung von S^{egun} in der systematischen Gesamtunsicherheit¹¹ auf m_ν^2 , welche durch die Extraktion der Energieverlustfunktion zustande kommt, berücksichtigt.

6.1.3 Bestimmung der Streuwahrscheinlichkeiten

Um aus einer simulierten bzw. gemessenen Antwortfunktion R^{egun} die Energieverlustfunktion per Entfaltung oder Extraktion zu bestimmen, ist grundsätzlich die

¹¹Siehe dazu Abschnitt 6.5.

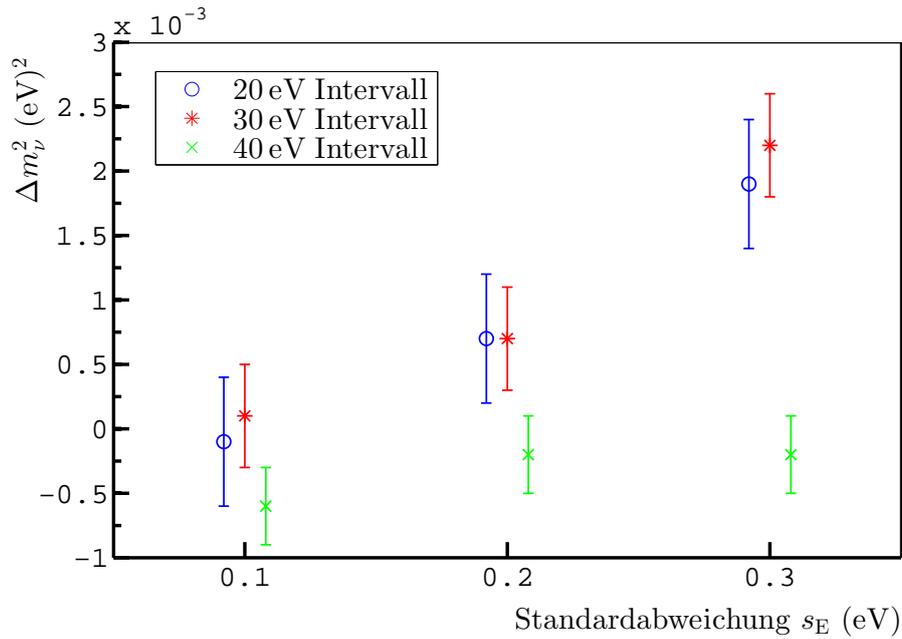


Abbildung 6.4: Systematische Unsicherheiten auf m_ν^2 bei Verwendung gefalteter Energieverlustfunktionen zur Analyse des integrierten β -Spektrums. Simuliert wurden für jede Kombination aus dargestellten Analyseintervallgrößen und Standardabweichungen s_E jeweils mindestens 1000 KATRIN-Messungen. Gefaltet wurde nur der inelastische Teil der Energieverlustfunktion mit einer Gaußkurve mit der Standardabweichung s_E . Bei den Analyseintervallen von 20 eV und 30 eV vergrößern sich die resultierenden systematischen Unsicherheiten, wenn mit breiteren Gaußkurven gefaltet wurde. Im 40 eV-Intervall scheint jedoch Δm_ν^2 weitgehend unabhängig von s_E zu sein. Für $s_E = 0,1$ eV und $s_E = 0,2$ eV sind die systematischen Unsicherheiten auf m_ν^2 deutlich kleiner als $\pm 6 \cdot 10^{-3} \text{ (eV)}^2$, was in [5] als Obergrenze für Unsicherheiten im Zusammenhang mit der Antwortfunktion angegeben ist.

Kenntnis der Streuwahrscheinlichkeiten P_i erforderlich, mit denen die unterschiedlichen Summanden aus Gl. (6.7) gewichtet werden. Gemäß Gl. (4.17) hängen alle Streuwahrscheinlichkeiten ausschließlich von dem Parameter

$$\lambda := \sigma \cdot \rho d_{\text{eff}} \quad (6.9)$$

ab. Die Säulendichte ρd_{eff} , welche im Fall der Elektronenkanone bei einer Einstellung von $\Theta_0 = 0^\circ$ näherungsweise ρd entspricht, wird zwar innerhalb von zwei Stunden auf etwa ein Promille stabil sein, jedoch ist ihre Größe weniger genau bekannt [17]. Nach einer Messung der Antwortfunktion könnte ρd bei bekanntem komplettem Wirkungsquerschnitt σ und bekannter Energieverlustfunktion $f(\epsilon)$ per Fit der simulierten Antwortfunktion bestimmt werden. Da jedoch σ nach [56] nur auf etwa 2% genau bekannt und die Energieverlustfunktion experimentell noch genauer als in [56] zu bestimmen ist, gelingt dies nicht in zufriedenstellender Weise. Allerdings genügt zur Bestimmung der Energieverlustfunktion die Kenntnis des Produkts λ . Im Folgenden wird durch getrennte Betrachtung von elastischen und inelastischen Streuprozessen deutlich, dass zwar nicht λ , jedoch λ_{inel} der inelastischen Streuung direkt bestimmt werden kann.

Getrennte Betrachtung von elastischer und inelastischer Streuung

Der komplette Wirkungsquerschnitt σ ist eine Summe des elastischen und des inelastischen Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}. \quad (6.10)$$

Ebenso kann die Energieverlustfunktion $f(\epsilon)$ als gewichtete Summe der jeweils auf eins normierten **elastischen Energieverlustfunktion** $f_{\text{el}}(\epsilon)$ und **inelastischen Energieverlustfunktion** $f_{\text{inel}}(\epsilon)$ angesehen werden:

$$f(\epsilon) = \frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma} f_{\text{el}}(\epsilon) + \frac{\sigma_{\text{inel}}}{\sigma} f_{\text{inel}}(\epsilon). \quad (6.11)$$

Wenn nun die Antwortfunktion der Elektronenkanone (siehe Gl. (6.7)) bei einer Überschussenergie von $(E_0 - qU) = 10 \text{ eV}$ ausgewertet wird, dann gehen lediglich alle Werte $f(\epsilon \leq 10 \text{ eV})$ in die Berechnung mit ein. Aus Abschnitt 3.1 geht hervor, dass inelastische Streuprozesse mit Energieverlusten von über 10 eV einhergehen¹². Somit vereinfacht sich Gl. (6.11) zu

$$f(\epsilon \leq 10 \text{ eV}) = \frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma} f_{\text{el}}(\epsilon). \quad (6.12)$$

Daher gilt für die (mehrfach-)Streifunktionen

$$f_i(\epsilon \leq 10 \text{ eV}) = \left(\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma} \right)^i (f_{\text{el}})_i(\epsilon), \quad (6.13)$$

¹²Nach [26] beträgt der kleinste Energieverlust durch inelastische Streuung mit molekularem Wasserstoff 11,18 eV. Bei $(E_0 - qU) = 10 \text{ eV}$ sind demnach keine inelastische Energieverluste zu berücksichtigen.

wobei die **elastischen Streufunktionen** $(f_{\text{el}})_i(\epsilon)$ analog zu den Streufunktionen $f_i(\epsilon)$ aus Gl. (4.14) definiert sind. Bei separater Betrachtung der elastischen Streuung müssen zudem die **elastischen Streuwahrscheinlichkeiten** P_i^{el} mit $\sigma = \sigma_{\text{el}}$ und bei ausschließlicher Betrachtung der inelastischen Streuung entsprechend die **inelastischen Streuwahrscheinlichkeiten** P_i^{inel} mit $\sigma = \sigma_{\text{inel}}$ berücksichtigt werden.

Die Auswertung der Antwortfunktion für die Elektronenkanone aus Gl. (6.7) bei $qU = E_0 - 10 \text{ eV}$ ergibt damit

$$\begin{aligned}
R^0(E_0, E_0 - 10 \text{ eV}) &= \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i \int_{\epsilon=0}^{10 \text{ eV}} \left(\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma} \right)^i \cdot (f_{\text{el}})_i(\epsilon) \, d\epsilon \\
&\stackrel{(4.17)}{=} \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} \exp(-\sigma \cdot \rho d_{\text{eff}}) \frac{(\sigma_{\text{el}} \cdot \rho d_{\text{eff}})^i}{i!} \int_{\epsilon=0}^{10 \text{ eV}} (f_{\text{el}})_i(\epsilon) \, d\epsilon \\
&\stackrel{(6.10)}{=} P_0^{\text{inel}} \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i^{\text{el}} \int_{\epsilon=0}^{10 \text{ eV}} (f_{\text{el}})_i(\epsilon) \, d\epsilon \\
&\approx P_0^{\text{inel}}. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Die letzte Näherung folgt erstens aus der schnell abfallenden Wahrscheinlichkeit P_i^{el} für elastische Mehrfachstreuung und zweitens aus der Form der elastischen Streufunktionen $(f_{\text{el}})_i(\epsilon)$ für kleine i :

1. Berücksichtigt man, wie bei allen Simulationen dieser Arbeit, die Streuwahrscheinlichkeiten bis inklusive der Fünffachstreuung, so ist, ausgehend von einer Säulendichte $\rho d = 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ und dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{el}} \approx 0,3 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ der elastischen Streuung (siehe Abschnitt 3.1), die Summe aller unberücksichtigten Streuwahrscheinlichkeiten

$$\sum_{i=6}^{+\infty} P_i^{\text{el}} = 1 - \sum_{i=0}^5 P_i^{\text{el}} < 1,2 \cdot 10^{-8}. \tag{6.15}$$

2. Aus dem unter 1. genannten Grund hängt der Wert des Ausdrucks

$$\sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i^{\text{el}} \int_{\epsilon=0}^{10 \text{ eV}} (f_{\text{el}})_i(\epsilon) \, d\epsilon \tag{6.16}$$

aus Gl. (6.14) fast ausschließlich von den elastischen Streufunktionen $(f_{\text{el}})_i(\epsilon)$ mit $i \leq 5$ ab, wobei die Integrale

$$\int_{\epsilon=0}^{10 \text{ eV}} (f_{\text{el}})_i(\epsilon) \, d\epsilon \quad \text{mit } i \leq 5 \tag{6.17}$$

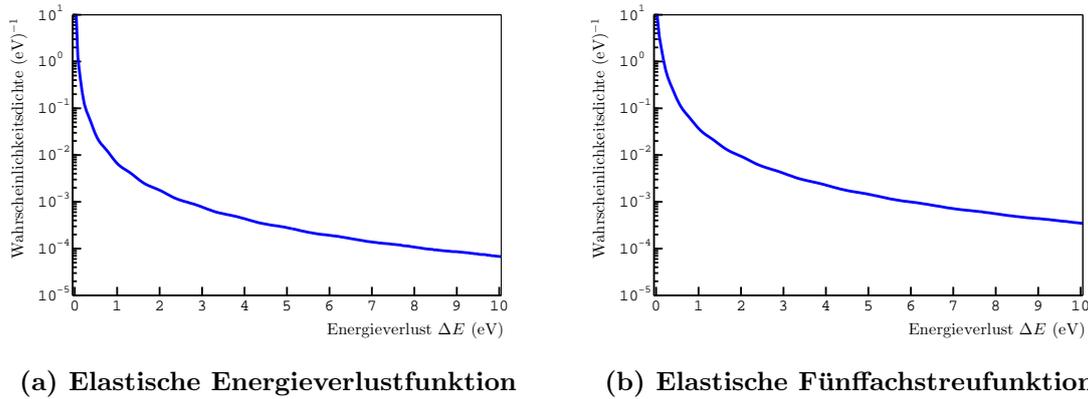


Abbildung 6.5: Die elastischen Streufunktionen $(f_{el})_1(\epsilon)$ und $(f_{el})_5(\epsilon)$ für Überschussenergien bis 10 eV logarithmisch aufgetragen. Auch bei Fünffachstreuung sind große Energieverluste von 10 eV oder mehr extrem unwahrscheinlich.

die Wahrscheinlichkeit angeben, dass eine i -fache elastische Streuung einen Energieverlust von höchstens 10 eV zur Folge hat. In Abb. 6.5 ist der steile Abfall von $(f_{el})_1(\epsilon)$ und $(f_{el})_5(\epsilon)$ für Überschussenergien bis 10 eV logarithmisch dargestellt. Auch im Fall der Fünffachstreuung, welche fast nicht mehr in die Rechnung mit eingeht, sind Energieverluste von über 10 eV nur zu knapp zwei Promille wahrscheinlich. Deshalb ergeben die Integrale aus Gl. (6.17) und damit der Ausdruck aus Gl. (6.16) nahezu eins.

Zur Berücksichtigung der Winkelverteilung hinsichtlich resultierender Mittelungen der Streuwahrscheinlichkeiten müsste in Gl. (6.14) die gesamte Antwortfunktion mit der normierten Winkelverteilung multipliziert und über Θ integriert werden. Dadurch ergäbe sich wegen Gl. (6.4) als Näherung die mittlere Wahrscheinlichkeit \bar{P}_0^{egun} (inelastisch) statt P_0^{inel} .

In Abb. 6.6 ist das Plateau von R^{egun} für Überschussenergien bis 11 eV dargestellt. Die Antwortfunktion R^{egun} berücksichtigt sowohl die Winkelverteilung der Elektronenkanone als auch die Energieverluste elastischer Streuung. Um den Einfluss der elastischen Streuung sichtbar zu machen, wurde für die Ordinate lediglich ein Intervall von 0,3 Promille gewählt. Zusätzlich sind die oben erwähnten Näherungen P_0^{inel} und \bar{P}_0^{egun} (inelastisch) aufgetragen. Diese Näherungen für R^{egun} bei 10 eV Überschussenergie vernachlässigen beide den Einfluss elastischer Streuung. Die Näherung P_0^{inel} vernachlässigt zusätzlich die Winkelverteilung der Elektronenkanone.

In Abb. 6.6 ist deutlich zu erkennen, dass die Auswirkung der Winkelverteilung bei einer Überschussenergie von 10 eV sehr viel schwerer wiegt als die Auswirkung von elastischen Streuprozessen. Relativ gesehen ist der Wert von \bar{P}_0^{egun} (inelastisch) um etwa 0,26 Promille kleiner als P_0^{inel} . Dies liegt in der gleichen Größenordnung wie der relative Unterschied von R^{egun} zu R^0 aus Abb. 6.2. Die relative Abweichung von \bar{P}_0^{egun} (inelastisch) gegenüber R^{egun} ist bei einer Überschussenergie von 10 eV kleiner als 0,1 Promille.

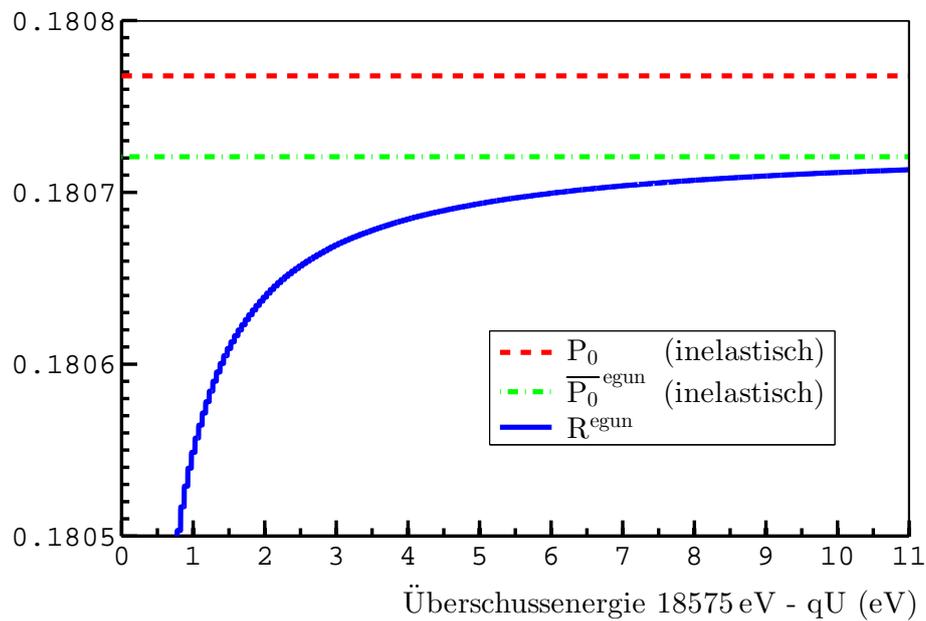


Abbildung 6.6: Das Plateau der Antwortfunktion R^{egun} für Überschussenergien bis 11 eV. Die Wahrscheinlichkeiten P_0^{inel} und $\overline{P}_0^{\text{egun}}$ (inelastisch) liegen bei Überschussenergien um 10 eV sehr dicht an R^{egun} . Man beachte dazu die Größe des Intervalls auf der Ordinate. Die Antwortfunktion R^{egun} berücksichtigt sowohl die Energieverluste durch elastische Streuung als auch die Winkelverteilung der Elektronenkanone. Die mittlere Wahrscheinlichkeit $\overline{P}_0^{\text{egun}}$ (inelastisch) vernachlässigt elastische Streuprozesse, berücksichtigt jedoch die Winkelverteilung. Die Wahrscheinlichkeit P_0^{inel} berücksichtigt weder Winkelverteilung noch Energieverluste elastischer Streuung.

In Abschnitt 6.3 wird deutlich, dass wegen der Instabilität der Säulendichte die Fluktuationen von $R^{\text{egun}}(E_0, E_0 - 10 \text{ eV})$ bei einer künftigen Messung im Bereich von etwa einem Promille liegen. Selbst eine große Anzahl detektierter Elektronen mit einer kleinen resultierenden statistischen Unsicherheit können daran nichts ändern. Somit sind P_0^{inel} und insbesondere $\overline{P}_0^{\text{egun}}$ (inelastisch) gute Näherungen für den Wert von R^{egun} bei 10 eV Überschussenergie.

Sofern berücksichtigt werden soll, dass $\overline{P}_0^{\text{egun}}$ (inelastisch) eine bessere Näherung für $R^{\text{egun}}(E_0, E_0 - 10 \text{ eV})$ darstellt als P_0^{inel} , kann unter Kenntnis der Winkelverteilung der Elektronenkanone und der Säulendichte im Rahmen der jeweiligen Unsicherheiten ein Korrekturfaktor errechnet werden, mit dem der abgelesene Wert $R^{\text{egun}}(E_0, E_0 - 10 \text{ eV})$ multipliziert wird, um zu P_0^{inel} zu gelangen¹³.

Fazit

Es wurde gezeigt, dass das Plateau der Antwortfunktion R^{egun} vor allem bei Überschussenergien um 10 eV weitgehend unabhängig von elastischer Streuung ist, sodass mithilfe der Elektronenkanone auch ohne Kenntnis der Säulendichte, des Wirkungsquerschnitts und der genauen Energieverlustfunktion der Parameter P_0^{inel} und damit

$$\lambda_{\text{inel}} := \sigma_{\text{inel}} \cdot \rho d_{\text{eff}} = -\ln(P_0^{\text{inel}}) \quad (6.18)$$

bestimmt werden kann. Mit λ_{inel} wiederum können alle Streuwahrscheinlichkeiten P_i^{inel} berechnet werden.

Auch während der Hauptmessungen des KATRIN-Experiments zur Bestimmung der Neutrinomasse sind in [5] Zwischenmessungen mit der Elektronenkanone eingeplant, um die aktuelle Säulendichte zu bestimmen. Aufgrund der ungenauen Kenntnis des inelastischen Wirkungsquerschnitts wird es jedoch nur möglich sein, das Produkt λ_{inel} per Messung zu bestimmen. Prinzipiell ist die exakte Säulendichte irrelevant zur Analyse des integrierten β -Spektrums, da ein Fitparameter bzw. Amplitudenparameter für die Signalstärke verwendet wird (siehe Abschnitt 3.4). Bei der Berechnung der Antwortfunktion für KATRIN fließt lediglich λ mit ein.

In Abschnitt 6.4 wird nach der Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion unter Annahme eines gewissen prozentualen Anteils des elastischen Wirkungsquerschnitts am gesamten Wirkungsquerschnitt von λ_{inel} auf λ geschlossen. Sofern die Rate der Elektronenkanone bekannt und stabil sein wird, reicht für die Zwischenmessungen ebenfalls die Messung bei einer Überschussenergie von 10 eV aus. Aus Abschnitt 6.3 geht hervor, dass dazu Messdauern von jeweils < 3 Minuten ausreichend wären.

Im nächsten Abschnitt wird die Kenntnis von λ_{inel} vorausgesetzt.

¹³In dieser Arbeit wurde von einem solchen Korrekturfaktor abgesehen, da Fluktuationen der Säulendichte eine erheblich größere Ungenauigkeit zur Folge haben als dieser Korrekturfaktor ausgleichen vermag. Angesichts des geringen Aufwands ist jedoch eine solche Korrektur bei künftigen Messungen zu empfehlen, da ansonsten auf lange Sicht gesehen etwa um 0,3 Promille verminderte Werte von P_0^{egun} bestimmt würden.

6.2 Sukzessive Extraktion

In diesem Abschnitt wird die Extraktionsmethode zur Bestimmung der inelastischen Energieverlustfunktion $f_{\text{inel}}(\epsilon) \equiv (f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ vorgestellt. Zur Herleitung dieser Extraktionsmethode werden die in 6.1 beschriebenen Näherungen benötigt.

Inelastische Antwortfunktion

Da, wie im letzten Abschnitt erwähnt, lediglich λ_{inel} durch eine Messung von R^{egun} bei $(E_0 - qU) = 10 \text{ eV}$ bestimmt werden kann, werden zunächst die Auswirkungen einer kompletten Vernachlässigung der elastischen Streuung untersucht. Da Winkeländerungen in der analytischen Rechnung ohnehin bereits vernachlässigt werden, beschränken sich die erforderlichen rechnerischen Änderungen auf

1. die Verwendung des inelastischen Wirkungsquerschnitts σ_{inel} anstelle des kompletten Wirkungsquerschnitts σ und
2. die Verwendung der inelastischen Streufunktionen $(f_{\text{inel}})_i(\epsilon)$ anstelle der kompletten Streufunktionen $f_i(\epsilon)$.

Werden diese Änderungen in Gl. (6.2) eingefügt, so ergibt dies die inelastische Antwortfunktion $R_{\text{inel}}^{\text{egun}}$ für die Elektronenkanone. Der Betrag des resultierenden relativen Unterschieds von $R_{\text{inel}}^{\text{egun}}$ gegenüber R^{egun} ist in Abb. 6.7 dargestellt. Die größten relativen Abweichungen befinden sich bei Überschussenergien $(E_0 - qU) < 2 \text{ eV}$ und erreichen knapp zwei Prozent. In Abschnitt 6.4 werden diese vergleichsweise großen relativen Abweichungen durch nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung teilweise kompensiert. Für Überschussenergien $(E_0 - qU) > 10 \text{ eV}$ existieren keine relativen Abweichungen, die zwei Promille übersteigen. Da die Simulation der Antwortfunktion elastische Streuung berücksichtigt (vgl. Abschnitt 5.2), zur Extraktion jedoch für Überschussenergien $> 10 \text{ eV}$ eine Vernachlässigung stattfindet, ist hierdurch ein Effekt zu erwarten, der in die resultierenden systematischen Unsicherheiten auf das Neutrinomassenquadrat mit einfließt. Siehe dazu Abschnitt 6.5.

Im Folgenden wird zusätzlich die Näherung R^0 aus Gl. (6.7) angewendet, sodass sich unter Vernachlässigung von Winkel- und Energieverteilung der Elektronenkanone und unter ausschließlicher Berücksichtigung von Energieverlusten durch inelastische Streuung die Antwortfunktion

$$R_{\text{inel}}^0(E_0, qU) := \sum_{i=0}^{N_{\text{streu}}} P_i^{\text{inel}} \int_{\epsilon=0}^{E_0 - qU} (f_{\text{inel}})_i(\epsilon) \, d\epsilon \quad (6.19)$$

ergibt.

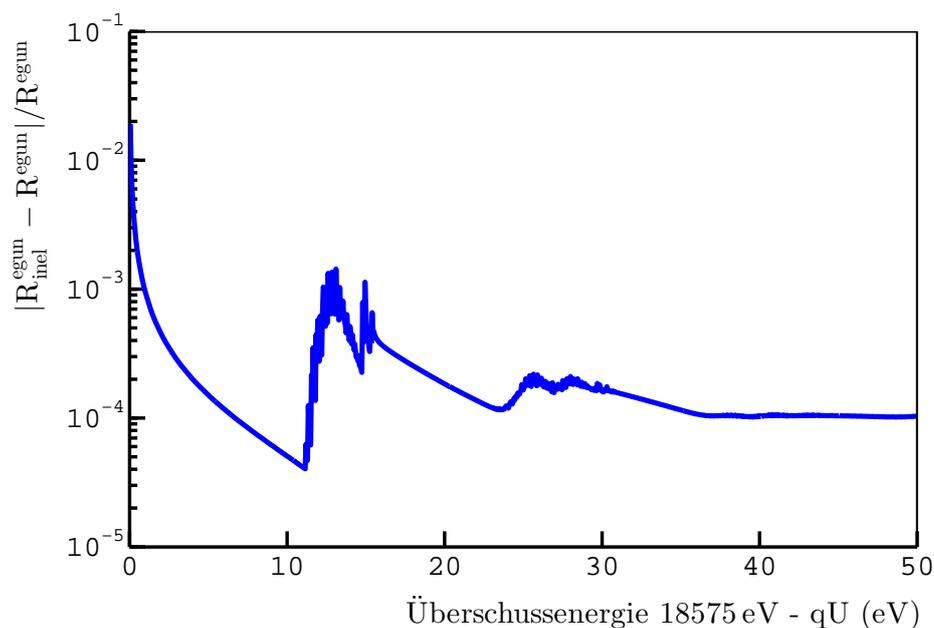


Abbildung 6.7: Relative Änderungen der Antwortfunktion für die Elektronenkanone durch Vernachlässigung elastischer Streuung. Die Abweichungen sind logarithmisch aufgetragen. Im Bereich um $(E_0 - qU) = 10$ eV ist die Abweichung minimal, sodass an dieser Stelle trotz der elastischen Streuprozesse in guter Näherung $\overline{P_0}^{\text{egun}}$ abgelesen werden kann, wie in Abschnitt 6.1.3 beschrieben. In den Bereichen, in denen die Antwortfunktion einen vergleichsweise steilen Anstieg besitzt, sind die relativen Abweichungen am größten. Dies ist insbesondere bei $(E_0 - qU) \approx 13$ eV, also kurz nach Einsetzen der inelastischen Einfachstreuung und im Bereich minimaler Überschussenergien der Fall. Bei fast allen Überschussenergien ist die relative Abweichung deutlich kleiner als 1 Promille. Zur Simulation wurde eine Säulendichte von $5 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ verwendet.

Tabelle 6.1: Die Berechnung der Antwortfunktion R_{inel}^0 für die einzelnen Intervalle. In jedem Folgeintervall muss ein zusätzlicher Streuterm berücksichtigt werden.

Intervall	Antwortfunktion R_{inel}^0
A: 0-20 eV	$P_0^{\text{inel}} + P_1^{\text{inel}} \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} (f_{\text{inel}})_1(\epsilon) d\epsilon$
B: 20-30 eV	$P_0^{\text{inel}} + P_1^{\text{inel}} \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} (f_{\text{inel}})_1(\epsilon) d\epsilon + P_2^{\text{inel}} \int_{\epsilon=0}^{E_0-qU} (f_{\text{inel}})_2(\epsilon) d\epsilon$
⋮	⋮

Unterteilung und Differentiation der Antwortfunktion

Da Energieverluste durch inelastische größer als 10 eV sind, liefert bei der Berechnung der inelastischen Antwortfunktion R_{inel}^0 die Einfachstreuung erst nach 10 eV einen Beitrag, die Zweifachstreuung erst nach 20 eV und so weiter. Die als Näherung R_{inel}^0 angenommene und per Teilchentracking simulierte Antwortfunktion aus Abschnitt 5.2 wird gemäß des oberen Diagramms aus Abb. 6.8 derart in vier Intervalle A-D unterteilt, dass im Intervall A bis auf einen linearen Term lediglich die inelastische Einfachstrefunktion $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ zu berücksichtigen ist, ab dem Intervall B zusätzlich die Zweifachstrefunktion $(f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$, ab dem Intervall C zusätzlich die Dreifachstrefunktion $(f_{\text{inel}})_3(\epsilon)$, In Tab. 6.1 ist dieser Sachverhalt mathematisch dargestellt.

Nun wird die Antwortfunktion R_{inel}^0 und damit jeder Berechnungsausdruck für die einzelnen Intervalle aus Tab. 6.1 nach der Überschussenergie $(E_0 - qU)$ abgeleitet. Da R_{inel}^0 ausschließlich von $(E_0 - qU)$ und nicht, wie beispielsweise die Antwortfunktion für das KATRIN-Experiment, separat von E_0 und qU abhängt, ergibt sich auch bei unterschiedlich eingestellten Startenergien E_0 dasselbe Ergebnis. Bei großen Abweichungen der Startenergie vom Endpunkt des Tritiumspektrums müsste allerdings beachtet werden, dass auch die Wirkungsquerschnitte energieabhängig sind und sich dadurch beispielsweise das Verhältnis von Energieverlusten durch Anregung und durch Ionisation in der inelastischen Energieverlustfunktion ändert. Die Einstellung von E_0 auf Energien über dem Endpunkt ist zu empfehlen, um eine überlagerte Detektion von Elektronen aus Tritiumzerfällen zu vermeiden. Das Ergebnis der beschriebenen Differentiation ist grafisch im unteren Diagramm aus Abb. 6.8 und mathematisch in Tab. 6.2 dargestellt.

Für das Intervall A reicht diese Differentiation bereits aus, um den Verlauf der inelastischen Streufunktion bis 20 eV zu rekonstruieren, jedoch gewichtet mit P_1^{inel} . Die Einfachstreuwahrscheinlichkeit P_1^{inel} für inelastische Streuung kann aus dem in Abschnitt 6.1.3 bestimmten λ_{inel} berechnet werden.

Der Peak im unteren Diagramm von Abb. 6.8 bei minimalen Überschussenergien entsteht nicht nur durch die bei der Simulation berücksichtigten elastischen Streu-

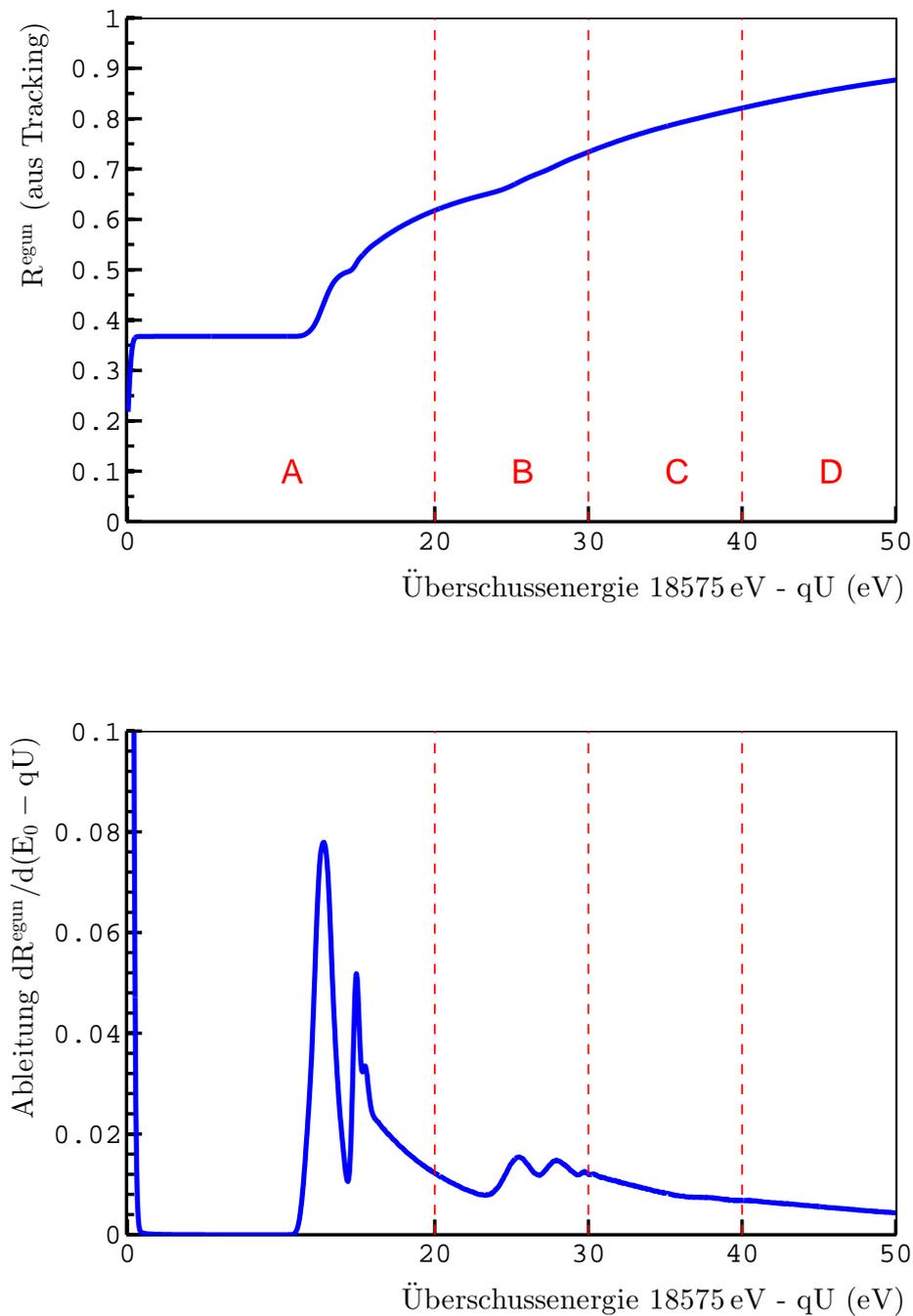


Abbildung 6.8: Unterteilung und Differentiation der per Tracking simulierten Antwortfunktion bis zu einer Überschussenergie von 50 eV. Im oberen Diagramm ist die für 100 Millionen Elektronen und $s_E = 0,2$ eV simulierte Antwortfunktion aus Abschnitt 5.2 dargestellt. Das untere Diagramm zeigt die Ableitung dieser Antwortfunktion nach der Überschussenergie ($E_0 - qU$). Die eingetragenen Intervalle markieren die Stellen, ab denen jeweils ein zusätzlicher Streuterm berücksichtigt wird. Siehe dazu Tab. 6.1 und 6.2.

Tabelle 6.2: Die Ableitung der Antwortfunktion R_{inel}^0 aus Tab. 6.1 für die einzelnen Intervalle. Durch Wegfall der Integration und des linearen Terms P_0^{inel} liegt im Intervall A bereits die inelastische Energieverlustfunktion vor, gewichtet mit P_1^{inel} . Siehe dazu das untere Diagramm aus Abb. 6.8.

Intervall	Ableitung $(R_{\text{inel}}^0)' _{\epsilon}$
A: 0-20 eV	$P_1^{\text{inel}} \cdot (f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$
B: 20-30 eV	$P_1^{\text{inel}} \cdot (f_{\text{inel}})_1(\epsilon) + P_2^{\text{inel}} \cdot (f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$
C: 30-40 eV	$P_1^{\text{inel}} \cdot (f_{\text{inel}})_1(\epsilon) + P_2^{\text{inel}} \cdot (f_{\text{inel}})_2(\epsilon) + P_3^{\text{inel}} \cdot (f_{\text{inel}})_3(\epsilon)$
⋮	⋮

prozesse, sondern hauptsächlich durch die Energieverteilung der Elektronen. Die Verteilung $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ der Abweichungen der tatsächlichen Startenergien von der eingestellten Startenergie E_0 wird in diesem Abschnitt vernachlässigt und im Folgenden als Unsicherheitsfaktor akzeptiert. Wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, müssen zur Berücksichtigung der Energieverteilung alle Streufunktionen $(f_{\text{inel}})_i(\epsilon)$ mit $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ gefaltet werden. Somit ist der erste Term von $(R_{\text{inel}}^0)'|_{\epsilon}$ nicht konstant P_0^{inel} , sondern $P_0^{\text{inel}} \cdot S^{\text{egun}}(\epsilon)$. Eine sinnvolle Extraktion der elastischen Energieverlustfunktion wäre jedoch auch bei genauer Kenntnis von $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ nicht möglich, da weiterhin elastische Mehrfachstreuung berücksichtigt werden müsste. Deshalb werden im Folgenden alle Werte der simulierten Antwortfunktion für Überschussenergien $(E_0 - qU) < 10$ eV gleich Null gesetzt¹⁴.

Sukzessive Extraktion

Wenn für jedes Intervall der jeweilige Ausdruck aus Tab. 6.2 auf $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ aufgelöst wird, wie in Tab. 6.3 geschehen, kann eine sukzessive Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion von Intervall zu Intervall erfolgen. Für die Intervalle B-D hängt $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ von den Mehrfachstrefunktionen $(f_{\text{inel}})_i(\epsilon)$ mit $i \geq 2$ ab. Diese Mehrfachstrefunktionen sind die Ergebnisse mehrfacher Faltung von $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ mit sich selbst:

$$\begin{aligned}
 (f_{\text{inel}})_2(\epsilon) &:= ((f_{\text{inel}})_1 \otimes (f_{\text{inel}})_1)(\epsilon) \\
 (f_{\text{inel}})_3(\epsilon) &:= ((f_{\text{inel}})_1 \otimes (f_{\text{inel}})_1 \otimes (f_{\text{inel}})_1)(\epsilon) \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

und erfordern daher die Kenntnis von $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$. Es reicht jedoch für jedes Intervall aus, die inelastische Energieverlustfunktion des vorherigen Intervalls zu kennen. Wie bereits erwähnt, führt beispielsweise bei inelastischer Zweifachstreuung jeder der

¹⁴Zur späteren Messung der Antwortfunktion für die Elektronenkanone ist daher im Zusammenhang mit der Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion ein Messbeginn bei 10 eV ebenfalls ausreichend.

Tabelle 6.3: Die Berechnung der inelastischen Energieverlustfunktion für die einzelnen Intervalle. Die Gleichungen aus Tab. 6.2 wurden dazu nach $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ aufgelöst.

Intervall	Energieverlustfunktion $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$
A: 0-20 eV	$\frac{1}{P_1^{\text{inel}}}(R_{\text{inel}}^0)' _{\epsilon}$
B: 20-30 eV	$\frac{1}{P_1^{\text{inel}}}(R_{\text{inel}}^0)' _{\epsilon} - \frac{P_2^{\text{inel}}}{P_1^{\text{inel}}} \cdot (f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$
C: 30-40 eV	$\frac{1}{P_1^{\text{inel}}}(R_{\text{inel}}^0)' _{\epsilon} - \frac{P_2^{\text{inel}}}{P_1^{\text{inel}}} \cdot (f_{\text{inel}})_2(\epsilon) - \frac{P_3^{\text{inel}}}{P_1^{\text{inel}}} \cdot (f_{\text{inel}})_3(\epsilon)$
⋮	⋮

beiden Streuvorgänge zu einem Energieverlust von über 10 eV, wodurch ein Gesamtenergieverlust von über 20 eV zustande kommt, der erst im Intervall B berücksichtigt werden muss. Bis zu 20 eV sei aus Intervall A die inelastische Energieverlustfunktion gemäß Tab. 6.3 bekannt. Damit kann $(f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$ für das Intervall B, also für bis zu 30 eV, berechnet werden, denn für dieses Intervall gilt: Selbst wenn bei der Zweifachstreuung eine der beiden inelastischen Streuungen einen minimalen Energieverlust von 10 eV zur Folge hätte, dann würde der zweite Energieverlust maximal 20 eV betragen und im bereits bekannten Intervall A gerade noch enthalten sein. Mit $(f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$ und $(R_{\text{inel}}^0)'|_{\epsilon}$ kann nach Tab. 6.3 nun auch die inelastische Energieverlustfunktion für das Intervall B berechnet werden. Damit ist wiederum eine Berechnung von $(f_{\text{inel}})_3(\epsilon)$ im Intervall C möglich und so weiter. Derart kann sukzessive eine Extraktion von $(f_{\text{inel}})_1(\epsilon)$ stattfinden.

Das Ergebnis der extrahierten inelastischen Energieverlustfunktion $f_{\text{inel}}(\epsilon)$ ist grafisch in Abb. 6.9 dargestellt und kann mit dem inelastischen Teil aus Abb. 6.3(b) verglichen werden. Für die schwach erkennbaren Fluktuationen des Extraktionsergebnisses ab dem Intervall B gibt es zwei Hauptgründe:

1. Die Berechnung der inelastischen Mehrfachstrefunktionen aus Gl. (6.20) führt infolge der hier vernachlässigten Energieverteilung der Elektronenkanone dazu, dass $(f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$ einmal mehr mit $S^{\text{egun}}(\epsilon)$ gefaltet wird als erforderlich, $(f_{\text{inel}})_2(\epsilon)$ bereits zweimal zu häufig und so weiter, vgl. Abschnitt 6.1.2. Es werden dadurch in Tab. 6.3 nicht die korrekten Terme von $(R_{\text{inel}}^0)'|_{\epsilon}$ subtrahiert. Dieser Effekt würde bei einer schmälere Energieverteilung weniger ins Gewicht fallen.
2. Da die zur Extraktion verwendete Antwortfunktion nur mit der endlichen Anzahl von 100 Millionen Elektronen simuliert werden konnte, können in diesem Fall die Streufunktionen als konstante Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen lediglich eine näherungsweise Beschreibung der Streuprozesse liefern. Dieser statistische Effekt würde nach Erhöhung der Elektronenanzahl weniger ins Gewicht fallen.

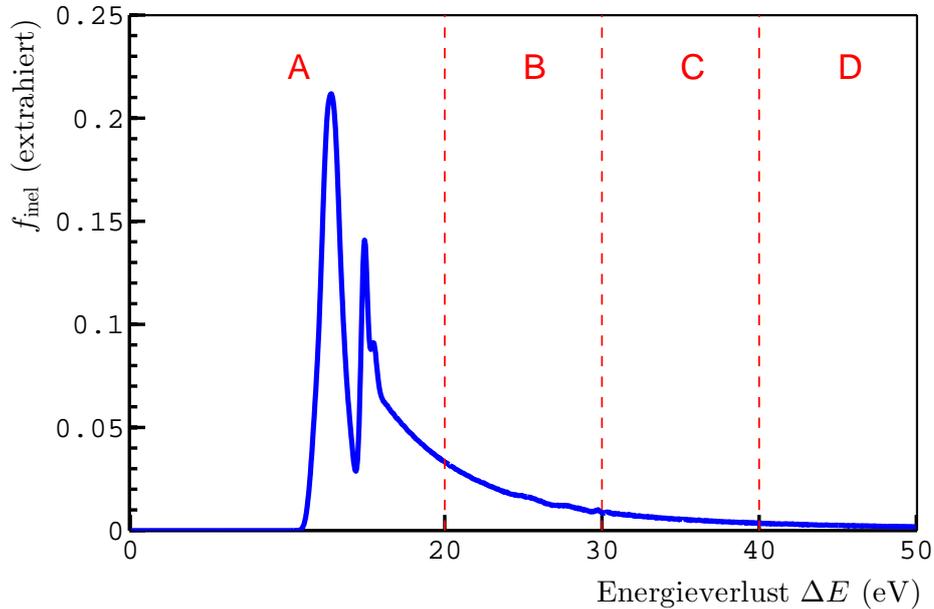


Abbildung 6.9: Extraktionsergebnis für die inelastische Energieverlustfunktion aus der Antwortfunktion von Abb. 6.8 bis zu einer Überschussenergie bzw. bis zu einem Energieverlust von 50 eV.

Der oben erwähnte statistische Effekt ist allerdings nicht gleichbedeutend mit dem statistischen Effekt bei einer künftigen Messung der Antwortfunktion für die Elektronenkanone, selbst wenn die Elektronenkanone während der Messung jedes Wertes jeweils genau 100 Millionen Elektronen emittieren würde. Der Unterschied liegt darin, dass die Simulation eine *Momentaufnahme* darstellt, sodass für alle Werte qU dieselben Elektronen als Grundlage dienen. Dadurch steigt die Antwortfunktion der Simulation monoton an, während bei einer Messung durch statistische Schwankungen lokale negative Gradienten möglich sind. Im nächsten Abschnitt wird deshalb die per Teilchenttracking simulierte Antwortfunktion als Referenz verwendet und mit künstlichen statistischen Schwankungen versehen.

6.3 Optimale Säulendichte und Messdauer

In diesem Abschnitt wird zunächst die optimale Säulendichte ρd_{opti} bestimmt, bei welcher die Messung der benötigten Antwortfunktion stattfinden sollte. Es ergibt sich als optimale Säulendichte $\rho d_{\text{opti}} = (\sigma_{\text{inel}})^{-1}$, sodass $\lambda_{\text{inel}} = 1$ folgt. Auch wenn σ_{inel} nur auf etwa 2% bekannt ist [56] und der Absolutwert der Säulendichte ebenfalls nicht sehr genau bekannt sein wird, so ist es dennoch ratsam, sich dem Wert ρd_{opti} bestmöglich anzunähern. Im zweiten Teil dieses Abschnitts wird für eine künftige Messung der Antwortfunktion mit der Elektronenkanone ermittelt, wie lange pro Einstellungswert der Gegenspannung gemessen werden muss, bis keine wesentliche Verbesserung der statistischen Unsicherheiten mehr zu erwarten ist. Diese Messzeit

hängt von der Fluktuation der Säulendichte und von der Emissionsrate der Elektronenkanone ab; eine Minute pro qU -Wert wird voraussichtlich ausreichen.

Da bei der Extraktion der elastischen Energieverlustfunktion lediglich inelastische Streuprozesse berücksichtigt werden, wird in diesem Abschnitt bei den Parametern P_0^{inel} , P_1^{inel} und λ_{inel} auf den Index „inel“ verzichtet.

6.3.1 Optimale Säulendichte

Fehlerfortpflanzung auf den Normierungsfaktor $\frac{1}{P_1}$

Der für die Extraktionsmethode benötigte Wert für P_0 kann nicht genau bestimmt werden. Neben der statistischen Unsicherheit bei einer Messung gibt es systematische Unsicherheiten wie beispielsweise in Abschnitt 6.1.3 beschrieben. Aus diesem Grund ist lediglich ein durch die Messung der Antwortfunktion R^{egun} bei $(E_0 - qU) = 10 \text{ eV}$ bestimmter Bestwert

$$\widehat{P}_0 = P_0 \cdot (1 + \delta_{P_0}) \quad (6.21)$$

mit einem relativen Fehler δ_{P_0} bekannt. Für alle Extraktionsintervalle wird der Normierungsfaktor $\frac{1}{P_1}$ benötigt, welcher die Ableitung der Antwortfunktion entsprechend gewichtet. Insbesondere im Intervall A, welches bereits den größten und wichtigsten¹⁵ Teil der inelastischen Energieverlustfunktion beinhaltet, berechnet sich das Extraktionsergebnis zu $\frac{1}{P_1} (R_{\text{inel}}^0)'|_{\epsilon}$ und hängt damit von keinem weiteren Gewichtungsfaktor ab. In allen weiteren Extraktionsintervallen wird ebenfalls $\frac{1}{P_1}$ benötigt und zusätzlich enthalten alle Korrekturterme das Extraktionsergebnis des ersten Intervalls in gefalteter Form. Aus diesen Gründen gibt es folgende Anforderung an die verwendete Säulendichte für die Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion: **Die Säulendichte ist genau dann optimal, wenn die Fehlerfortpflanzung von \widehat{P}_0 auf $1/\widehat{P}_1$ minimal wird.**

Aus P_0 können über den Parameter λ alle weiteren Streuwahrscheinlichkeiten berechnet werden. Ebenso wie Gl. (6.18) gilt für den Fall eines gemessenen Wertes \widehat{P}_0 :

$$\widehat{\lambda} = -\ln(\widehat{P}_0), \quad (6.22)$$

womit die Bestwerte \widehat{P}_i bestimmt werden können. Es folgt für den relativen Fehler δ_{1/P_1} auf $1/\widehat{P}_1$:

$$\begin{aligned} \delta_{1/P_1} &= \frac{1/\widehat{P}_1 - 1/P_1}{1/P_1} \\ &\stackrel{(4.17)}{=} P_0 \cdot \lambda \cdot \left(\widehat{P}_0 \cdot \widehat{\lambda} \right)^{-1} - 1 \\ &\stackrel{(6.21)}{=} \frac{\lambda}{(1 + \delta_{P_0}) (\lambda - \ln(1 + \delta_{P_0}))} - 1. \end{aligned} \quad (6.23)$$

¹⁵Der erste Teil der inelastischen Energieverlustfunktion ist von großer Bedeutung, da er das integrierte β -Spektrum der KATRIN-Hauptmessungen schon für kleine Überschussenergien beeinflusst.

Bei einer bestimmten Unsicherheit δ_{P_0} kann λ derart gewählt werden, dass die relative Abweichung δ_{1/P_1} Null wird:

$$\lambda_{\text{opti}} = \frac{(1 + \delta_{P_0})}{\delta_{P_0}} \ln(1 + \delta_{P_0}) . \quad (6.24)$$

Da jedoch die Unsicherheit im Fall ihrer Kenntnis keine Unsicherheit mehr wäre, muss eine Näherung für Gl. (6.24) gefunden werden, welche allgemein für $|\delta_{P_0}| \ll 1$ gilt. Nach [57] kann $\ln(1 + \delta_{P_0})$ für $|\delta_{P_0}| < 1$ durch eine Taylorentwicklung als konvergierende Potenzreihe

$$\ln(1 + \delta_{P_0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (\delta_{P_0})^{n+1} \quad (6.25)$$

geschrieben werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{opti}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + n} (\delta_{P_0})^n \\ &= 1 + \frac{1}{2} \delta_{P_0} - \frac{1}{6} (\delta_{P_0})^2 + \frac{1}{12} (\delta_{P_0})^3 - \dots \\ &\stackrel{|\delta_{P_0}| \ll 1}{\approx} 1 . \end{aligned} \quad (6.26)$$

Mit einem Wert von $\sigma_{\text{inel}} \approx 3,4 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ folgt für die optimale Säulendichte der Kehrwert des inelastischen Wirkungsquerschnitts:

$$\rho d_{\text{opti}} \stackrel{(6.18)}{=} \frac{\lambda_{\text{opti}}}{\sigma_{\text{inel}}} \approx 2,9 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2} . \quad (6.27)$$

Für $\lambda = 1$ ist in Abb. 6.10(a) δ_{1/P_1} über δ_{P_0} aufgetragen. Selbst bei einem vergleichsweise großen Wert $\delta_{P_0} = 1\%$ bewirkt die Fehlerfortpflanzung auf $1/\widehat{P_1}$ eine Unsicherheit $< 0,5$ Promille.

Gleichzeitig nimmt P_1 bei $\lambda = 1$ seinen maximalen Wert von etwa 37% an. Daher findet zu einem maximal möglichen Anteil inelastische Einfachstreuung statt, sodass die inelastische Energieverlustfunktion bestmöglich extrahiert werden kann. Zwar würden bei noch kleinerer Säulendichte bzw. bei kleineren Werten für λ die bei der Extraktion störenden Mehrfachstreuungen weiter abnehmen, jedoch ginge damit ebenfalls eine Abnahme der gewünschten Einfachstreuung einher.

Weiterhin besitzt das zu bestimmende P_0 mit $P_0 = P_1$ für $\lambda = 1$ einen größeren Wert als jenen, der beispielsweise durch Verwendung des Standardparameters $\rho d = 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^2$ vorläge. Dadurch ist die statistische Unsicherheit bei einer Bestimmung von P_0 geringer.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass bei ρd_{opti} auch weniger elastische Streuprozesse als bei $\rho d = 5 \cdot 10^{21} \text{ m}^2$ stattfinden, sodass die Näherung $R^0(E_0, E_0 - 10 \text{ eV}) \approx P_0$ aus Abschnitt 6.1.3 einen kleineren relativen Fehler induziert als dort angegeben.

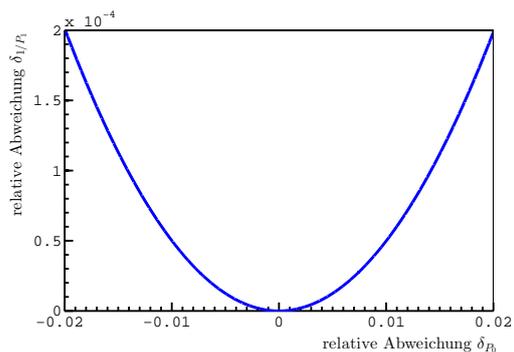
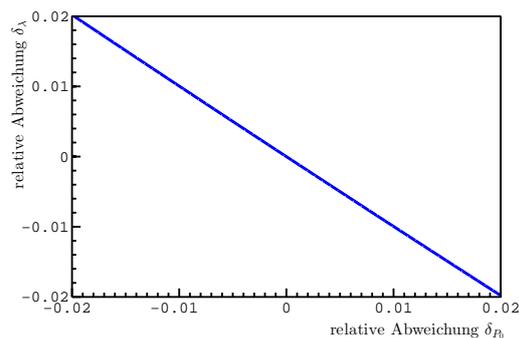
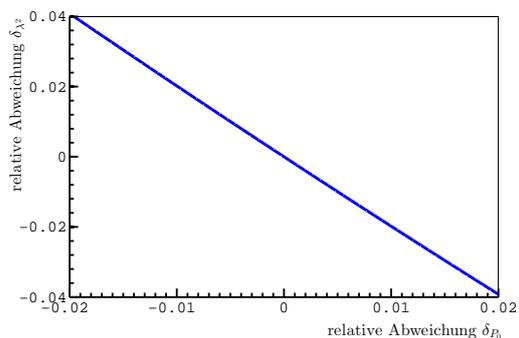
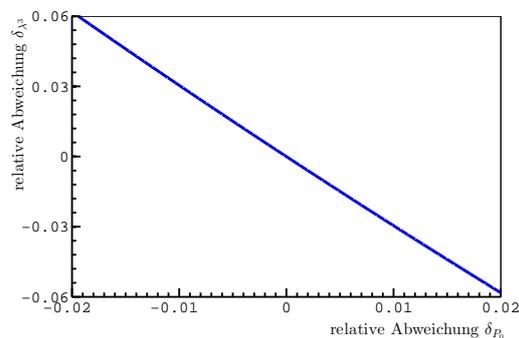
(a) Fehlerfortpflanzung auf $1/\widehat{P}_1$ (b) Fehlerfortpflanzung auf $\widehat{\lambda}$ (c) Fehlerfortpflanzung auf $\widehat{\lambda}^2$ (d) Fehlerfortpflanzung auf $\widehat{\lambda}^3$

Abbildung 6.10: Die Fehlerfortpflanzungen von $1/\widehat{P}_0$ auf Gewichtungsfaktoren, die bei der Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion benötigt werden. Für $\lambda = 1$. Während Unsicherheiten $\delta_{P_0} \ll 1$ eine sehr viel kleinere Unsicherheit auf $1/\widehat{P}_1$ zur Folge haben, ist die resultierende Unsicherheit auf $\widehat{\lambda}$ betragsmäßig etwa genauso groß wie jene auf \widehat{P}_0 . Für die weiteren Gewichtungsfaktoren $\widehat{\lambda}^2$ und $\widehat{\lambda}^3$ verschlechtert sich die Fehlerfortpflanzung zunehmend.

Fehlerfortpflanzung auf weitere Normierungsfaktoren

Für die Extraktionsintervalle B, C, ... werden zur Gewichtung der Korrekturterme neben $1/P_1$ folgende Parameter benötigt:

$$\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}, \frac{P_4}{P_1}, \dots \stackrel{(4.17)}{=} \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots \quad (6.28)$$

Es sind jedoch auch hier lediglich die Bestwerte $\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^2, \hat{\lambda}^3 \dots$ bekannt. Die relative Unsicherheit δ_λ auf $\hat{\lambda}$ beträgt im Fall eines *wahren* Wertes von $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &\stackrel{\lambda=1}{=} \frac{\hat{\lambda} - 1}{1} \\ &\stackrel{(6.22)}{=} -\ln(1 + \delta_{P_0}) \\ &\stackrel{|\delta_{P_0}| \ll 1}{\approx} -\delta_{P_0}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Damit gilt

$$\hat{\lambda} \approx 1 - \delta_{P_0}. \quad (6.30)$$

Die relative Unsicherheit auf $\hat{\lambda}$ ist daher betragsmäßig etwa genauso groß wie auf \hat{P}_0 . Mit $|\delta_{P_0}| \ll 1$ folgt damit für die weiteren Gewichtungsfaktoren:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^2 &\approx 1 - 2 \cdot \delta_{P_0} \\ \hat{\lambda}^3 &\approx 1 - 3 \cdot \delta_{P_0} \\ &\dots, \end{aligned} \quad (6.31)$$

wonach sich die Unsicherheiten bei höheren Potenzen kontinuierlich vergrößern. In Abb. 6.10 sind die Fehlerfortpflanzungen auf diese Parameter dargestellt. Die Korrekturterme höherer Extraktionsintervalle werden daher zunehmend ungenauer gewichtet, nehmen dafür jedoch aufgrund mehrfacher Faltung betragsmäßig ab.

6.3.2 Optimale Messdauer

Im Folgenden werden die Haupteffekte, welche die Unsicherheit δ_{P_0} bewirken, eingehender untersucht. Anschließend kann eine optimale Messdauer angegeben werden, mit welcher bei der Retardierungsenergie $qU = 10 \text{ eV}$ mit der Elektronenkanone gemessen werden sollte.

Die systematische Unsicherheit auf \hat{P}_0 aus Abschnitt 6.1.3, welche durch die Näherung aus Gl. (6.14) zustande kommt, wird hier vernachlässigt, da die Unsicherheit durch Fluktuationen der Säulendichte eine mehrfach größere Auswirkung auf \hat{P}_0 hat.

Nach [17] kann die Säulendichte in einem Zeitraum von zwei Stunden lediglich auf etwa ein Promille stabil gehalten werden. Ein genauerer Wert für diese relative

Unsicherheit $\delta_{\rho d}$ kann erst nach weiteren Untersuchungen angegeben werden. Es gilt für den Bestwert

$$\widehat{\rho d} = \rho d \cdot (1 + \delta_{\rho d}). \quad (6.32)$$

Eine Fehlerfortpflanzung auf den zu messenden Parameter \widehat{P}_0 ergibt

$$\begin{aligned} \delta_{P_0} &= \frac{\widehat{P}_0 - P_0}{P_0} \\ &\stackrel{(4.17)}{=} \exp(-\lambda \cdot \delta_{\rho d}) - 1. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Andererseits unterliegt der Erwartungswert für die Anzahl an Elektronen, die man bei $(E_0 - qU) = 10 \text{ eV}$ erhält, einer relativen statistischen Unsicherheit

$$\begin{aligned} \delta_{P_0} &\stackrel{[58]}{=} \pm \frac{1}{\sqrt{N_e \cdot P_0}} \\ &\stackrel{(4.17)}{=} \pm \frac{\exp\left(\frac{\lambda}{2} \cdot (1 + \delta_{\rho d})\right)}{\sqrt{N_e}} \end{aligned} \quad (6.34)$$

mit der Anzahl der von der Elektronenkanone emittierten Elektronen N_e . Wenn durch Erhöhung der Elektronenanzahl N_e diese statistische Unsicherheit so weit verringert wird, bis sie im Bereich der oben genannten Unsicherheit durch die Fluktuation der Säulendichte ist, dann kann die gesamte resultierende Unsicherheit nur noch unwesentlich durch eine Verlängerung der Messdauer verbessert werden. Durch Gleichsetzen der Beträge der Gleichungen (6.33) und (6.34) und anschließendem Auflösen nach N_e kann die Anzahl an Elektronen bestimmt werden, die von der Elektronenkanone emittiert werden müssen, damit die genannten Unsicherheiten gleichgroß werden:

$$N_e = \frac{\exp(\lambda \cdot (1 + \delta_{\rho d}))}{\exp(-2\lambda \cdot \delta_{\rho d}) - 2 \exp(-\lambda \cdot \delta_{\rho d}) + 1}. \quad (6.35)$$

Falls nun die Säulendichte um ein Promille fluktuiert, ergibt sich bei $\lambda = 1$ für die Anzahl der Elektronen $N_e \approx 2,7 \cdot 10^6$.

Soll nun eine Angabe für die Messdauer gemacht werden, muss zusätzlich die Emissionsrate der Elektronenkanone berücksichtigt werden. Den limitierenden Faktor stellt dabei der Pixeldetektor dar. Dieser sollte nach [20] Elektronen mit einer Rate von 60 kHz detektieren können. Bei einer Rate von 50 kHz ist weniger als eine Minute Messung erforderlich, um $N_e = 3 \cdot 10^6$ zu erreichen. Um bei 1000 unterschiedlichen Gegenspannungen zu messen und damit eine komplette Antwortfunktion zu bestimmen, ist voraussichtlich ein Tag für die Messzeit ausreichend.

Für die geplanten Zwischenmessungen während der KATRIN-Hauptmessungen würde bei bekannter Emissionsrate gleichermaßen eine Messdauer von einer Minute ausreichen. Ohne Kenntnis dieser Emissionsrate sind hierfür mindestens zwei Messungen bei unterschiedlichen Überschussenergien notwendig, sodass über einen Funktionsfit der Antwortfunktion der Parameter λ ermittelt werden kann.

Zur Berücksichtigung der statistischen Unsicherheiten bei der simulierten Messung der Antwortfunktion werden nachträglich Fluktuationen erzeugt. Dies wird jeweils für die Werte $N_e = 1, 10$ und 100 Millionen durchgeführt, sodass die Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion bei verschiedenen statistischen Unsicherheiten durchgeführt werden kann. Die Instabilität der Säulendichte wird hier nicht separat berücksichtigt und würde je nach Stärke ihrer Ausprägung die Verkleinerung der Unsicherheit auf \widehat{P}_0 durch Erhöhung der Elektronenanzahl limitieren. Generell sind bei der verwendeten simulierten Messung der Antwortfunktion zur Erzeugung der Fluktuationen keine Werte für N_e über 100 Millionen sinnvoll, denn so viele Elektronen wurden per Teilchentracking simuliert.

6.4 Nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung

Bisher wurde lediglich die Methode zur Extraktion der **inelastischen** Energieverlustfunktion vorgestellt. Bei nachträglicher Berücksichtigung von Energieverlusten durch elastische Streuung kann das Extraktionsergebnis weiter verbessert werden, auch wenn der elastische und inelastische Wirkungsquerschnitt nicht genau bekannt sind.

Aus (6.11) und (6.10) folgt für die Zusammensetzung der Energieverlustfunktion

$$f(\epsilon) = \frac{\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}}}{\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}} + 1} \cdot f_{\text{el}}(\epsilon) + \frac{1}{\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}} + 1} \cdot f_{\text{inel}}(\epsilon) \quad (6.36)$$

mit dem Quotienten $\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}}$ aus elastischem und inelastischem Wirkungsquerschnitt. Wird für die inelastische Energieverlustfunktion $f_{\text{inel}}(\epsilon)$ das Extraktionsergebnis aus Abschnitt 6.2 verwendet, so kann unter Zunahme der simulierten elastischen Energieverlustfunktion $f_{\text{el}}(\epsilon)$ ein Ergebnis angegeben werden, welches ebenfalls Energieverluste durch elastische Streuung berücksichtigt. Es soll gezeigt werden, dass die Berücksichtigung der elastischen Streuung eine Verbesserung im Hinblick auf die Bestimmung der Neutrinomasse bewirkt, auch wenn der Quotient $\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}}$ nur grob abgeschätzt wird. Für die Simulationen dieser Arbeit wird dieser Quotient um zehn Prozent zu klein angenommen, was sehr ungenau erscheint angesichts der in [56] angegebenen Unsicherheit auf den inelastischen Wirkungsquerschnitt von etwa 2% und der in [30] angegebenen Unsicherheit auf den elastischen Wirkungsquerschnitt von etwa 1%. Jedoch soll lediglich untersucht werden, ob eine Verbesserung des Extraktionsergebnisses erzielt werden kann, und zudem unterliegt hier die Form der elastischen Energieverlustfunktion fälschlicherweise keiner Unsicherheit. Es muss bei der Simulation beachtet werden, dass nun der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \sigma_{\text{inel}} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}}\right) \quad (6.37)$$

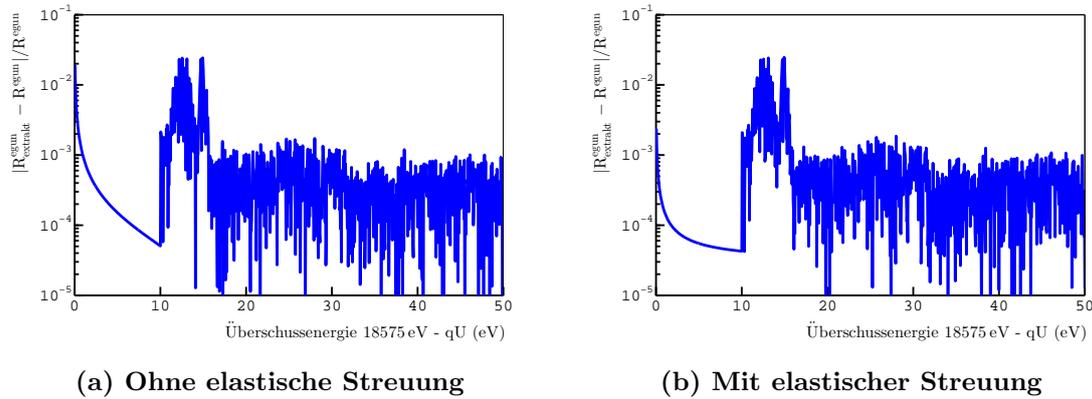


Abbildung 6.11: Die relative Abweichung von R^{egun} bei Verwendung extrahierter Energieverlustfunktionen. In (a) wurde auf nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung verzichtet, während in (b) die elastische Streuung teilweise berücksichtigt wurde. Aufgrund der für die Extraktion verwendeten Näherungen können die relativen Abweichungen der Antwortfunktionen durch nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung für Überschussenergien > 10 eV nicht verkleinert werden. Für Überschussenergien < 10 eV ist jedoch eine deutliche Verbesserung festzustellen. Für die Extraktion wurden in beiden Fällen 10 Millionen emittierte Elektronen pro qU -Wert angenommen.

mit dem erweiterten Extraktionsergebnis korrespondiert.

In Abb. 6.11 ist die relative Abweichung von R^{egun} bei Verwendung extrahierter Energieverlustfunktionen dargestellt. In Abb. 6.11(a) wurde die extrahierte Energieverlustfunktion ohne Berücksichtigung von elastischer Streuung verwendet und in Abb. 6.11(b) wurde, wie oben beschrieben, ein Teil der elastischen Streuung berücksichtigt. Die Auswirkungen der Verwendung dieser Extraktionsergebnisse bei der Analyse des integrierten β -Spektrums werden im anschließenden Abschnitt untersucht.

6.5 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden zunächst die Ergebnisse der Extraktionen inelastischer Energieverlustfunktionen inklusive optionaler nachträglicher Berücksichtigung elastischer Streuung dargestellt und verglichen. Im Anschluss daran werden mehrere mögliche Optimierungsmöglichkeiten präsentiert, welche einer genaueren Untersuchung bedürfen. Abschließend wird das grundsätzliche Vorgehen bei der Extraktionsmethode mit der alternativen *Entfaltung der Energieverlustfunktion* aus [6, 7] verglichen.

Die **extrahierten inelastischen Energieverlustfunktionen**, basierend auf einer simulierten Messung der Antwortfunktion mit der Elektronenkanone, sind in Abb. 6.12 für unterschiedliche statistische Unsicherheiten dargestellt. Die starken Fluktuationen der extrahierten Energieverlustfunktion für Energieverluste > 20 eV sind auf die Extraktionsmethode aus Abschnitt 6.2 und auf den kleineren Gradienten der Antwortfunktion für größere Überschussenergien zurückzuführen. Ein kleinerer

Gradient besitzt eine größere statistische Unsicherheit und führt daher zu stärkeren Fluktuationen. Solange diese Schwankungen der Wahrscheinlichkeitsdichte um den *korrekten* Verlauf der Energieverlustfunktion erfolgen, hat dies nur einen kleinen Einfluss auf die resultierende Antwortfunktion, denn die Energieverlustfunktion fließt lediglich in gefalteter Form in die Antwortfunktion mit ein. Entscheidend ist somit vielmehr die Fluktuation der integrierten Energieverlustfunktion. Eine Glättung der Energieverlustfunktion, beispielsweise durch Faltung mit einer normierten Gaußverteilung, ist somit nicht erforderlich und hätte zudem einen schwer kalkulierbaren Einfluss auf die Bestimmung der Neutrinomasse (vgl. Abb. 6.4).

6.5.1 Einfluss auf die Bestimmung der Neutrinomasse

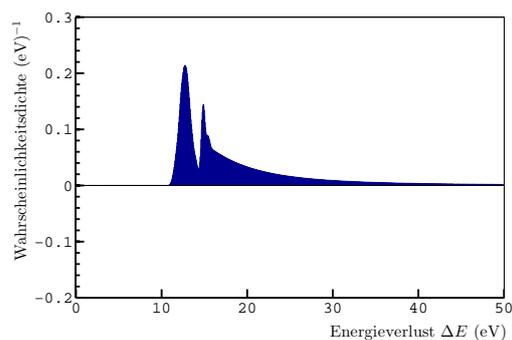
Zur Untersuchung der Auswirkungen einer extrahierten inelastischen Energieverlustfunktion mit optionaler nachträglicher Berücksichtigung der elastischen Streuung werden, wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, mindestens 1000 KATRIN-Messungen mit der Energieverlustfunktion aus Abb. 3.1 simuliert. Anschließend werden diese simulierten Messungen auf Grundlage einer extrahierten Energieverlustfunktion analysiert.

Sämtliche Ergebnisse inklusive verwendeter Parameter sind tabellarisch im Anhang A.1.2 zu finden.

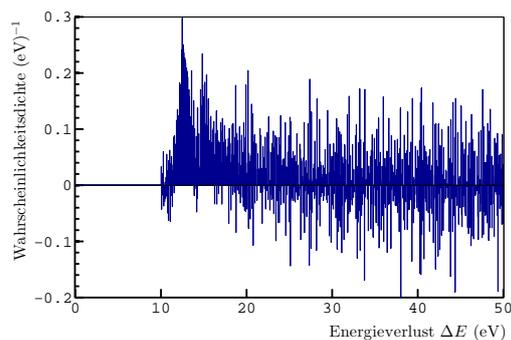
In Abb. 6.13 sind die Werte Δm_ν^2 inklusive ihrer statistischen Unsicherheiten für unterschiedliche Analyseintervalle und unterschiedliche Anzahlen N_e an Elektronen pro simuliertem Messintervall dargestellt. Die Grundlage der durchgeführten Extraktionen bildet die durch Teilchentacking simulierte Antwortfunktion für die Elektronenkanone aus Abschnitt 5.2 mit einer Breite der Energieverteilung von $s_E = 0,1$ eV. Das Diagramm 6.13(a) zeigt die Ergebnisse nach Verwendung der extrahierten inelastischen Energieverlustfunktionen ohne nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung, wohingegen für das Diagramm 6.13(b) eine nachträgliche Berücksichtigung stattfand. Wie in Abschnitt 6.4 wurde dazu ein um 10 % zu kleiner Wert für $\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{inel}}$ verwendet. In Abb. 6.14 ist derselbe Sachverhalt dargestellt, jedoch mit einer Breite der Energieverteilung von $s_E = 0,2$ eV für die simulierte Antwortfunktion.

Identische Ergebnisse für das 10 eV-Analyseintervall

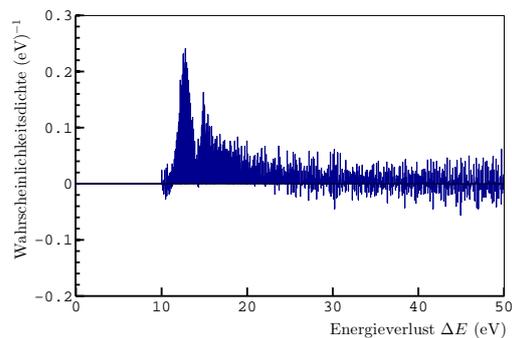
In allen vier Diagrammen sind die Werte des 10 eV-Analyseintervalls jeweils unabhängig von N_e . Dies lässt sich darauf zurückführen, dass für Überschussenergien < 10 eV lediglich Energieverluste durch **elastische** Streuung eine Rolle spielen. Dieser elastische Teil der Energieverlustfunktion ist in den oberen Diagrammen der Abbildungen 6.13 und 6.14 komplett vernachlässigt, sodass der Wert von $\Delta m_\nu^2 = (-4 \pm 1) \cdot 10^{-3}$ (eV)² die systematische Auswirkung auf die Bestimmung des Neutrinomassenquadrats durch Vernachlässigung elastischer Streuung angibt. In den beiden unteren Diagrammen 6.13(b) und 6.14(b) wurde für das 10 eV-Analyseintervall exakt derselbe elastische Teil der Energieverlustfunktion verwendet, sodass ebenfalls identische Werte für Δm_ν^2 resultieren. Es ergibt sich mit $\Delta m_\nu^2 = (-2 \pm 1) \cdot 10^{-3}$ (eV)² erwartungsgemäß eine deutlich kleinere systematische Unsicherheit.



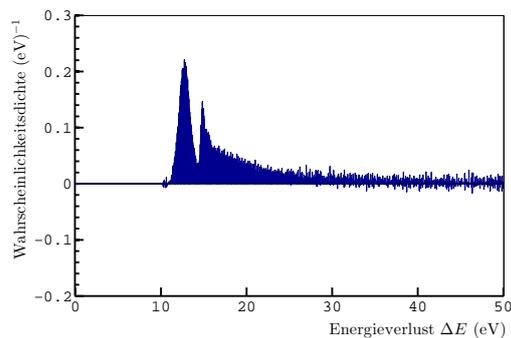
(a) Referenz: Mit $s_E = 0,2 \text{ eV}$ gefaltete inelastische Energieverlustfunktion



(b) Extraktionsergebnis mit $N_e = 10^6 \text{ e}^-$



(c) Extraktionsergebnis mit $N_e = 10^7 \text{ e}^-$



(d) Extraktionsergebnis mit $N_e = 10^8 \text{ e}^-$

Abbildung 6.12: Die extrahierten inelastischen Energieverlustfunktionen für unterschiedliche statistische Unsicherheiten. Die Grundlage dieser Extraktionen bildet die durch Teilchentracking simulierte Messung der Antwortfunktion für die Elektronenkanone aus Abschnitt 5.2 mit einer Breite der Energieverteilung von $s_E = 0,2 \text{ eV}$. Unter Annahme verschiedener Anzahlen N_e an Elektronen pro qU -Wert wurde diese Antwortfunktion vor der Extraktion mit statistischen Schwankungen versehen. Dadurch ergeben sich ebenfalls bei den Extraktionsergebnissen Fluktuationen, die durch Vergrößerung von N_e sichtbar abnehmen.

Größere systematische Unsicherheiten bei größeren Analyseintervallen

Tendenziell ergeben sich für größere Analyseintervalle betragsmäßig größere Werte für Δm_ν^2 , jedoch mit einigen Ausnahmen vor allem bei $s_E = 0,2 \text{ eV}$. Eine Zunahme der systematischen Unsicherheit bei größeren Analyseintervallen erscheint plausibel, da die extrahierte inelastische Energieverlustfunktion für Energieverluste $> 20 \text{ eV}$ ungenauer extrahiert werden kann als für kleinere Energieverluste. Die Ausnahmen lassen sich damit begründen, dass eine Faltung der Energieverlustfunktion mit einer Gaußkurve für die Analyseintervalle bis einschließlich 30 eV ein positives Δm_ν^2 zur Folge hat (vgl. Abb. 6.4). Insbesondere bei $s_E = 0,2 \text{ eV}$ steht dieser Effekt in Konkurrenz zu dem hier betrachteten Effekt durch die Extraktion. Da sich bei dem 40 eV -Intervall aus Abb. 6.4 im Gegensatz zu den kleineren Intervallen ein negatives Δm_ν^2 ergibt, sind auch bei der Untersuchung mit extrahierten Energieverlustfunktionen die Werte des 40 eV -Analyseintervalls in allen Diagrammen ausnahmslos negativ und betragsmäßig am größten. An dieser Stelle sei erneut darauf hingewiesen, dass aufgrund der gegenseitigen Aufhebung verschiedener Effekte eine vermeintlich geringe systematische Unsicherheit resultiert. Diese Effekte müssen deshalb einzeln und bei unterschiedlichen Rahmenbedingungen untersucht werden. Eine asymmetrische Energieverteilung der Elektronenkanone könnte beispielsweise einen deutlich anderen systematischen Effekt nach sich ziehen. Dies gilt es künftig genauer zu untersuchen.

Kleinere systematische Unsicherheiten durch mehr Elektronen

Bei allen betrachteten Analyseintervallen $> 10 \text{ eV}$ der vier genannten Diagramme ergeben sich die größten systematischen Unsicherheiten erwartungsgemäß bei der kleinsten Anzahl N_e von 10^6 Elektronen pro simuliertem Messintervall. Da zur Erzeugung der benötigten Antwortfunktionen für die Elektronenkanone 10^8 Elektronen durch Teilchentracking simuliert wurden, wäre es hier nicht sinnvoll, zur nachträglich erzeugten statistischen Fluktuation N_e größer als 10^8 zu wählen. Es zeigt sich, dass bereits eine Erhöhung der Elektronenanzahl von 10^7 auf 10^8 keine Verkleinerung der systematischen Unsicherheiten mehr zur Folge hat, sondern offenbar durch einen ungünstigen Bestwert \widehat{P}_0 teilweise sogar eine Vergrößerung derselben bewirkt. Da nach Abschnitt 6.3.2 aufgrund von Schwankungen der Säulendichte im Promillebereich ohnehin keine Elektronenanzahlen dieser Größenordnung gewinnbringend sind, stehen die systematischen Unsicherheiten für $N_e = 10^6$ und $N_e = 10^7$ im Fokus der Betrachtung.

Kleinere systematische Unsicherheiten durch nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung

Auch wenn ein um 10% zu kleiner Quotient $\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}}$ bei der nachträglichen Berücksichtigung von Energieverlusten durch elastische Streuung angenommen wurde, so bewirkt diese Berücksichtigung eine Verkleinerung der systematischen Unsicherheit in allen Fällen um etwa $2 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$.

Fazit

Für das in [5] betrachtete Analyseintervall von 30 eV ist ein Limit von $6 \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$ zur Bestimmung der Antwortfunktion angegeben. Dieser Wert wird für $N_e = 10^6$

Elektronen in allen vier betrachteten Fällen deutlich überschritten. Für $N_e = 10^7$ und $N_e = 10^8$ ergeben sich erst bei nachträglicher Berücksichtigung von elastischer Streuung deutlich kleinere systematische Unsicherheiten. Im günstigsten Fall liegt der Wert $\Delta m_\nu^2 = (-2 \pm 5) \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$ vor, der für $N_e = 10^7$ und $s_E = 0,2 \text{ eV}$ erreicht wird. Dies ist jedoch lediglich durch die oben erwähnte teilweise Auslöschung verschiedener Effekte möglich und daher mit Vorsicht zu betrachten.

Für kleinere Analyseintervalle ergeben sich, insbesondere bei nachträglicher Berücksichtigung elastischer Streuung, deutlich kleinere systematische Unsicherheiten. Für $s_E = 0,2 \text{ eV}$ ergibt sich bei Betrachtung des 20 eV-Analyseintervalls im unteren Diagramm der Wert $\Delta m_\nu^2 = (-21 \pm 7) \cdot 10^{-3} (\text{eV})^2$. Eine nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung ist in jedem Fall ratsam, auch wenn der Anteil des inelastischen Wirkungsquerschnitts nicht sehr genau bekannt ist. Für die Anzahl an Elektronen N_e eines Messintervalls sollte für ein Analyseintervall $> 20 \text{ eV}$ ein größerer Wert als $N_e = 10^6$ angestrebt werden.

6.5.2 Optimierungsmöglichkeiten

Fit der Energieverluste durch Ionisation

Aufgrund der vergleichsweise starken Fluktuationen der extrahierten inelastischen Energieverlustfunktion für Energieverluste $> 20 \text{ eV}$ könnte in diesem Bereich ein Fit des Ionisationsteils an eine analytische Funktion zu einer Verkleinerung von $|\Delta m_\nu^2|$ führen (vgl. [56]).

Messprinzip

Da die analytisch berechneten Antwortfunktionen monoton ansteigen, sind für größere Überschussenergien kleinere Werte für N_e ausreichend, um dieselbe statistische Unsicherheit zu erhalten. Somit ist es denkbar, die Messdauer für größere Überschussenergien zu verkleinern.

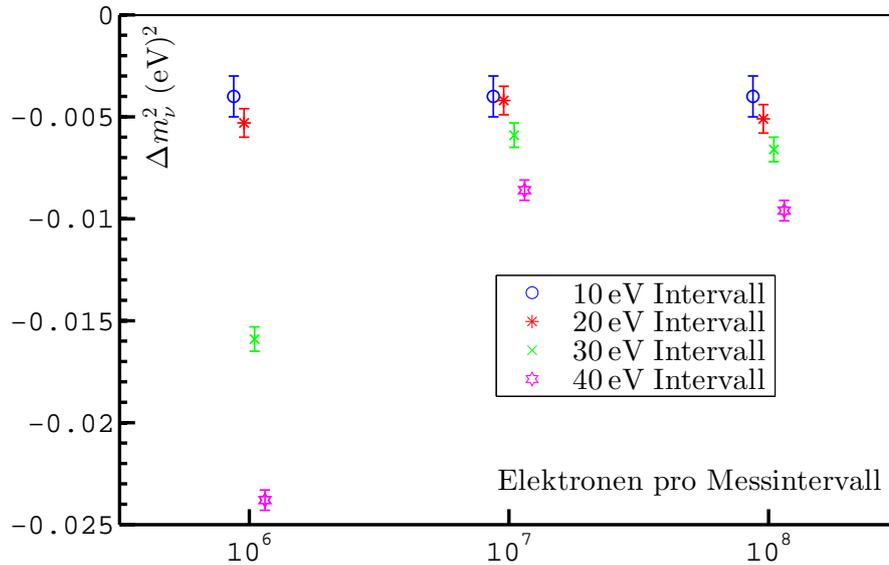
Wie bereits erwähnt, liegt die Stärke der Fluktuation der Säulendichte im Promillebereich für zwei Stunden und ist nach [17] noch nicht genauer bekannt. Bei der künftigen Messung der Antwortfunktion für die Elektronenkanone könnte in kleineren Zeitabständen als zwei Stunden zu einer Überschussenergie von 10 eV zur Bestimmung von \widehat{P}_0 zurückgekehrt werden, um eine kleinere effektive Fluktuation der Säulendichte zu erreichen.

Elastische Streuung

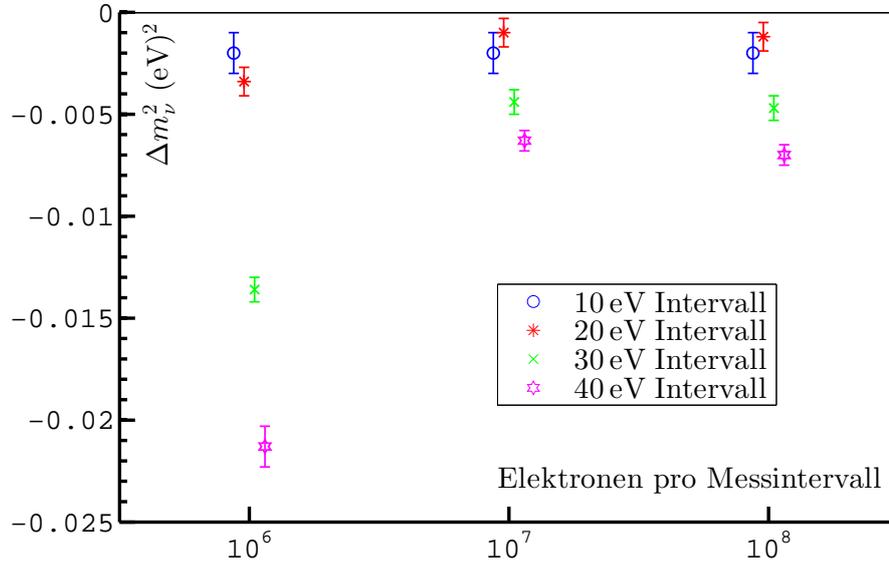
Es wurde gezeigt, dass auch bei sehr ungenauer Kenntnis der elastischen und inelastischen Wirkungsquerschnitte durch nachträgliche Berücksichtigung der elastischen Streuung eine deutliche Verkleinerung der resultierenden Unsicherheit auf m_ν^2 erzielt werden kann. Es können realistischere Werte für $\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{inel}}}$ gewählt werden als in dieser Arbeit. Allerdings sollte untersucht werden, wie genau die Theorie den Verlauf der elastischen Energieverlustfunktion beschreibt.

6.5.3 Vergleich mit bisherigen Methoden

In [6, 7] wird eine Methode vorgestellt, mit der die Energieverlustfunktion durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) und einer anschließenden mathematischen Entfaltung bestimmt werden kann.

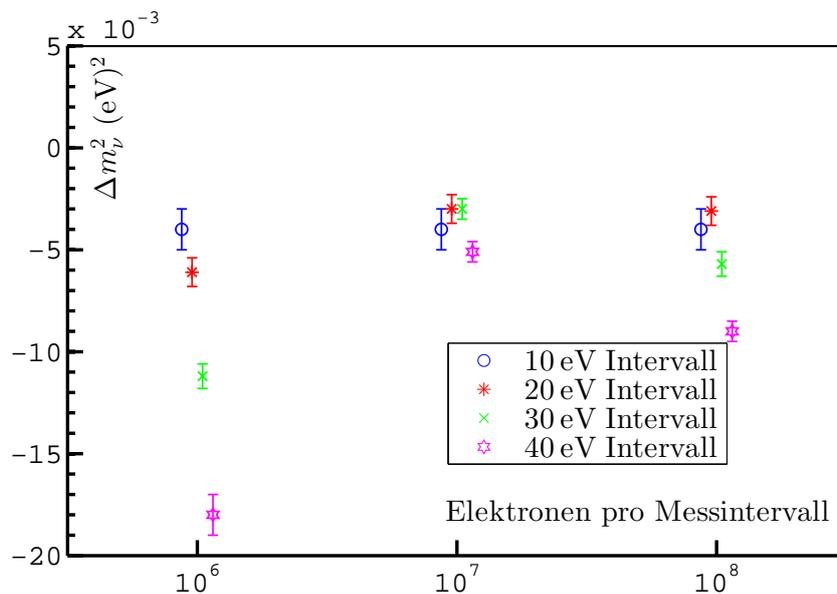


(a) Keine nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung

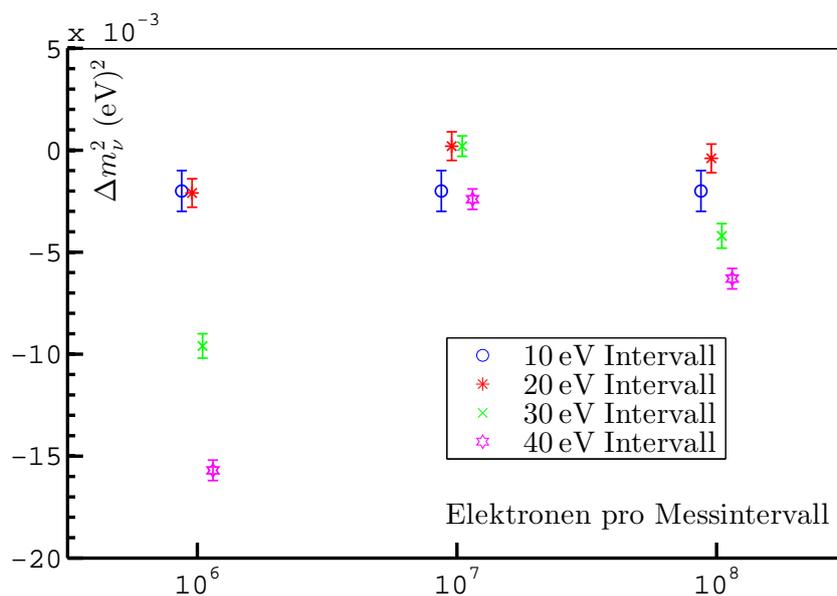


(b) Inklusive nachträglicher Berücksichtigung elastischer Streuung

Abbildung 6.13: Ergebnisse aus den Spektrumsanalysen mit mehreren entfaltenen Energieverlustfunktionen. Es gilt für die Energieverteilung der simulierten Elektronenkanone $s_E = 0,1$ eV. In (a) wurde auf eine nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung verzichtet. In (b) fand eine nachträgliche Berücksichtigung mit einem um 10% zu kleinen Quotienten $\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{inel}}$ statt.



(a) Keine nachträglicher Berücksichtigung elastischer Streuung



(b) Inklusive nachträglicher Berücksichtigung elastischer Streuung

Abbildung 6.14: Ergebnisse aus den Spektrumsanalysen mit mehreren entfaltenen Energieverlustfunktionen. Es gilt für die Energieverteilung der simulierten Elektronenkanone $s_E = 0,2 \text{ eV}$. In (a) wurde auf eine nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung verzichtet. In (b) fand eine nachträgliche Berücksichtigung mit einem um 10% zu kleinen Quotienten $\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{inel}}$ statt.

Anzahl erforderlicher Messungen

Zur Aufstellung des LGS sind mindestens drei Messungen der Antwortfunktion für die Elektronenkanone bei unterschiedlichen effektiven Säulendichten erforderlich, während für die Extraktionsmethode dieser Arbeit die Messung einer Antwortfunktion bei einer dafür optimalen Säulendichte ausreicht.

Bestimmung der Streuwahrscheinlichkeiten

Die Bestimmung der Streuwahrscheinlichkeiten erfolgt in den oben genannten Arbeiten durch eine numerische Berechnung und ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten durch ungenaue Kenntnis der Säulendichte ρd bzw. des Wirkungsquerschnitts σ . In Abschnitt 6.1.3 der vorliegenden Arbeit wurde eine experimentelle Methode zur Bestimmung der inelastischen Streuwahrscheinlichkeiten vorgestellt.

Elastische Streuung

In [7] wird der elastische Anteil der Energieverlustfunktion direkt aus einer zu messenden Antwortfunktion bestimmt, während die Extraktionsmethode lediglich eine nachträgliche Berücksichtigung der elastischen Streuung zulässt.

Entfaltung versus Extraktion

Da die Transmissionsfunktion der Elektronenkanone näherungsweise einer Stufenfunktion entspricht und eine Faltung mit einer solchen Stufenfunktion lediglich eine Integration bewirkt, führt im Umkehrschluss eine Entfaltung näherungsweise zu einer Differentiation, ähnlich wie bei der Extraktionsmethode. Da durch eine Entfaltung bei ungenauer Kenntnis der Energieverteilung der Elektronenkanone und der Antwortfunktion starke Fluktuationen der erhaltenen Energieverlustfunktion resultieren, wurde in Abschnitt 6.1.2 dieser Arbeit untersucht, welche Auswirkungen eine Extraktion der Energieverlustfunktion ohne Berücksichtigung dieser Energieverteilung hat. Prinzipiell könnte eine solche Entfaltung auch nach der Extraktion erfolgen. Jedoch müssten zur Untersuchung etwaiger Verbesserungen durch die Entfaltung zusätzliche, realistischere Energieverteilungen inklusive deren Unsicherheiten verwendet werden.

Simulationenmethoden

Während die Antwortfunktionen für die Elektronenkanone in [6, 7] durch Monte-Carlo-Methoden simuliert wurden, wurde für diese Arbeit ein Teilchentracking durchgeführt, welches beispielsweise lokale Unterschiede der Tritiumdichte und des Magnetfelds in der Quelle berücksichtigt.

Für diese Arbeit wurden aktuelle Programmpakete für das Teilchentracking und die Analysemethoden verwendet, siehe dazu Kap. 3.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

Seit dem Nachweis der Neutrinooszillation besteht kein Zweifel mehr daran, dass Neutrinos entgegen der Annahme des Standardmodells eine von Null verschiedene Masse besitzen. Aus der Theorie können lediglich Massendifferenzen zwischen Neutrinos unterschiedlichen Flavours angegeben werden, daher ist eine experimentelle Bestimmung der Neutrinomasse erforderlich. Durch kinematische Untersuchungen von Elektronen aus dem Tritiumbetazerfall kann bislang lediglich eine Obergrenze von $m_{\bar{\nu}_e} < 2,05 \text{ eV}/c^2$ (95 % C. L.) für die Masse des Elektron-Antineutrinos angegeben werden.

Das KATRIN-Experiment wird die Neutrinomasse durch eine hochpräzise Langzeitmessung des β -Spektrums von molekularem Tritium mit einer Sensitivität von $m_\nu \leq 200 \text{ meV}/c^2$ bestimmen können. Um dies zu erreichen, müssen für die Analyse der künftigen Messergebnisse genaue Berechnungen der integrierten Betaspektren durchgeführt werden. Die Antwortfunktion bildet eine wichtige Komponente dieser Spektren und berücksichtigt viele Parameter des KATRIN-Experiments. Unsicherheiten einzelner Parameter führen zu einer weniger genau berechneten Antwortfunktion und damit zu einer systematischen Unsicherheit auf m_ν^2 . Die Energieverlustfunktion ist ein wesentliches Element der Antwortfunktion und berücksichtigt Energieverluste infolge von Streuprozessen zwischen Elektronen und Tritiummolekülen. Sie ist ein weiterer Unsicherheitsfaktor und muss möglichst genau bestimmt werden.

Zur Minimierung dieser Unsicherheiten werden bereits vor Beginn der Hauptmessungen verschiedene Simulationen durchgeführt. Einerseits dient dies der Vorbereitung und Optimierung der künftigen Analysen und andererseits der Untersuchung von systematischen Einflüssen, die verschiedene Effekte und Restunsicherheiten einzelner Parameter auf die Neutrinomassenbestimmung haben. Mit Kassiopeia, SSC und KaFit wurden drei wichtige Simulationspakete in dieser Arbeit vorgestellt und angewendet.

Die in [5] festgelegte Obergrenze von $6 \cdot 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$ für die resultierende Unsicherheit im Zusammenhang mit der Antwortfunktion gilt es einzuhalten. Es wurden zwei Näherungen bei der Berechnung der Antwortfunktion untersucht: Für das geplante 30 eV-Analyseintervall bewirkte die Vernachlässigung relativistischer Effekte eine Unsicherheit von $\Delta m_\nu^2 = (-6,7 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$. Die in [5] vernachlässigte nicht-isotrope Winkelverteilung i -fach gestreuter Elektronen führte zu einer Unsicherheit von $\Delta m_\nu^2 = (+8,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$. Beide Effekte dürfen somit nicht vernachlässigt werden. In diesem Zusammenhang wurde darauf hingewiesen, dass eine simultane Vernachlässigung dieser Effekte zu einem kleineren Wert für Δm_ν^2 führt als die Vernachlässigung nur eines der beiden Effekte. Dies liegt daran, dass sich systematische Unsicherheiten entgegengesetzten Vorzeichens teilweise aufheben. Aufgrund der komplexen Analysemethoden lässt sich jedoch schwer abschätzen, wann diese gegenseitige Aufhebung in welchem Maße stattfindet. Zur Sicherheit müssen deshalb alle betrachteten Effekte stets separat untersucht werden.

Mit einem Teilcentracking wurden für die Messung mit einer Elektronenkanone zwei Antwortfunktionen simuliert. Dieses Teilcentracking umfasste jeweils 10^8 Elektronen mit Startenergieverteilungen der Breiten 0,1 eV und 0,2 eV und berücksichtigte sowohl Energieverluste als auch Winkeländerungen in Folge von Streuprozessen in der Tritiumquelle. Die aus dem Teilcentracking resultierenden Streuwahrscheinlichkeiten wurden mit numerisch berechneten verglichen. Bis zur Dreifachstreuung ergaben sich dabei Abweichung im Promillebereich und ab der Vierfachstreuung Abweichungen im Prozentbereich. Bei der Extraktion der Energieverlustfunktion wurden numerisch berechnete Streuwahrscheinlichkeiten ohne Berücksichtigung der Winkeländerungen verwendet.

Zur Entwicklung dieser Extraktionsmethode wurden zunächst verschiedene Näherungen untersucht und angewendet. Es wurde gezeigt, dass mit einer zukünftigen Elektronenkanonenmessung bei einer Überschussenergie von 10 eV die Wahrscheinlichkeiten für inelastische Streuungen bestimmt werden können. Dies ermöglicht die anschließend vorgestellte und durchgeführte Extraktion der inelastischen Energieverlustfunktion mit den durch Teilcentracking generierten Antwortfunktionen. Die Elektronenkanonenmessung wird im Idealfall bei einer Säulendichte von $\rho d \lesssim 3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ durchzuführen sein. Dabei wird die Messung lediglich einer Antwortfunktion ausreichend sein und eine Messzeit < 1 Tag wird voraussichtlich genügen. Ein optionales nachträgliches Hinzufügen des theoretisch berechneten elastischen Teils der Energieverlustfunktion wurde getestet.

Abschließend fand eine Untersuchung der Auswirkungen auf die Neutrinomassenbestimmung in Folge der Analyse mit unterschiedlichen extrahierten Energieverlustfunktionen statt. Ohne eine nachträgliche Berücksichtigung der Energieverluste durch elastische Streuung ergaben sich für das geplante 30 eV-Analyseintervall Unsicherheiten von $\Delta m_\nu^2 \approx -6 \cdot 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$ bei 10^7 Elektronen pro simuliertem Messwert. Durch die nachträgliche Berücksichtigung der elastischen Energieverlustfunktion konnte trotz bewusst ungenau gewählten Werten für die Wirkungsquerschnitte¹ eine deutliche Verbesserung auf $\Delta m_\nu^2 \lesssim -4 \cdot 10^{-3} (\text{eV}/c^2)^2$ erzielt werden, was im Bereich der Anforderungen liegt.

¹Der Quotient aus elastischem und inelastischem Wirkungsquerschnitt wurde 10% zu klein gewählt

Weitere Optimierungsmöglichkeiten zur Extraktion der Energieverlustfunktion

Die resultierenden systematischen Unsicherheiten in Folge extrahierter Energieverlustfunktionen können noch genauer bestimmt und voraussichtlich weiter minimiert werden. Dazu seien einige Optimierungsvorschläge genannt:

- Die Extraktion der Energieverlustfunktion wurde am Beispiel einer Antwortfunktion durchgeführt, welche durch Teilchentracking erzeugt wurde. Statistische Unsicherheiten wurden dabei nachträglich generiert, da diese Antwortfunktion lediglich den hypothetischen Fall repräsentiert, dass bei allen Gegenspannungen gleichzeitig gemessen werden kann. Um diese Unsicherheiten zuverlässig generieren zu können, darf die Antwortfunktion zuvor nur kleinere Unsicherheiten aufweisen. Dazu kann ein **Teilchentracking mit weiteren Elektronen** durchgeführt werden.
- Bei der nachträglichen Berücksichtigung der elastischen Energieverlustfunktion wurden bewusst sehr ungenaue Werte für die Wirkungsquerschnitte verwendet. Diese können wesentlich realistischer gewählt werden, jedoch gilt es zu untersuchen, wie genau den theoretischen Berechnungen zum **Verlauf der elastischen Energieverlustfunktion** vertraut werden kann.
- Um besser abschätzen zu können, wie genau die Antwortfunktion für die Elektronenkanone experimentell bestimmt werden kann, muss neben der Stabilität der Säulendichte auch die Stabilität der **Emissionsrate der Elektronenkanone** untersucht werden. Dadurch kann ebenfalls ein sinnvoller Wert für die ideale Messdauer bei einer Gegenspannung angegeben werden. Zudem können mit einer realistischeren **Energieauflösung der Elektronenkanone** weitere Simulationen durchgeführt werden.
- Die Antwortfunktion für die Elektronenkanone aus Kap. 5 wurde durch ein Teilchentracking simuliert. Die Abweichungen der daraus resultierten Streuwahrscheinlichkeiten zu den numerisch berechneten könnten durch **Korrekturfaktoren bei der Extraktion** der inelastischen Energieverlustfunktion berücksichtigt werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass in Bezug auf die Berechnung der Antwortfunktion in dieser Arbeit keine **Synchrotronabstrahlung** der Elektronen berücksichtigt wurde. Es bleibt zu untersuchen, wie dieser Effekt beispielsweise den Grenzwinkel beeinflusst, bis zu welchem die Elektronen einer bestimmten Startenergie transmittiert werden.

A. Simulationsergebnisse

A.1 Bestimmung systematischer Unsicherheiten mit KaFit

In diesem Anhang sind die Simulationsergebnisse aus den Kapiteln 4 und 6 zusammengetragen. Die Untersuchung systematischer Effekte erfolgte jeweils für die Analyseintervalle von 10 eV, 20 eV, 30 eV und 40 eV.

A.1.1 Analyse mit genäherten Antwortfunktionen

Tabelle A.1: Systematische Fehler auf m_ν^2 durch Analyse mit der nach Gl. (4.13) genäherten Antwortfunktion. Für die Simulation der KATRIN-Messungen wurde die Antwortfunktion aus Gl. (4.20) verwendet.

Analyseintervall (eV)	Δm_ν^2 ((eV) ²)	σ_{stat} ((eV) ²)
10	+0,001± 0,001	0,0431±0,0009
20	+0,0025± 0,0005	0,0197±0,0003
30	+0,0085± 0,0004	0,0166±0,0003
40	+0,0114± 0,0003	0,0149±0,0003

Tabelle A.2: Systematische Fehler auf m_ν^2 durch Analyse mit der Antwortfunktion aus Gl. (4.20), jedoch ohne relativistische Korrektur. Die Antwortfunktion zur Simulation der KATRIN-Messungen berücksichtigt den relativistischen Einfluss und beruht ebenfalls auch der Berechnungsweise nach Gl. (4.20).

Analyseintervall (eV)	Δm_ν^2 ((eV) ²)	σ_{stat} ((eV) ²)
10	-0,007±0,001	0,0443±0,0009
20	-0,0067±0,0005	0,0200±0,0004
30	-0,0067±0,0004	0,0168±0,0003
40	-0,0066±0,0003	0,0150±0,0003

Tabelle A.3: Systematische Fehler auf m_ν^2 durch Analyse mit der nach Gl. (4.13) genäherten Antwortfunktion und ohne relativistische Korrektur. Zur Simulation der KATRIN-Messungen wurde die Antwortfunktion aus Gl. (4.20) inklusive relativistischer Korrektur verwendet.

Analyseintervall (eV)	Δm_ν^2 ((eV) ²)	σ_{stat} ((eV) ²)
10	-0,006±0,001	0,0437±0,0009
20	-0,0026±0,0005	0,0202±0,0003
30	+0,0028±0,0004	0,0160±0,0003
40	+0,0054±0,00003	0,0147±0,0002

A.1.2 Analyse mit unterschiedlichen Energieverlustfunktionen

Tabelle A.4: Systematische Unsicherheiten auf m_ν^2 durch Analyse mit gefalteten Energieverlustfunktionen. Gefaltet wurde lediglich der inelastische Teil der Energieverlustfunktion mit unterschiedlichen Werten für die Standardabweichung s_E der Gaußkurve.

Analyseintervall (eV)	s_E (eV)	Δm_ν^2 ((eV) ²)	σ_{stat} ((eV) ²)
20	0,1	-0,0001 ± 0,0005	0,0203 ± 0,0003
	0,2	+0,0007 ± 0,0005	0,0205 ± 0,0003
	0,3	+0,0019 ± 0,0005	0,0201 ± 0,0004
30	0,1	+0,0001 ± 0,0004	0,0163 ± 0,0003
	0,2	+0,0007 ± 0,0004	0,0166 ± 0,0003
	0,3	+0,0022 ± 0,0004	0,0165 ± 0,0003
40	0,1	-0,0006 ± 0,0003	0,0148 ± 0,0003
	0,2	-0,0002 ± 0,0003	0,0149 ± 0,0003
	0,3	-0,0002 ± 0,0003	0,0147 ± 0,0003

Tabelle A.5: Systematische Unsicherheiten auf m_ν^2 durch Analyse mit extrahierten inelastischen Energieverlustfunktionen ohne nachträgliche Berücksichtigung elastischer Streuung. Es wird differenziert zwischen unterschiedlichen Analyseintervallen, unterschiedlichen Standardabweichungen s_E der Energieverteilung der Elektronen und unterschiedlichen Anzahlen $\# e^-$ von Elektronen pro simuliertem Messintervall.

Analyseintervall (eV)	s_E (eV)	$\# e^-$	Δm_ν^2 ((eV) ²)	σ_{stat} ((eV) ²)
10	0,1	1 Mio	$-0,004 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,001$
		10 Mio	$-0,004 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,001$
		100 Mio	$-0,004 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,001$
	0,2	1 Mio	$-0,004 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,001$
		10 Mio	$-0,004 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,001$
		100 Mio	$-0,004 \pm 0,001$	$0,045 \pm 0,001$
20	0,1	1 Mio	$-0,0053 \pm 0,0007$	$0,0203 \pm 0,0006$
		10 Mio	$-0,0042 \pm 0,0007$	$0,0193 \pm 0,0006$
		100 Mio	$-0,0051 \pm 0,0007$	$0,0190 \pm 0,0006$
	0,2	1 Mio	$-0,0061 \pm 0,0007$	$0,0190 \pm 0,0006$
		10 Mio	$-0,0030 \pm 0,0007$	$0,0194 \pm 0,0006$
		100 Mio	$-0,0031 \pm 0,0007$	$0,0203 \pm 0,0006$
30	0,1	1 Mio	$-0,0159 \pm 0,0006$	$0,0180 \pm 0,0005$
		10 Mio	$-0,0059 \pm 0,0006$	$0,0175 \pm 0,0005$
		100 Mio	$-0,0066 \pm 0,0006$	$0,0171 \pm 0,0005$
	0,2	1 Mio	$-0,0112 \pm 0,0006$	$0,0168 \pm 0,0005$
		10 Mio	$-0,0030 \pm 0,0006$	$0,0170 \pm 0,0005$
		100 Mio	$-0,0057 \pm 0,0006$	$0,0170 \pm 0,0005$
40	0,1	1 Mio	$-0,0238 \pm 0,0005$	$0,0160 \pm 0,0005$
		10 Mio	$-0,0086 \pm 0,0005$	$0,0153 \pm 0,0004$
		100 Mio	$-0,0096 \pm 0,0005$	$0,0152 \pm 0,0004$
	0,2	1 Mio	$-0,018 \pm 0,001$	$0,0157 \pm 0,0005$
		10 Mio	$-0,0051 \pm 0,0005$	$0,0145 \pm 0,0004$
		100 Mio	$-0,0090 \pm 0,0005$	$0,0153 \pm 0,0004$

Tabelle A.6: Systematische Unsicherheiten auf m_ν^2 durch Analyse mit extrahierten inelastischen Energieverlustfunktionen inklusive nachträglicher Berücksichtigung elastischer Streuung. Es wird differenziert zwischen unterschiedlichen Analyseintervallen, unterschiedlichen Standardabweichungen s_E der Energieverteilung der Elektronen und unterschiedlichen Anzahlen $\# e^-$ von Elektronen pro simuliertem Messintervall.

Analyseintervall (eV)	s_E (eV)	$\# e^-$	Δm_ν^2 ((eV) ²)	σ_{stat} ((eV) ²)	
10	0,1	1 Mio	-0,002 ± 0,001	0,0437 ± 0,0008	
		10 Mio	-0,002 ± 0,001	0,0437 ± 0,0008	
		100 Mio	-0,002 ± 0,001	0,0437 ± 0,0008	
	0,2	1 Mio	-0,002 ± 0,001	0,0437 ± 0,0008	
		10 Mio	-0,002 ± 0,001	0,0437 ± 0,0008	
		100 Mio	-0,002 ± 0,001	0,0437 ± 0,0008	
	20	0,1	1 Mio	-0,0034 ± 0,0007	0,0198 ± 0,0005
			10 Mio	-0,0010 ± 0,0007	0,0197 ± 0,0005
			100 Mio	-0,0012 ± 0,0007	0,0195 ± 0,0005
0,2		1 Mio	-0,0021 ± 0,0007	0,0194 ± 0,0005	
		10 Mio	+0,0002 ± 0,0007	0,0194 ± 0,0005	
		100 Mio	-0,0004 ± 0,0007	0,0194 ± 0,0005	
30		0,1	1 Mio	-0,0136 ± 0,0006	0,0176 ± 0,0005
			10 Mio	-0,0044 ± 0,0006	0,0156 ± 0,0005
			100 Mio	-0,0047 ± 0,0006	0,0161 ± 0,0005
	0,2	1 Mio	-0,0096 ± 0,0006	0,0163 ± 0,0005	
		10 Mio	-0,0002 ± 0,0005	0,0154 ± 0,0004	
		100 Mio	-0,0042 ± 0,0006	0,0158 ± 0,0005	
	40	0,1	1 Mio	-0,0213 ± 0,0005	0,0160 ± 0,0005
			10 Mio	-0,0063 ± 0,0005	0,0152 ± 0,0004
			100 Mio	-0,0070 ± 0,0005	0,0148 ± 0,0004
0,2		1 Mio	-0,0157 ± 0,0005	0,0157 ± 0,0005	
		10 Mio	-0,0024 ± 0,0005	0,0144 ± 0,0004	
		100 Mio	-0,0063 ± 0,0005	0,0152 ± 0,0004	

A.2 Ergebnisse aus dem Teilchentracking

In diesem Anhang sind die Simulationsergebnisse aus Kap. 5 zusammengetragen. Das Teilchentracking mit Kassiopiea wurde im Hinblick auf inelastische Streuprozesse innerhalb der Tritiumquelle durchgeführt und ausgewertet.

Tabelle A.7: Trackingergebnisse mit einer Startenergieverteilung der Breite $s_E = 0,1 \text{ eV}$. Insgesamt wurden 10^8 Elektronen getrackt, wovon 26045 Elektronen als nicht detektiert gewertet wurden. Diese Elektronen besaßen nach Streuprozessen einen zu großen Winkel, um transmittiert zu werden.

# incl. Streuungen	# detekt. Elektr.	detekt. Elektr. (%)	relative Unsicherheit (%)	relative Abweichung zu num. Berechnung (%)
0	36775364	36,7754	0,017	-0,12±0,02
1	36738825	36,7388	0,017	-0,13±0,02
2	18391280	18,3913	0,023	0,07±0,02
3	6151758	6,1518	0,040	0,51±0,04
4	1545121	1,5451	0,080	1,07±0,08
5	310458	0,3105	0,18	1,63±0,18
6	52444	0,0524	0,44	3,10±0,45
7	7607	0,0076	1,15	4,8±1,2
8	968	0,0010	3,21	6,8±3,4
9	117	0,0001	9,25	16±10
> 9	13	0,0000		

Tabelle A.8: Trackingergebnisse mit einer Startenergieverteilung der Breite $s_E = 0,2 \text{ eV}$. Insgesamt wurden $1,0039 \cdot 10^8$ Elektronen getrackt, wovon 26062 Elektronen als nicht detektiert gewertet wurden. Diese Elektronen besaßen nach Streuprozessen einen zu großen Winkel, um transmittiert zu werden.

# incl. Streuungen	# detekt. Elektr.	detekt. Elektr. (%)	relative Unsicherheit (%)	relative Abweichung zu num. Berechnung (%)
0	36915879	36,7725	0,017	$-0,13 \pm 0,02$
1	36885014	36,7417	0,017	$-0,13 \pm 0,02$
2	18468632	18,3969	0,023	$0,11 \pm 0,02$
3	6169370	6,1454	0,040	$0,41 \pm 0,04$
4	1551576	1,5456	0,080	$1,10 \pm 0,08$
5	312315	0,3111	0,18	$1,84 \pm 0,18$
6	52437	0,0522	0,44	$2,69 \pm 0,45$
7	7511	0,0075	1,15	$3,1 \pm 1,2$
8	1059	0,0011	3,07	$16,3 \pm 3,6$
9	118	0,0001	9,21	16 ± 10
> 9	27	0,0000		

Danksagung

Ich danke vielmals Prof. Dr. Guido Drexlin, dass ich beim KATRIN-Experiment mitwirken und diese Diplomarbeit anfertigen konnte sowie Prof. Dr. Ulrich Husemann für die Übernahme der Zweitkorrektur.

Ein besonderer Dank gebührt Dr. Markus Steidl und Dr. Markus Hötzel für die sehr gute Betreuung und die vielen konstruktiven Diskussionen während des gesamten Jahres. Ebenso möchte ich mich bei Dr. Ferenc Glück, Stefan Groh, Martin Babutzka und Nancy Wandkowsky für ihre immerzu kompetenten Hilfestellungen bedanken.

Vielen Dank an die fleißigen Leser Dr. Markus Hötzel, Dr. Markus Steidl, Dr. Ferenc Glück, Stefan Groh, Fabian Schneck und Alexander Jansen für ihre vielseitigen inhaltlichen und sprachlichen Korrekturen sowie an Romy und Rebecca Schwarz, die sich trotz seltsamer mathematischer Zeichen und Abbildungen mutig durch eine Menge ebenso bizarrer Sätze gekämpft haben.

Ein herzliches Dankeschön möchte ich an Dr. Markus Hötzel und Sebastian Schams für die spannenden Rätsel und weitere intellektuelle Rituale aussprechen. Ich werde wehmütig auf die Zeit zurückschauen.

Für eine angenehme Arbeitsatmosphäre und die gute Zusammenarbeit bedanke ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen der KATRIN-Kollaboration.

Und nicht zuletzt bedanke ich mich herzlichst bei meiner Familie und meinen Freunden für die dauerhafte Unterstützung auch in schwierigen Zeiten. Eine besondere Motivation gab mir mein Sohn Jacob durch seine bemerkenswerte Entwicklung im vergangenen Jahr und sein zauberhaft strahlendes Lachen.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Reines et al. *Detection of the Free Antineutrino*. Phys. Rev. **117** (1960) 159–173. doi:10.1103/PhysRev.117.159.
- [2] W. Pauli. *Sehr geehrte radioaktive Damen und Herren*. In R. Kronig und V. Weisskopf (Herausgeber) *Collected scientific papers : in 2 volumes* (Interscience Publ., New York 1964).
- [3] Y. Fukuda et al. *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*. Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1562–1567. doi:10.1103/PhysRevLett.81.1562.
- [4] V. N. Aseev et al. *Upper limit on the electron antineutrino mass from the Troitsk experiment*. Phys. Rev. D **84** (2011) 112003. doi:10.1103/PhysRevD.84.112003.
- [5] J. Angrik et al. *KATRIN Design Report 2004* (2005). <http://www.katrin.kit.edu/publikationen/DesignReport2004-12Jan2005.pdf>.
- [6] I. Wolff. *Entfaltung der Energieverlustfunktion beim KATRIN-Experiment*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2011). http://www.uni-muenster.de/Physik.KP/AGWeinheimer/Files/theses/Diplom_Irina_Wolff.pdf.
- [7] C. Kranz. *Optimierung der Methoden und Messprozeduren zur Entfaltung der Energieverlustfunktion beim KATRIN-Experiment*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2011). http://www.uni-muenster.de/Physik.KP/AGWeinheimer/Files/theses/Diplom_Christopher_Kranz.pdf.
- [8] G. Danby et al. *Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos*. Phys. Rev. Lett. **9** (1962) 36–44. doi:10.1103/PhysRevLett.9.36.
- [9] K. Kodama et al. *Observation of tau neutrino interactions*. Phys. Lett. B **504**(3) (2001) 218 – 224. doi:10.1016/S0370-2693(01)00307-0.
- [10] Q. R. Ahmad et al. *Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*. Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 011301. doi:10.1103/PhysRevLett.89.011301.
- [11] N. Jarosik et al. *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*. ApJS **192**(2) (2011) 14. doi:10.1088/0067-0049/192/2/14.

- [12] E. Otten. *The Mainz neutrino mass experiment*. Prog. Part. Nucl. Phys. **32** (1994) 153–171. doi:10.1016/0146-6410(94)90016-7.
- [13] H. V. Klapdor-Kleingrothaus et al. *Evidence for neutrinoless double beta decay*. Mod. Phys. Lett. A **16**(37) (2001) 2409–2420. doi:10.1142/S0217732301005825.
- [14] F. T. Avignone et al. *Double beta decay, Majorana neutrinos, and neutrino mass*. Rev. Mod. Phys. **80** (2008) 481–516. doi:10.1103/RevModPhys.80.481.
- [15] K. Hugenberg. *Design of the electrode system for the KATRIN main spectrometer*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2008). http://www.uni-muenster.de/Physik.KP/AGWeinheimer/thesen/Diplom_Karen_Hugenberg.pdf.
- [16] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik* (de Gruyter, Berlin [u.a.]2006), 4. Auflage. ISBN 978-3-11-018970-4. <http://www.reference-global.com/doi/book/10.1515/9783110200034>.
- [17] M. Babutzka et al. *Monitoring of the operating parameters of the KATRIN Windowless Gaseous Tritium Source*. New J. Phys. **14**(10) (2012) 103046. doi:10.1088/1367-2630/14/10/103046.
- [18] S. Mertens. *Study of Background Processes in the Electrostatic Spectrometers of the KATRIN Experiment*. Doktorarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2012). <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000027058>.
- [19] *Persönliche Kommunikation*.
- [20] KATRIN Collaboration. *Overview of the FPD System Parameters for the SDS Commissioning* (2013). KATRIN internes Dokument.
- [21] F. Harms. *Assembly and First Results of the KATRIN Focal-Plane Detector System at KIT*. Diplomarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2012). http://www.katrin.kit.edu/publikationen/dth_Fabian_Harms.pdf.
- [22] J. W. Liu. *Total cross sections for high-energy electron scattering by H_2 ($^1\Sigma_g^+$), N_2 ($^1\Sigma_g^+$), and O_2 ($^3\Sigma_g^-$)*. Phys. Rev. A **35** (1987) 591–597. doi:10.1103/PhysRevA.35.591.
- [23] S. Trajmar et al. *Electron scattering by molecules II. Experimental methods and data*. Physics Reports **97**(5) (1983) 219 – 356. ISSN 0370-1573. doi:10.1016/0370-1573(83)90071-6.
- [24] Z. Chen und A. Z. Msezane. *Calculation of the excitation cross sections for the $^1\Sigma_u^+$ and $C^1\Pi_u^+$ states in $e\text{-H}_2$ scattering at 60 eV*. Phys. Rev. A **51** (1995) 3745–3750. doi:10.1103/PhysRevA.51.3745.
- [25] H. Nishimura et al. *Differential Cross Sections of Electron Scattering from Molecular Hydrogen I. Elastic Scattering and Vibrational Excitation ($X^1\Sigma_g^+$, $v=0\rightarrow 1$)*. Journal of the Physical Society of Japan **54**(5) (1985) 1757–1768. doi:10.1143/JPSJ.54.1757.

- [26] G. Arrighini et al. *A study of the inelastic scattering of fast electrons from molecular hydrogen*. *Molecular Physics* **41**(6) (1980) 1501–1514. doi:10.1080/00268978000103701.
- [27] J. W. Liu. *Total Inelastic Cross Section for Collisions of H₂ with Fast Charged Particles*. *Phys. Rev. A* **7** (1973) 103–109. doi:10.1103/PhysRevA.7.103.
- [28] H. C. Straub et al. *Absolute partial cross sections for electron-impact ionization of H₂, N₂, and O₂ from threshold to 1000 eV*. *Phys. Rev. A* **54** (1996) 2146–2153. doi:10.1103/PhysRevA.54.2146.
- [29] B. Schram et al. *Ionization cross sections for electrons (0.6–20 keV) in noble and diatomic gases*. *Physica* **31**(1) (1965) 94 – 112. ISSN 0031-8914. doi:10.1016/0031-8914(65)90109-6.
- [30] R. C. Ulsh et al. *Bethe surface, elastic and inelastic differential cross sections, Compton profile, and binding effects for H₂ obtained by electron scattering with 25 keV incident electrons*. *The Journal of Chemical Physics* **60**(1) (1974) 103–111. doi:10.1063/1.1680755.
- [31] F. Glück. *Systematic effects from high and low energy electron interactions* (2003). KATRIN interner Vortrag.
- [32] F. Glück. *eH2.c - Programmcode zu Streuprozessen von Elektronen in molekularem Wasserstoff*. KATRIN internes Dokument.
- [33] M. Hötzel. *Source Spectrum Calculation (Programmdokumentation)* (2009). KATRIN internes Dokument.
- [34] M. Hötzel. *Berechnung von KATRIN Messspektren unter Einziehung der Eigenschaften der fensterlosen gasförmigen Tritiumquelle*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (2009). <http://www.katrin.kit.edu/publikationen/dth-hoetzel.pdf>.
- [35] M. Hötzel. *Simulation and analysis of source-related effects for KATRIN*. Doktorarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2012).
- [36] F. Sharipov. *Numerical calculations of tritium flow through the KATRIN beam line* (2003). KATRIN internes Dokument.
- [37] F. Sharipov. *Calculations of tritium flow between the buffer vessel up to the first vacuum system* (2004). KATRIN internes Dokument.
- [38] F. Sharipov und D. Kalempa. *Separation phenomena in the tritium source and numerical simulations of the turbo-molecular pumps* (2005). KATRIN internes Dokument.
- [39] F. Sharipov et al. *Influence of temperature variations and acoustic waves on the column density. Calculations of the velocity distribution function*. (2009). KATRIN internes Dokument.

- [40] F.u.G. Elektronik GmbH. *Hochspannungs-Netzgeräte HCP-Serie bis Leistungsklasse 4200 W* (2006). Technische Unterlagen / Technical Manual.
- [41] M. Babutzka et al. *The comprehensive guide to KASSIOPEIA* (2011). KATRIN internes Dokument.
- [42] M. Haag. *in Vorbereitung*. Doktorarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2013).
- [43] G. Cowan. *Statistical data analysis*. Oxford science publications (Clarendon Press, Oxford1998). ISBN 0-19-850156-0 ; 0-19-850155-2.
- [44] S. Schams. *in Vorbereitung*. Diplomarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2013).
- [45] F. Glück et al. *Electromagnetic design of the KATRIN large volume air coil system* (2013). In Vorbereitung.
- [46] F. James. *Statistical methods in experimental physics* (World Scientific, New Jersey [u.a.]2006), 2. Auflage. ISBN 981-256-795-X; 981-270-527-9.
- [47] N. Wandkowsky et al. *Development of a strategy for transmission function measurements and analysis* (2012). KATRIN interner Vortrag.
- [48] N. Wandkowsky. *in Vorbereitung*. Doktorarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2013).
- [49] W.-M. Yao et al. *Review of Particle Physics*. Journal of Physics G **33**. <http://pdg.lbl.gov>.
- [50] M. Zacher. *Electromagnetic design and field emission studies for the inner electrode system of the KATRIN main spectrometer*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2009). http://www.uni-muenster.de/Physik.KP/AGWeinheimer/Files/theses/Diplom_Michael_Zacher.pdf.
- [51] H.-J. Korsch. *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik* (Binomi-Verl., Barsinghausen2007), 4. Auflage. ISBN 3-923923-61-9.
- [52] N. Titov. *KATRIN Systematic - Response Function*. KATRIN internes Dokument.
- [53] B. Monreal et al. *KATRIN Rear Section conceptual design report v1.1* (2011). KATRIN internes Dokument.
- [54] D. White et al. *Electron Gun and Magnetic Solenoid Work at UCSB* (2013). KATRIN interner Vortrag.
- [55] W. Käfer. *Sensitivity studies for the KATRIN experiment*. Doktorarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (2012). <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000026021>.

-
- [56] V. Aseev et al. *Energy loss of 18 keV electrons in gaseous T₂ and quench condensed D₂ films*. Eur. Phys. J. D **10** (2000) 39–52.
doi:10.1007/s100530050525.
- [57] G. Merziger und T. Wirth. *Repetitorium höhere Mathematik* (Binomi, Barsinghausen 2010), 6. Auflage. ISBN 978-3-923923-34-2.
- [58] R. Barlow. *Statistics : a guide to the use of statistical methods in the physical sciences*. The Manchester physics series (Wiley, Chichester [u.a.] 1989). ISBN 0-471-92294-3; 0-471-92295-1.