

Optimierung und erste Messung der Transmissionseigenschaften des KATRIN-Hauptspektrometers

Diplomarbeit
von

Nils Stalkamp

An der Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Kernphysik (IEKP)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Erstgutachter:	Prof. Dr. Guido Drexlin
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Ulrich Husemann
Betreuender Mitarbeiter:	Dr. Nancy Wandkowsky
Zweiter betreuender Mitarbeiter:	Dipl.-Phys. Stefan Groh

Bearbeitungszeit: 17. September 2012 – 17. September 2013

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, den 17. September 2013

.....
(Nils Stallkamp)

Inhaltsverzeichnis

1. Neutrinos	1
1.1. Von der Postulierung zur Entdeckung	1
1.2. Neutrinos im Standardmodell der Teilchenphysik	2
1.2.1. Neutrinooszillationen	3
1.3. Neutrinoquellen	4
1.3.1. Natürliche Quellen	5
1.3.2. Künstliche Quellen	7
1.4. Bestimmung der Neutrinomasse	7
1.4.1. Indirekte Methoden	8
1.4.2. Direkte Methoden	8
2. Das KATRIN-Experiment	11
2.1. Übersicht	11
2.2. Messprinzip	12
2.2.1. Der Tritium β -Zerfall	12
2.2.2. MAC-E-Filter	13
2.3. Experimenteller Aufbau	14
2.3.1. Die Tritiumquelle	14
2.3.2. Die Transportsektion	15
2.3.3. Die Spektrometersektion	16
2.3.4. Das Detektorsystem	19
3. Simulations- und Analysepaket Kasper	21
3.1. Die Kassiopeia-Software	21
3.1.1. Magnetische Feldberechnung	23
3.1.2. Elektrische Feldberechnung	26
3.1.3. Teilchenerzeugung und Bahnberechnung	28
3.1.4. Detektorsimulation	32
3.2. Das Programmpaket KTrAP	34
3.2.1. Der LFCS Optimierer	34
3.2.2. Feldliniensimulation	34
3.2.3. Transmissionstools	35
4. LFCS Magnetfeldoptimierung	37
4.1. Die Luftspulensysteme des Hauptspektrometers	37
4.1.1. Low Field Correction System - LFCS	39
4.1.2. Earth Magnetic Field Compensation System - EMCS	39
4.2. Die elektromagnetischen Eigenschaften des Hauptspektrometers	41
4.2.1. Transmissionsbedingung	42
4.2.2. Realisierung der Transmissionsbedingungen	44
4.3. Mathematische Optimierungsmethoden	45
4.3.1. Mehrkriterien-Optimierung	46

4.3.2.	Nelder-Mead Downhill Simplex Algorithmus	49
4.3.3.	Markov-Chain Monte Carlo mit Metropolis-Hastings-Algorithmus . .	51
4.4.	Ergebnisse der Optimierung	53
4.4.1.	$B = 0,36$ mT in der Analysierebene	53
4.4.2.	$B = 0,48$ mT in der Analysierebene	62
4.5.	Zusammenfassung der Optimierung	68
5.	Erste Transmissionsmessungen am KATRIN-Hauptspektrometer	69
5.1.	Die winkelselektive Elektronenkanone	69
5.2.	Die Transmissionsfunktion	72
5.3.	Einfluss des EMCS auf den magnetischen Flussschlauch	73
5.3.1.	Messungen	73
5.3.2.	Simulationen	79
5.3.3.	Schlussfolgerung	83
5.4.	Untersuchung des Detektorverhaltens bei hohen Raten	83
5.4.1.	Problematik	84
5.4.2.	Messungen	88
5.4.3.	Simulationen	92
5.4.4.	Schlussfolgerung	92
6.	Zusammenfassung und Ausblick	95
	Literaturverzeichnis	97
	Abbildungsverzeichnis	104
	Tabellenverzeichnis	105
	Anhang	107
A.	Weitere LFCS Spulenkonfigurationen	107
B.	Schnittpunktberechnung auf Basis des Ratenverhältnisses benachbarter Pixel	109
	Danksagung	113

1. Neutrinos

Die Untersuchung der verschiedenen Eigenschaften der Neutrinos beschäftigt schon seit mehr als achtzig Jahren die Physik-Welt. Eine zentrale Frage ist die nach der endlichen, von Null verschiedenen, Ruhemasse des Neutrinos, sowie den damit einhergehenden Konsequenzen für die Welt des "ganz Kleinen" (Kern- und Teilchenphysik) einerseits und des "ganz Großen" (Kosmologie) andererseits. Weltweit werden vielfältige Anstrengungen unternommen um der Natur der Neutrinos auf die Spur zu kommen. Das KATRIN-Experiment, in dessen Rahmen diese Arbeit erstellt wurde, hat es sich dabei zum Ziel gesetzt, die effektive Ruhemasse des Elektron-Antineutrinos mit einer Sensitivität von 200 meV (90% CL) zu bestimmen. Dieses Kapitel soll der Einführung in die Thematik der Neutrinoophysik dienen. Den Anfang macht die geschichtliche Entwicklung von der Postulation des Neutrinos über den ersten Nachweis, bis hin zur Einordnung in das Standardmodell der Teilchenphysik, gefolgt durch die Neutrinoforschung gewonnenen Hinweisen auf eine Physik jenseits des Standardmodells, den Oszillationsbeobachtungen. Im Anschluss werden natürliche und künstliche Neutrinoquellen näher betrachtet bevor auf die verschiedenen Methoden zur Massenbestimmung eingegangen wird.

1.1. Von der Postulierung zur Entdeckung

Die Entdeckung der Radioaktivität zum Ende des 19. Jahrhunderts durch A. Becquerel [All96] führte in der Folge zu raschen Fortschritten auf dem Gebiet der Kernphysik wie bspw. dem Nachweis von drei unterschiedlichen Strahlungsarten, die konsequenterweise α -, β - und γ -Strahlung genannt wurden.

Im Jahre 1930 postulierte W. Pauli erstmals das Neutrino (damals unter dem Namen Neutron) um den Energieerhaltungssatz angesichts des Energiespektrums des radioaktiven β -Zerfalls "zu retten" [Pau30]. Bis zu diesem Zeitpunkt wurde angenommen, dass es sich bei diesem Zerfall um einen Zwei-Körper-Prozess handelt, bei dem die Zerfallsenergie komplett auf das Elektron übertragen wird. Folglich wurde ein diskretes Elektronen-Energiespektrum erwartet. Überraschenderweise zeigten entsprechende Messungen jedoch ein kontinuierliches Spektrum [Mei23]. Pauli folgerte daraus, dass ein weiteres Teilchen am Prozess beteiligt sein muss, dessen Masse vergleichbar mit der des Elektrons sein sollte, dessen Spin $\frac{1}{2}$ beträgt und welches elektrisch neutral ist. Dieses von ihm "Neutron" genannte Teilchen trägt dabei die Teile der Energie und des Drehimpulses des Zerfalls weg, welche dem Elektron fehlen.

Vier Jahre später stellte der Italiener E. Fermi seine Theorie zum β - Zerfall vor [Fer34].

Er griff dabei Paulis Postulat eines dritten beteiligten Teilchens auf, nannte es jedoch "Neutrino" (italienisch: "kleines Neutron"), um Verwechslungen mit dem zwei Jahre zuvor entdeckten Neutron [Cha32], einem Bestandteil des Atomkerns, zu vermeiden. Der nach dieser Theorie zu erwartende Wirkungsquerschnitt war jedoch so klein, dass ein experimenteller Nachweis zu diesem Zeitpunkt unmöglich erschien.

Erst im Jahre 1956, 22 Jahre nach Fermi und 26 Jahre nach Paulis Postulat gelang C.L. Cowan und F. Reines im sogenannten "Poltergeist-Experiment" der experimentelle Nachweis [CRH⁺56]. Sie nutzten dabei den Prozess des inversen β - Zerfalls

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+, \quad (1.1)$$

bei dem über die Wechselwirkung von Antineutrino und Proton ein Neutron, sowie ein Positron entstehen. Als Neutrinoquelle diente dabei ein Kernreaktor des Savannah River Kraftwerks in South Carolina. Der Detektor bestand im Wesentlichen aus einer wässrigen Kadmium-Chlorid (Cd-Cl) Lösung innerhalb eines Behälters, der zwischen zwei Szintillationszählern angebracht war. Die ankommenden Antineutrinos, die in unmittelbarer Nähe im Reaktor erzeugt wurden, führten in einer Reaktion mit Protonen der Lösung zur Erzeugung eines Neutrons sowie eines Positrons. Das Positron, welches sehr schnell mit einem Elektron in zwei monochromatische Photonen mit einer jeweiligen Energie von $E_\gamma = 0,511 \text{ MeV}$ annihiliert, führt zu einem schnellen Signal in den Szintillationszählern. Das Neutron verliert auf seinem Weg durch die Cd-Cl-Lösung Energie Stöße und wird dadurch abgebremst (moderiert) bevor es von einem Kadmium-Kern eingefangen wird. Der dabei entstandene angeregte Kern geht unter Aussendung weiterer Photonen in den Grundzustand über, wobei auch dieses Signal von den Szintillatoren detektiert wird. Die charakteristische Verzögerung dieses zweiten Signals von wenigen Millisekunden gegenüber dem ersten Signal erlaubte eine klare Identifikation von Antineutrino-Ereignissen gegenüber Untergründereignissen. Der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion ergab sich zu $\sigma = (1,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2$, in Einklang mit Fermis Theorie und Paulis Erwartung [Sch97]. Mit dem Nachweis des Myonneutrinos ν_μ im Jahr 1962 durch J. Steinberger, M. Schwartz und L.M. Lederman [DGG⁺62], sowie des Tauonneutrinos ν_τ durch das DONUT-Experiment im Jahr 2000 [DON01] komplettierte sich das Bild der Neutrinos innerhalb des Standardmodells der Teilchenphysik.

1.2. Neutrinos im Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist die gängigste Theorie, welche die Elementarteilchen mit ihren zugehörigen fundamentalen Wechselwirkungen beschreibt¹. Unterschieden wird dabei zwischen Fermionen (Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen) und Bosonen (Spin-1 Teilchen). Nach dem Standardmodell ist die gesamte sichtbare Materie aus 12 Fermionen (und ihren jeweiligen Antiteilchen) aufgebaut, während die Vermittlung der Wechselwirkung über den Austausch von Bosonen geschieht. Eine zusammenfassende Darstellung findet sich in Abbildung 1.1.

Die Fermionen lassen sich in drei Generationen oder Familien, aufsteigend nach ihrer Masse, sortieren. Gleichzeitig muss noch zwischen zwei verschiedenen Arten von Fermionen unterschieden werden, den Quarks und den Leptonen, siehe dazu Abbildung 1.1. Jede Generation wiederum besteht aus zwei Quarks, zwei Leptonen sowie ihren zugehörigen Antiteilchen. Die elektrische Ladung der Quarks ist nicht ganzzahlig, sondern beträgt $Q = \frac{2}{3}e$ (für up, charm, top) sowie $Q = -\frac{1}{3}e$ (für down, strange, bottom). Sie besitzen desweiteren noch eine Farbladung und können in drei Farbzuständen auftreten. Dies macht sie zu den

¹Die Gravitation wird vom Standardmodell nicht erfasst.

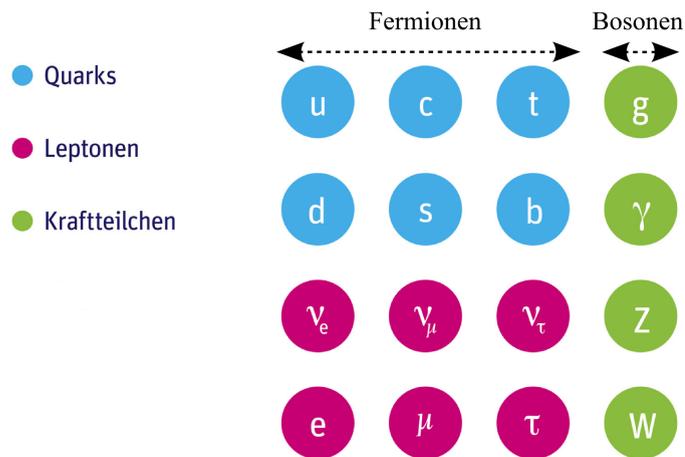


Abbildung 1.1.: Standardmodell der Teilchenphysik. Aus [DES] (mod.) entnommen.

einzigsten Teilchen des Standardmodells, die neben der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen auch der starken Wechselwirkung unterliegen. Vermittelt wird die starke Kraft durch acht Gluonen $g_1 \dots g_8$ als Austauscheteilchen. Eine Besonderheit ist darin zu sehen, dass Quarks nicht als freie Teilchen in der Natur vorkommen. Das sogenannte "Confinement" verhindert dies. Versucht man zwei Quarks zu trennen, vergrößert sich die potentielle Energie mit zunehmender Entfernung, bis genügend Energie vorhanden ist, um ein neues Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen.

Demgegenüber sind die Leptonen nicht zusammengesetzt und man unterscheidet zwischen geladenen ($Q = -e$) Leptonen (Elektron, Myon, Tauon) und ungeladenen Leptonen, den Neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ). Während die geladenen Teilchen der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung unterliegen, können die Neutrinos aufgrund ihrer Ladungsneutralität nur an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen. Vermittelt wird die elektromagnetische Wechselwirkung durch das Photon γ , während die W^\pm -Bosonen sowie das Z^0 -Boson die schwache Kraft übertragen.

Messungen der Helizität H von Neutrinos im Jahre 1958 durch M. Goldberger ergaben eine rein negative Helizität [GGS58]. Die Helizität beschreibt die Projektion des Spins eines Teilchens auf dessen Impulsrichtung. Ist sie rein negativ ($H = -1$), also der Spin dem Impuls entgegen gerichtet, gibt es kein Bezugssystem, das sich schneller bewegen kann und in dem der Impulsvektor dementsprechend seine Richtung ändern würde. Demzufolge müssen sich die Neutrinos mit der maximal möglichen Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit c , bewegen, was wiederum eine Masse von Null erforderlich macht. Aus diesem Grund beschreibt das Standardmodell nur masselose Neutrinos.

1.2.1. Neutrinooszillationen

In Prozessen der schwachen Wechselwirkung werden Neutrinos in drei verschiedenen Sorten (ν_e, ν_μ, ν_τ), den sogenannten Flavours, erzeugt. Wandelt sich eine Sorte in eine andere um, so spricht man von Neutrinooszillationen. Diese können nur stattfinden sofern der Flavour-Eigenzustand $|\nu_\alpha\rangle$ ($\alpha = e, \mu, \tau$), welcher durch den Prozess der schwachen Wechselwirkung festgelegt ist, nicht mit dem jeweiligen Masseneigenzustand $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$) übereinstimmt. Die Masseneigenzustände propagieren mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durch den Raum und führen so zu einer periodischen Oszillation des Flavour-Eigenzustandes. Eine zwingende Voraussetzung für Neutrinooszillationen ist dadurch entsprechend eine von Null verschiedene Neutrinomasse. Die Theorie einer solchen Umwandlung wurde schon im Jahre 1957 von B. Pontecorvo aufgestellt. Bei den in den 1960er und 70er Jahren mit dem

Homestake-Experiment von R. Davis Jr. in der Homestake Goldmine in South Dakota vorgenommenen Untersuchungen des solaren Neutrinoflusses stellte man fest, dass der gemessene Neutrinofluss nur etwa $\frac{1}{3}$ des erwarteten Wertes entsprach [CDRD⁺98]. Dieses im weiteren Verlauf "solares Neutrino Problem" genannte Phänomen entfachte die Diskussion darüber, ob Neutrinooszillationen für die Ergebnisse verantwortlich sein könnten, oder ob das Standard-Sonnen-Modell (SSM) fehlerhaft war.

Der eindeutige Nachweis der Oszillationen wurde erst im Jahre 1998 durch das Super-Kamiokande-Experiment in Japan erbracht [Sup98], wohingegen das solare Neutrino Problem mit Hilfe des SNO-Experiments in Kanada im Jahre 2001 gelöst wurde [SNO02]. Im Gegensatz zum Homestake-Experiment, welches nur auf den Flavour ν_e sensitiv war, erlaubte SNO die Detektion aller drei Flavour-Zustände.

Theoretisch beschreiben lässt sich der Zusammenhang zwischen Flavour- und Masseneigenzuständen über eine unitäre Transformation der Form

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (1.2)$$

Darin beschreibt $U_{\alpha i}$ die unitäre Mischungsmatrix, auch PMNS-Matrix² genannt. Sie ist abhängig von den drei Mischungswinkeln θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} zwischen den verschiedenen Masseneigenzuständen sowie einer CP-verletzenden Phase δ .

Die Wahrscheinlichkeit für eine Oszillation von einem Flavour α in einen anderen Flavour β ist gegeben durch

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2(2\theta_{ij}) \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4} \frac{L}{E_{\nu_\alpha}}\right). \quad (1.3)$$

Darin beschreiben die θ_{ij} die Mischungswinkel, E_{ν_α} die Energie des Neutrino, L die zurückgelegte Wegstrecke und Δm_{ij}^2 die Differenz der Massenquadrate $|m_i^2 - m_j^2|$. Hieraus ist ersichtlich, dass die Oszillationslängen für verschiedene Flavour von ihrer Mischung und dem Massenunterschied der Masseneigenzustände abhängig ist. Für den Fall einer maximalen Mischung ($\theta_{ij} = 45^\circ$) hat sich nach einer Oszillationslänge der Flavour $|\nu_\alpha\rangle$ in den Flavour $|\nu_\beta\rangle$ transformiert.

Oszillationsexperimente sind allerdings dahingehend eingeschränkt, dass sie nur Aussagen über die quadratische Massendifferenz Δm_{ij}^2 zwischen den einzelnen Flavours machen können. Die absolute Massenskala bleibt unbekannt. Die bisher besten Resultate liefert eine Kombination der Daten aus solaren, atmosphärischen und Reaktor-Neutrino Experimenten [FLM⁺12] mit

$$\Delta m_{12}^2 = (7,54 \cdot 10^{-5} \pm 0,20) \text{ eV}^2 \quad (1.4)$$

$$\Delta m_{23}^2 = (2,43 \cdot 10^{-3} \pm 0,13) \text{ eV}^2. \quad (1.5)$$

Des Weiteren ist nicht geklärt, ob die Masseneigenzustände m_1 , m_2 , m_3 hierarchisch ($m_1 < m_2 < m_3$), invertiert ($m_1 < m_2 > m_3$) oder quasi degeneriert ($m_1 \approx m_2 \approx m_3$) angeordnet sind.

1.3. Neutrinoquellen

Neutrinos spielen bei vielen verschiedenen Prozessen der Kern- und Astrophysik eine wichtige Rolle, wobei sich die Größe ihres Flusses und ihrer Energie über viele Größenordnungen hinweg erstreckt.

Abbildung 1.2 zeigt das Spektrum der Energie und Flussdichte für die relevanten Quellen. Diese lassen sich in natürliche, sowie künstliche Quellen unterteilen.

²Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata

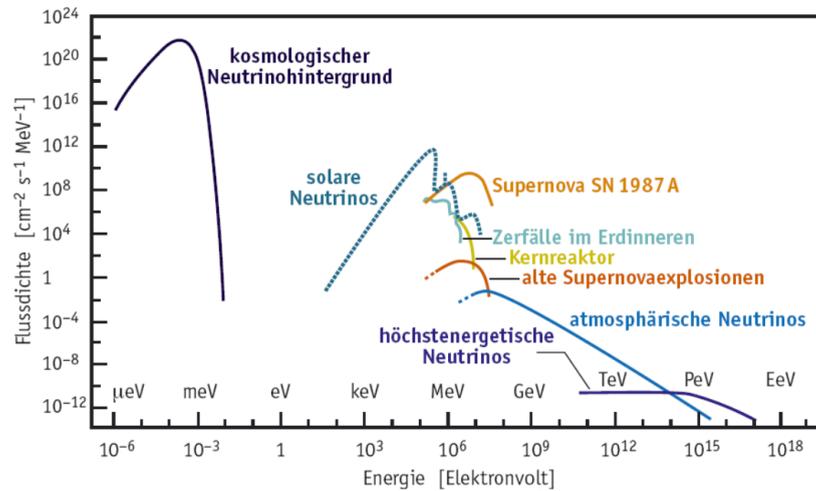


Abbildung 1.2.: Flussdichte der Neutrinos in Abhängigkeit ihrer Energie für verschiedene Neutrinoquellen. Zu beachten ist die doppeltlogarithmische Auftragung. Aus [Dre13] entnommen.

1.3.1. Natürliche Quellen

In der Natur tritt eine Vielzahl von Quellen in Erscheinung, die im Folgenden kurz erläutert werden.

Primordiale Neutrinos

Bei den primordialen Neutrinos handelt es sich um die ältesten Neutrinos im Universum. Sie entstanden in Prozessen der schwachen Wechselwirkung unmittelbar nach dem Urknall. Aufgrund der vorherrschenden hohen Temperaturen und Energiedichten waren sie im thermischen Gleichgewicht mit der restlichen Materie, vorwiegend über folgende Reaktionen:



Demnach wandelten sich Protonen und Neutronen etwa gleich häufig ineinander um. Etwa eine Sekunde nach dem Urknall fiel die Temperatur auf etwa 10^{10} K, was einer Energie von $E = 1$ MeV entspricht. Zu diesem Zeitpunkt entkoppelte die schwache Wechselwirkung und mit ihr die Neutrinos. Im heutigen Universum beträgt die Dichte der primordialen Neutrinos $336 \frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^3}$. Aufgrund der Expansion des Universums besitzen sie heute lediglich noch eine Energie im μeV -Bereich, was einer Temperatur von 1,9 K entspricht und einen Nachweis bisher unmöglich macht.

Durch ihre enorme Anzahl haben sie, trotz ihrer geringen Masse, die Strukturbildung im Universum entscheidend beeinflusst, weshalb der genaue Wert ihrer Masse ein wichtiger Parameter der Kosmologie ist. Gerade durch diese kleine Masse reduzieren sie den Dichtekontrast im Universum und gelten zudem als Kandidat für einen Teil der Dunklen Materie (HDM³).

Solare Neutrinos

Solare Neutrinos entstehen bei thermonuklearen Fusionsprozessen im Zentrum von Sternen. Für einen typischen Hauptreihenstern wie unsere Sonne dominiert der sogenannte

³Heiße Dunkle Materie

ppI-Zyklus die Energieproduktion



Hinzu kommen weitere Prozesse, die jedoch ebenfalls ausschließlich ν_e produzieren. In größeren Sternen wird der CNO-Zyklus zunehmend wichtig, der ${}^{12}\text{C}$ in einem katalytischen Prozess zur Erzeugung von ${}^4\text{He}$ nutzt.

Aufgrund der Vielzahl an möglichen Fusionsreaktionen erstreckt sich das Energiespektrum solarer Neutrinos über einen großen Energiebereich und lässt direkte Rückschlüsse auf die physikalischen Prozesse im Sonneninneren zu. Erforscht werden solare Neutrinos durch eine Vielzahl an Experimenten wie beispielsweise SNO in Kanada [SNO02] oder Super-Kamiokande [Sup98] in Japan.

Supernova-Neutrinos

Diese Neutrinos entstehen bei Supernovae des Typs II. Dabei handelt es sich um sogenannte Kernkollaps-Supernovae, die am Ende der Existenz eines massereichen Sterns mit $M > 8M_\odot$ stehen. Die Fusionsprozesse enden im Kern mit der Produktion von Eisen, da dieses Element die höchste Bindungsenergie pro Nukleon aufweist. Aufgrund des nun fehlenden Strahlungsdrucks gegen die Gravitation setzt eine langsame Kontraktion des Kerns ein. Der "freie Fall" kann zunächst noch durch den Entartungsdruck der Elektronen verhindert werden. Durch steigende Temperaturen treten jedoch vermehrt Photodesintegrationsprozesse auf, bei denen das produzierte Eisen zertrümmert wird. Der so entstehende Energieverlust, gepaart mit Prozessen des Elektroneneinfangs



auch Neutronisierung oder Deleptonisierung⁴ genannt, sorgt dafür, dass die Zahl der für den Entartungsdruck relevanten Elektronen abnimmt. Der Kollaps gewinnt an Geschwindigkeit bevor er schließlich am stark komprimierten Kern zurückprallt ("core-bounce") und die Gasschichten absprengt. Die Supernova nimmt somit ihren Lauf. Im Zentrum bleibt ein Neutronenstern mit Temperaturen von $T = 10^{11}$ K als Überrest zurück⁵.

Ein Neutrinosignal, ausgelöst durch eine Typ-II Supernova, besteht zunächst ausschließlich aus ν_e aufgrund des Elektroneneinfangs, gefolgt von Neutrinos jeglicher Sorte ν_e , ν_μ , ν_τ durch die sogenannte "Neutrinoabkühlung", bei der der Stern durch Paarbildungsprozesse eine enorme Menge an Energie verliert. Aufgrund ihres geringen Wirkungsquerschnitts sind die Supernova-Neutrinos außerdem einige Stunden vor einem optischen Supernova-Signal auszumachen, was einer Art Frühwarnsystem gleich kommt. Mit IceCube am Südpol wurde unlängst das bis dato größte Neutrinoexperiment mit einem Volumen von 1 km^3 errichtet [HK10]. Mit ihm lassen sich noch $10^5 - 10^6$ Neutrinos einer Supernova in 10 kpc^6 Entfernung detektieren.

Atmosphärische Neutrinos

Hochenergetische kosmische Strahlung besteht im Wesentlichen aus Protonen, α -Teilchen sowie einigen wenigen schweren Kernen. Treten diese in Wechselwirkung mit Sauerstoff oder Stickstoff in der oberen Erdatmosphäre, so wird ein Teilchenschauer erzeugt. In einer

⁴Man bezeichnet den Vorgang deshalb als Deleptonisierung, da Elektronen verloren gehen und die entstehenden Neutrinos den Kern und damit den Stern verlassen können.

⁵Besaß der kollabierte Stern eine Anfangsmasse von $M > 30M_\odot$, so wird ein schwarzes Loch erzeugt und es bleibt kein Sternüberrest zurück.

⁶ $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ Lichtjahre}$

Kaskade aus Sekundärteilchen entstehen unter anderem Pionen (π^\pm) und Kaonen (K^\pm), die in Myonen (μ^\pm) und Neutrinos ($\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$) zerfallen.

$$K^\pm \longrightarrow \pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu \quad (1.11)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \bar{\nu}_\mu/\nu_\mu + \nu_e/\bar{\nu}_e \end{array} \quad (1.12)$$

Das Energiespektrum der resultierenden Neutrinos ist abhängig von der Energie der Primärteilchen und dementsprechend sehr breit. Gleichzeitig werden nur Myon- sowie Elektronneutrinos in einem Verhältnis von zwei zu eins erzeugt. Super-Kamiokande [Sup98] oder auch IceCube [HK10] sind sensitiv auf atmosphärische Neutrinos.

Geo-Neutrinos

Die durch radioaktive β -Zerfälle von ^{40}K , ^{232}Th , ^{238}U im Erdkern, dem Erdmantel und der Erdkruste erzeugten Neutrinos werden als Geo-Neutrinos bezeichnet. Dabei handelt es sich lediglich um Elektronneutrinos, die beispielsweise vom Borexino-Experiment [Bor13] in Italien untersucht werden.

1.3.2. Künstliche Quellen

Neben den natürlichen Neutrinoquellen gibt es auch künstliche, also vom Menschen erzeugte, Neutrinos.

Reaktor-Neutrinos

Die Reaktor-Neutrinos stellen den größten Beitrag zum künstlichen Neutrinofluss dar. In einem Kernreaktor entstehen neutronenreiche Spaltprodukte, die über wiederholten β -Zerfall eine Vielzahl an Elektron-Antineutrinos erzeugen. Aufgrund der genauen Kenntnis ihrer Energie, sowie der Anzahl an erzeugten Neutrinos (pro Spaltung im Mittel sechs Stück) lässt sich ihr Oszillationsverhalten mit Hilfe von Detektoren in einem Abstand der Oszillationslänge L_ν sehr gut untersuchen. Mit Hilfe der Reaktor-Neutrinos gelang den Experimenten Double Chooz [Dou12], Reno [REN12] und Daya Bay [Day12] 2012 die Vermessung des letzten noch unbekanntem Mischungswinkels θ_{13} .

Beschleuniger-Neutrinos

Mit Hilfe von Beschleuniger-Neutrinos ist man in der Lage das Oszillationsverhalten von Myon-Neutrinos zu untersuchen, da diese in einem Kernreaktor nicht auftreten. Das CNGS-Experiment am CERN erzeugt durch Beschuss eines Graphittargets mit Protonen einer Energie von 400 GeV, eine große Zahl an Pionen und Kaonen, die wie im Fall der atmosphärischen Neutrinos in Myonen und Myon-Neutrinos zerfallen. Dabei ist der Aufbau so ausgerichtet, dass der Neutrinostrahl das 730 km entfernte Gran Sasso Massiv in Italien trifft. Der dort installierte OPERA-Detektor soll die erwartete Umwandlung in Tau-Neutrinos nachweisen [OPE10].

1.4. Bestimmung der Neutrinomasse

Wie in Kapitel 1.3 gezeigt spielen Neutrinos bei einer Vielzahl an physikalischen Vorgängen eine wichtige Rolle. Durch den Nachweis von Neutrinooszillationen wurde deutlich, dass sie entgegen den Annahmen des Standardmodells nicht masselos sein können. Gleichwohl macht es ihre Durchdringungsfähigkeit sehr schwer sie zu detektieren und somit ihre Eigenschaften zu untersuchen. Zudem ist die Natur der Neutrinos (Dirac- oder Majorana-Teilchen) noch ungeklärt. Dadurch muss für die Bestimmung der Masse auf unterschiedliche Verfahren zurückgegriffen werden.

Oszillationsexperimente zum einen sind nur in der Lage Aussagen über die quadratischen Massendifferenzen Δm_{ij}^2 zu machen, während die absolute Skala unbekannt bleibt. Entsprechend müssen weitere Methoden genutzt werden, wie sie im Folgenden erläutert werden.

1.4.1. Indirekte Methoden

Die indirekten Methoden setzen auf die Beobachtungen der Kosmologie um Aussagen über die Masse der Neutrinos treffen zu können. Von entscheidender Bedeutung sind dabei die primordialen Neutrinos, wie sie in Abschnitt 1.3 beschrieben wurden, da sie maßgeblich zur Strukturbildung im frühen Universum beigetragen haben. Aufgrund ihrer niedrigen Energie im μeV -Bereich sind sie bislang noch nicht direkt nachgewiesen worden. Werden Daten von Experimenten der Himmelsdurchmusterung (LSS⁷) [SDS12] mit Untersuchungen der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB⁸), sowie Messungen des Lyman- α -Waldes kombiniert, lässt sich eine Obergrenze der Neutrinomasse festlegen. Neueste Resultate auf Basis erster Ergebnisse des Planck-Teleskops [A⁺13] ergeben eine Obergrenze von

$$\sum_{\alpha} m_{\nu_{\alpha}} < 0,23 \text{ eV} \quad (95\% \text{ CL}) \quad (1.13)$$

für die Summe aller Neutrino-Flavour α .

Diese Methode hat jedoch den Nachteil, dass sie sehr stark vom verwendeten Modell der kosmischen Entwicklung sowie den sie beschreibenden Parametern abhängt.

1.4.2. Direkte Methoden

Demgegenüber stehen die direkten Methoden der Massenbestimmung, welche auf dem radioaktiven β -Zerfall beruhen. Dabei wandelt sich innerhalb des Atomkerns ein Neutron in einem Prozess der schwachen Wechselwirkung in ein Proton um, unter Aussendung eines Elektrons sowie eines Elektron-Antineutrinos. Die freiwerdende Zerfallsenergie verteilt sich statistisch auf Elektron und Neutrino, wodurch ein kontinuierliches Energiespektrum entsteht (siehe Abbildung 2.2 im nächsten Kapitel, sowie Abschnitt 1.1 in diesem Kapitel). Eine von Null verschiedene Neutrinomasse macht sich nur durch eine kleine Änderung der Kurvenform am Endpunkt des Spektrums bemerkbar. Durch genaue Bestimmung der Elektronenergie in diesem Bereich und einer entsprechenden Kurvenanpassung lässt sich dann die Neutrinomasse ermitteln. Dazu ist eine starke Quelle mit möglichst niedriger Endpunktsenergie E_0 von Nöten, da der Anteil an nützlichen Elektronen mit E_0^2 fällt. Die vielversprechendsten Kandidaten sind das Wasserstoffisotop Tritium ${}^3\text{H}$, sowie das Rheniumisotop ${}^{187}\text{Re}$.

Rhenium

Rhenium besitzt die niedrigste Endpunktsenergie aller β -Strahler mit $E_0 = 2,47 \text{ keV}$ was es eigentlich zur idealen Quelle für Neutrinomassenmessungen macht. Das Problem ist jedoch die sehr große Halbwertszeit von $t_{1/2} = 4,35 \cdot 10^{10}$ Jahren, welche in einer geringen Aktivität resultiert. Dementsprechend wären große Mengen von Rhenium als Quellmaterial nötig, um eine ausreichend hohe Intensität zu gewährleisten. Weiterhin weist es aufgrund seiner Größe eine komplexe Kernstruktur auf, wodurch die Berechnung des Energiespektrums erschwert wird. Eingesetzt wird es in Form sogenannter kryogener Bolometer beim MARE-Experiment [Nuc12]. Ein solcher Aufbau verwendet die Quelle gleichzeitig

⁷Large Scale Survey: Bezeichnet die Untersuchung der Verteilung großräumiger Strukturen wie Galaxienhaufen im Universum.

⁸Cosmic Microwave Background: Das "photonische" Analogon zum kosmischen Neutrinohintergrund. Er entstand 380000 Jahre nach dem Urknall durch die Rekombination von freien Protonen und Elektronen zu neutralem Wasserstoff.

als Detektor, indem der Temperaturanstieg im Rhenium-Kristall, der durch einen Zerfall verursacht wird, gemessen wird. Aufgrund der sehr geringen zu erwartenden Temperaturerhöhung muss das gesamte System auf unter 0,1 K abgekühlt werden. Die Auslese übernehmen sogenannte Mikro-Kalorimeter. Bisherige Resultate des Milano-Experiments [SA⁺04] ergaben eine Obergrenze für die Masse von $m_{\nu_e} < 15$ eV.

Tritium

Demgegenüber besitzt Tritium, als β -Strahler mit der zweitniedrigsten Endpunktsenergie von $E_0 = 18,575$ keV mehrere Vorteile. Zum einen ist die Kernstruktur sehr einfach, wodurch sich das Kernmatrixelement und dementsprechend auch das Energiespektrum einfacher berechnen lassen. Des Weiteren hat es durch seine relativ kurze Halbwertszeit von $t_{1/2} = 12,3$ Jahren eine viel größere Aktivität, so dass die benötigte Menge an Quellmaterial deutlich reduziert werden kann. Die Detektionsmethode unterscheidet sich ebenfalls von der im Fall von Rhenium. Hierbei kommt ein elektromagnetisches Filterprinzip, genannt MAC-E-Filter (siehe dazu Abschnitt 2.2.2) zum Einsatz. Bislang ist es Tritium-Experimenten in Mainz [KBB⁺05] und Troitsk [Lob02] gelungen eine Obergrenze für die Masse des Elektron-Antineutrinos zu bestimmen. Sie beträgt $m_{\nu_e} < 2,05$ eV (95% CL). Das KATRIN-Experiment [KAT05] reiht sich in diese Kategorie der Tritium-Experimente ein und ist dabei auf eine Masse von 0,2 eV sensitiv.

Neutrinoloser doppelter β -Zerfall

Während Rhenium und Tritium über den "einfachen" β -Prozess zerfallen, gibt es auch Atomkerne, bei denen dieser Übergang aus energetischen Gründen verboten ist. Für solche Kerne besteht nur die Möglichkeit über den doppelten β -Zerfall, einen Prozess zweiter Ordnung, zu zerfallen. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist so klein, dass die Halbwertszeit dieser Kerne im Bereich von $t_{1/2} \geq 10^{20}$ Jahren liegt. Möglich ist der Zerfall nur für sogenannte gg-Kerne die eine gerade Anzahl an Protonen und Neutronen besitzen. Aufgrund der Erzeugung zweier Neutrinos wird er auch als $2\nu\beta\beta$ bezeichnet. Das Energiespektrum ist kontinuierlich wie beim einfachen β -Zerfall, siehe Abbildung 1.3.

Handelt es sich bei Neutrinos um Majorana-Teilchen, d.h. $\nu_m = \bar{\nu}_m$, so besteht auch die Möglichkeit des neutrinolosen doppelten β -Zerfalls $0\nu\beta\beta$, welcher in Abbildung 1.3 dargestellt ist. Im ersten Schritt zerfällt ein Neutron durch den einfachen β -Zerfall in ein Proton, ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino:



Sofern es sich um Majorana-Teilchen handelt, besteht die Möglichkeit, dass das Elektron-Antineutrino von einem anderen Neutron des Kerns als Neutrino absorbiert wird, welches dadurch einen induzierten β -Zerfall durchführt



Das Standardmodell besagt, dass nur linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen. Demzufolge hätte bei der Umwandlung im Kern ein Helizitätsflip stattfinden müssen. Ein solcher Effekt ist jedoch nur realisierbar, sofern es über eine Lorentztransformation möglich ist ein Bezugssystem zu finden, welches sich schneller bewegt als das des Neutrino. Damit dieses Bezugssystem existiert muss die Geschwindigkeit des Neutrinos kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein, $v_\nu < c$, und entsprechend eine Masse größer Null $m_\nu > 0$ besitzen.

Das Spektrum würde sich als monoenergetische Linie deutlich vom $2\nu\beta\beta$ Fall unterscheiden, siehe Bild 1.3.

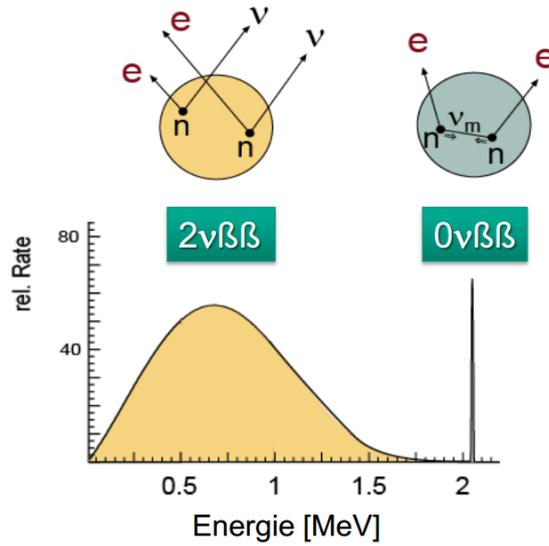


Abbildung 1.3.: Neutrino-behafteter doppelter β -Zerfall: Erzeugung von zwei Elektronen und zwei Neutrinos sowie zugehöriges kontinuierliches Energiespektrum (**links**). Neutrinoloser doppelter β -Zerfall: Erzeugung und Absorption des Majorana-Neutrinos. Das Energiespektrum besteht aus einem monoenergetischen Peak (**rechts**). Aus [Dre13] entnommen.

Im Unterschied zum einfachen β -Zerfall ist der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall sensitiv auf die effektive Majorana-Neutrinomasse $m_{\beta\beta}$, die abhängig ist von der Halbwertszeit, der Endpunktenergie sowie dem Kernmatrixelement. Gerade die Abhängigkeit von den Berechnungen der Matrixelemente, welche mit großen Fehlern behaftet sind, machen diese Methode, wie auch die kosmischen Verfahren stark modellabhängig.

Erste Ergebnisse zum $0\nu\beta\beta$ -Zerfall lieferte das Heidelberg-Moskau-Experiment mit einer Obergrenze der Majoranamasse von $m_{\beta\beta} < 0,39$ eV was einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = 1,5 \cdot 10^{25}$ Jahren entspricht [KHKKD01]. Bei diesem Ergebnis wird jedoch sehr kontrovers diskutiert, ob es sich tatsächlich um ein Signal oder statistische Fluktuationen handelt. Nach neuesten Resultaten von Gerda, einem Nachfolgeexperiment [GER13a], welches durch Steigerung der Targetmasse und bessere Untergrundreduktion die Sensitivität erhöhen konnte, werden die Ergebnisse des Heidelberg-Moskau-Experiment über den Nachweis des $0\nu\beta\beta$ -Zerfall widerlegt [GER13b].

2. Das KATRIN-Experiment

Das **K**arlsruhe **T**ritium **N**eutrino **E**xperiment, kurz KATRIN, hat das Ziel die effektive Masse des Elektron-Antineutrinos zu bestimmen. Dazu wird der β -Zerfall von Tritium nahe am kinematischen Endpunkt des Spektrums, bei etwa $E_0 \approx 18,6$ keV mit einer Sensitivität von $m_{\bar{\nu}_e} = 200$ meV (90% CL), untersucht. Hierbei werden die Vorläuferexperimente in Mainz und Troitsk in der Sensitivität um einen Faktor 10 übertroffen.

Der Vorteil dieser Methode liegt in ihrer Modellunabhängigkeit, da sie allein auf Energie- und Impulserhaltung bei der Untersuchung der Kinematik des Zerfalls beruht.

In diesem Kapitel wird zunächst ein kurzer Überblick über das System gegeben (Abschnitt 2.1). Im Anschluss wird das Messprinzip von KATRIN vorgestellt, welches eine ultra-luminose β -Quelle mit einem hochauflösenden elektrostatischen Spektrometer des MAC-E-Filter Typs verbindet (Abschnitt 2.2). Zum Schluss werden die Komponenten des experimentellen Aufbaus im Einzelnen erläutert (Abschnitt 2.3).

2.1. Übersicht

KATRIN wird auf dem Gelände des Campus Nord (ehemals FZK¹), des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) errichtet. Das im Nachbargebäude ansässige Tritiumlabor (TLK) besitzt die nötige Infrastruktur für die Versorgung mit Tritium und macht diesen Standort für das Experiment ideal.

Der etwa 70 m lange Aufbau, welcher in Abbildung 2.1 gezeigt ist, beginnt mit der sogenannten "rear section" (a) zur Überwachung und Kalibration der Quelle. Im Anschluss daran befindet sich die fensterlose gasförmige Tritiumquelle (b), in der Elektronen durch den β -Zerfall von Tritium erzeugt werden. An die Quelle schließt sich die Transportsektion (c) bestehend aus einer differentiellen und einer kryogenen Pumpstrecke an, die der Reduktion des Tritiumflusses dienen. Der folgende Abschnitt (d) beinhaltet zunächst das Vorspektrometer, das die Elektronen vorselektiert, gefolgt vom Hauptspektrometer, welches die verbliebenen Elektronen hinsichtlich ihrer Energie analysiert. Das KATRIN-Experiment schließt mit dem Detektorsystem (e) zum Zählen der transmittierten Elektronen ab.

¹Forschungszentrum Karlsruhe

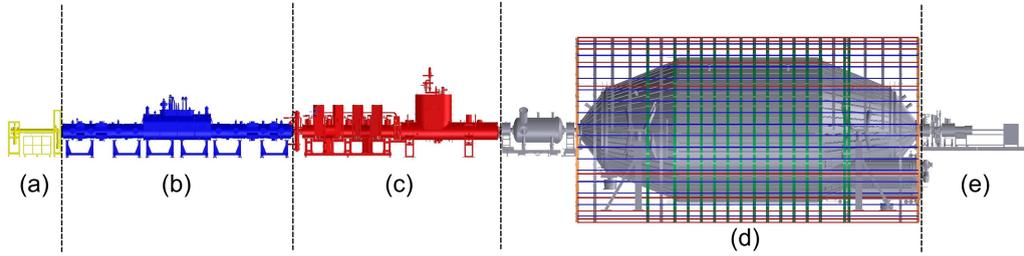
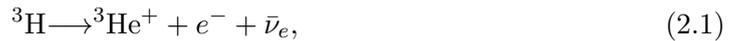


Abbildung 2.1.: Aufbau des KATRIN-Experiments bestehend aus der "rear section" (a), der Quelle (b), der Transportstrecke (c), den Spektrometern (d) sowie dem Detektor (e).

2.2. Messprinzip

2.2.1. Der Tritium β -Zerfall

Das KATRIN-Experiment untersucht Elektronen aus dem Tritium- β -Zerfall



insbesondere nahe des Endpunkts von 18,6 keV, um die Masse des Elektron-Antineutrinos bestimmen zu können. Dabei handelt es sich um einen Prozess der schwachen Wechselwirkung, bei dem ein Neutron über ein virtuelles Austauschteilchen W^- in ein Proton umgewandelt wird. Gleichzeitig werden ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino emittiert, um die Ladung Q und die Leptonenzahl L zu erhalten. Aus dem Tritiumatom ist hierdurch ein ionisierter ${}^3\text{He}^+$ -Kern geworden.

Die Energie dieses Prozesses von $E_0 = 18,6$ keV verteilt sich statistisch auf Elektron und Neutrino, wobei der Rückstoß auf den Kern aufgrund der niedrigen Quelltemperatur von $T = 30$ K vernachlässigt werden kann. Das kontinuierliche Energiespektrum lässt sich mit Hilfe von Fermis Theorie des β -Zerfalls [Fer34] folgendermaßen berechnen:

$$\frac{dN}{dE} = C \cdot F(Z, E) p(E + m_e c^2) (E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - m_\nu^2} \Theta(E_0 - E - m_\nu), \quad (2.2)$$

mit der Fermi-Funktion $F(Z, E)$, dem Elektronenimpuls p , der kinetischen Energie E , der Endpunktsenergie E_0 , der Elektronenmasse m_e , der Vakuumlichtgeschwindigkeit c sowie der Stufenfunktion Θ . Die Konstante

$$C = \frac{G_F^2}{2\pi^3} \cos^2 \Theta_C |\mathcal{M}|^2 \quad (2.3)$$

setzt sich dabei aus der Fermi-Konstanten G_F , dem Cabibbo-Winkel Θ_C , sowie dem Kernmatrixelement \mathcal{M} zusammen.

Dabei macht sich eine endliche Neutrinomasse nur nahe der Endpunktsenergie bemerkbar. Exemplarisch sei die Variation in Abbildung 2.2 für eine Neutrinomasse von $m_{\nu_e} = 0$ eV und $m_{\nu_e} = 1$ eV gezeigt. Da allerdings nur ein Bruchteil von $\approx 2 \cdot 10^{-13}$ aller Elektronen eine Energie im relevanten Bereich nahe des Endpunktes besitzt, werden hohe Anforderungen an die Stärke der Quelle sowie die Energieauflösung des Spektrometers gestellt.

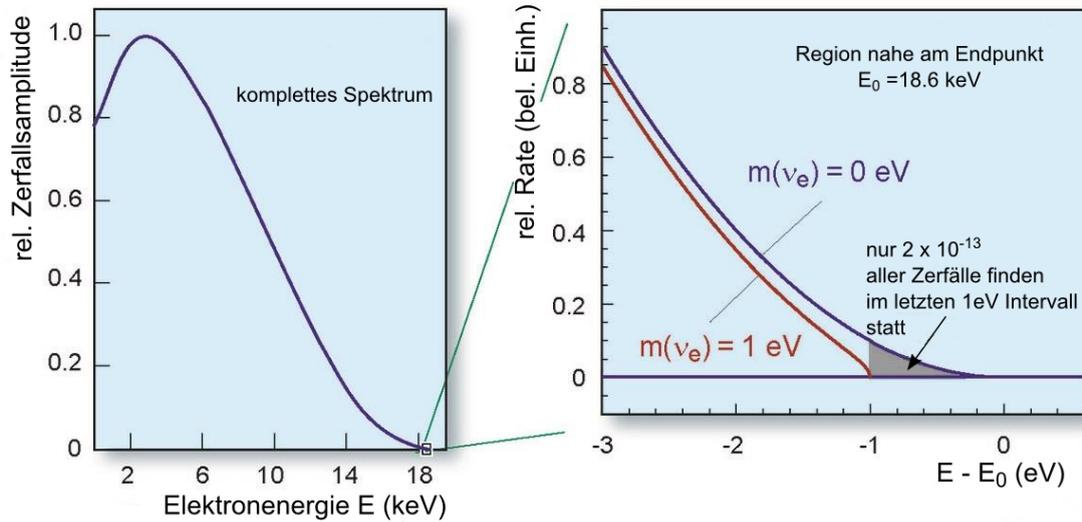


Abbildung 2.2.: Energiespektrum der Elektronen des β -Zerfalls. Aus [KAT] (mod.) entnommen.

2.2.2. MAC-E-Filter

Die Sensitivität von KATRIN hängt in besonderem Maße von der Fähigkeit ab den Bereich nahe des kinematischen Endpunkts des Tritium- β -Zerfalls genau vermessen zu können. Aufgrund der erwarteten geringen Zählrate in diesem Bereich (siehe Abbildung 2.2 rechts) wird ein Spektrometer mit einer möglichst effektiven Ausnutzung aller Elektronen aus einer Quelle hoher Luminosität, benötigt. Des Weiteren ist eine geringe Untergrundrate bei gleichzeitiger hoher Energieauflösung wichtig, um die Form des Spektrums vermessen zu können.

Um dies zu gewährleisten kommt ein System zum Einsatz, das auf dem Prinzip des MAC-E-Filters² beruht. Die Technik wurde erstmals in [BPT80] beschrieben und bei den Vorläuferexperimenten in Mainz [KBB⁺05] und Troitsk [Lob02] erfolgreich angewandt.

Der MAC-E-Filter kombiniert eine magnetische, adiabatische Kollimation der Elektronenimpulse mit einem elektrostatischen Filter. Der prinzipielle Aufbau wird aus Abbildung 2.3 ersichtlich.

An beiden Enden des Spektrometers liefern zwei supraleitende Solenoide ein axialsymmetrisches, magnetisches Führungsfeld für die Elektronen, die durch den Zerfall von Tritium in der Quelle entstanden sind. Sie führen aufgrund der auf sie wirkenden Lorentzkraft $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ eine Zyklotronbewegung um die Feldlinien aus, wodurch ein Teil ihrer kinetischen Energie in Form von transversaler Energie E_\perp vorliegt. Da das elektrostatische Retardierungspotential U_0 jedoch nur auf die longitudinale Komponente E_\parallel sensitiv ist würde eine Vernachlässigung des transversalen Beitrages die Zählrate drastisch reduzieren.

Aus diesem Grund muss die transversale Energie in longitudinale Energie umgewandelt werden, um sie der Analyse zugänglich zu machen. Dies geschieht durch eine Reduktion des Magnetfeldes von den Spektrometerenden hin zum Zentrum um vier Größenordnungen auf etwa $B = 0,3$ mT. Ist der Magnetfeldgradient und damit die Änderung des Feldes pro Zyklotronumdrehung ausreichend klein, so geschieht die Umwandlung der Energie adiabata-

²Magnetic Adiabatic Collimation combined with an Electrostatic Filter

tisch und das orbitale magnetische Moment

$$\mu = \frac{E_{\perp}}{B} \quad (2.4)$$

ist eine Erhaltungsgröße. Aus Gleichung 2.4 ist direkt ersichtlich, dass die Energieauflösung ΔE eines MAC-E-Filters nur vom Verhältnis der Magnetfelder bestimmt und aufgrund eines Restes an Transversalenergie begrenzt ist:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B_{\min}}{B_{\max}}. \quad (2.5)$$

Für die Parameter des KATRIN-Experiments mit einer Energie der Elektronen von $E_0 = 18,6$ keV, sowie einem minimalen Magnetfeld von $B_{\min} = 0,3$ mT und maximalen Magnetfeld von $B_{\max} = 6$ T am sogenannten Pinch-Magnet, ergibt sich eine Energieauflösung von

$$\Delta E = 0,93 \text{ eV}. \quad (2.6)$$

Der maximale Anteil an longitudinaler Energie wird (ohne elektrostatisches Retardierungspotential) im Bereich des kleinsten magnetischen Feldes B_{\min} im Zentrum erreicht (siehe Abbildung 2.3 unten). Gleichzeitig besitzt das Retardierungspotential U_0 dort sein Maximum, wodurch an dieser Stelle über das Weiterkommen der Elektronen entschieden wird, man spricht von der Analysierebene. Besitzen die Elektronen eine Energie $E - qU_0 > \Delta E$ so werden sie transmittiert, falls $E - qU_0 < 0$ reflektiert. Im Bereich dazwischen, also für $0 \leq E - qU_0 \leq \Delta E$ besitzen sie eine Transmissionswahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1. Der genaue Wert ist abhängig von ihrer Überschussenergie $E - qU_0$. Wird diese größer, so steigt auch die Transmissionswahrscheinlichkeit, da Elektronen mit größeren polaren Winkeln transmittiert werden können.

So wie die Umwandlung von transversaler in longitudinale Energie für ein schwächer werdendes Feld funktioniert, lässt sich das Prinzip auch in umgekehrter Richtung anwenden. Erreicht der Winkel zwischen Magnetfeld und Impulsvektor $\theta = 90^\circ$, so besitzt das Elektron lediglich transversale Energie und wird reflektiert. Da die Elektronen in der Quelle von KATRIN, siehe Abbildung 2.4, bei einem magnetischen Fluss von $B_{\text{start}} = 3,6$ T gegenüber dem Pinch-Magneten im Spektrometer mit $B_{\max} = 6$ T erzeugt werden, werden nur Elektronen mit einem maximalen Startwinkel

$$\theta_{\max} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{B_{\text{start}}}{B_{\max}}} \right) = 50,77^\circ \quad (2.7)$$

akzeptiert. Diese Form der Selektion wird magnetischer Spiegel genannt und dient der Entfernung von Elektronen, die aufgrund ihrer großen Winkel und der damit verbundenen längeren Wegstrecke in der Quelle eine erhöhte Streuwahrscheinlichkeit haben.

2.3. Experimenteller Aufbau

2.3.1. Die Tritiumquelle

Als Quelle kommt bei KATRIN eine fensterlose, gasförmige Tritiumquelle (WGTS³) zum Einsatz. Sie besteht aus einem 10 m langen Strahlrohr aus Edelstahl, welches einen Durchmesser von 90 mm besitzt. Im Zentrum wird molekulares Tritium mit einer Temperatur von 27 K und einer Isotopenreinheit von $\epsilon_T > 95$ % durch ein Kapillarsystem in die Kammer eingelassen. Über Diffusion kann es sich frei in beide Richtungen bewegen und erreicht nach etwa einer Sekunde Driftzeit die Enden der Sektion. Dort wird das Gas mit Hilfe von

³Windowless Gaseous Tritium Source

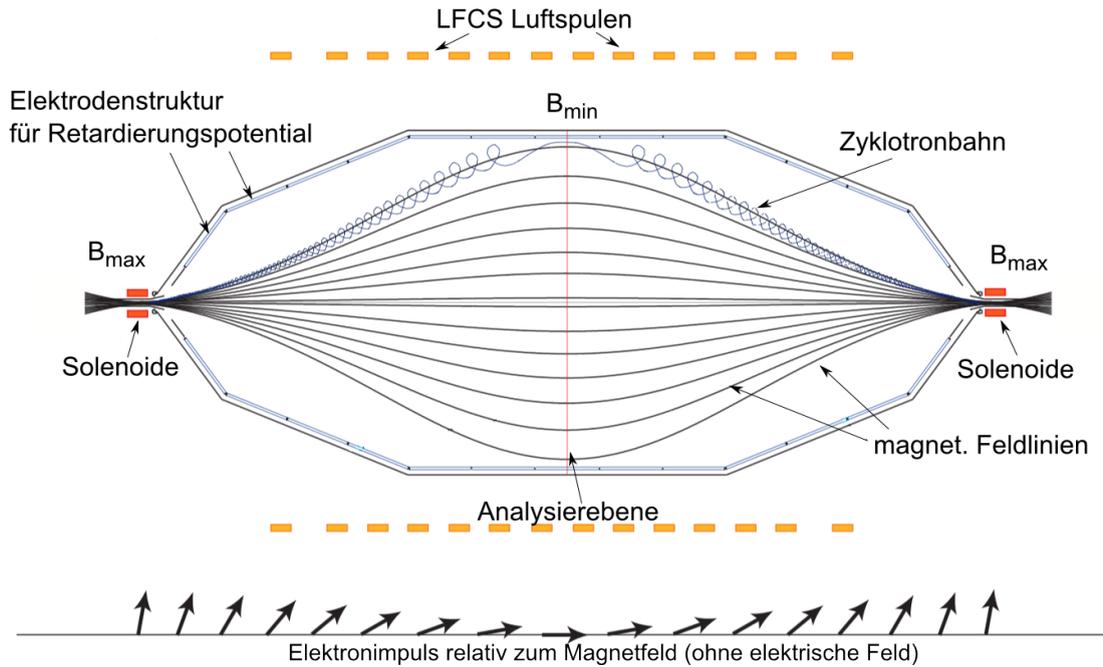


Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung des KATRIN-Hauptspektrometers und der Funktionsweise eines MAC-E Filtersystems, nach [Hug08] (mod.).

Turbomolekularpumpen in der DPS1-R und DPS1-F⁴ abgepumpt (siehe Abbildung 2.4). Der Gasfluss wird dadurch um zwei Größenordnungen reduziert und das zurückgewonnene Tritium bei der nächsten Injektion wiederverwendet. Dieses Kreislaufsystem ermöglicht es einen Tritiumdurchfluss von 40 g pro Tag zu gewährleisten.

Die während ihres Aufenthalts innerhalb des Strahlrohres zerfallenden Tritium-Moleküle führen zu einer Aktivität der Quelle von $\approx 10^{11}$ Bq. Die Säulendichte ρd bei dieser Temperatur beträgt $5 \cdot 10^{17}$ Teilchen/cm².

Mit Hilfe von supraleitenden Solenoiden, die eine magnetische Flussdichte von $B=3,6$ T liefern, werden die beim Zerfall entstandenen Elektronen adiabatisch entlang der Magnetfeldlinien zu beiden Enden der WGTS geführt.

2.3.2. Die Transportsektion

Unmittelbar an das Ende der DPS1-F der WGTS schließt sich der Transportabschnitt des Experiments an.

Dieser besteht aus zwei Teilen, der DPS2 und der CPS⁵, und hat die Aufgabe die Elektronen adiabatisch Richtung Spektrometersektion zu führen und gleichzeitig den Tritiumfluss um weitere 12 Größenordnungen auf etwa $\approx 10^{-14}$ mbar \cdot ℓ/s zu reduzieren.

Die hohen Anforderungen an die Reduktion des Tritium-Flusses sind der maximal tolerierten Untergrundrate im Hauptspektrometer von $10^{-2}s^{-1}$ geschuldet.

Differenzielle Pumpsektion (DPS2)

Der erste Teil des Transportabschnittes ist die differenzielle Pumpsektion (DPS2). Sie besteht aus fünf circa 1 m langen Strahlrohren mit einem Durchmesser von 75 mm, welche mit Hilfe von flüssigem Stickstoff auf 77 K gekühlt werden. Die Achsen der Rohre sind jeweils um 20° gegeneinander verkippt um ein direktes Hindurchdriften von ungeladenen

⁴Differential Pumping Section-Rear/Front

⁵Cryogenic Pumping Section

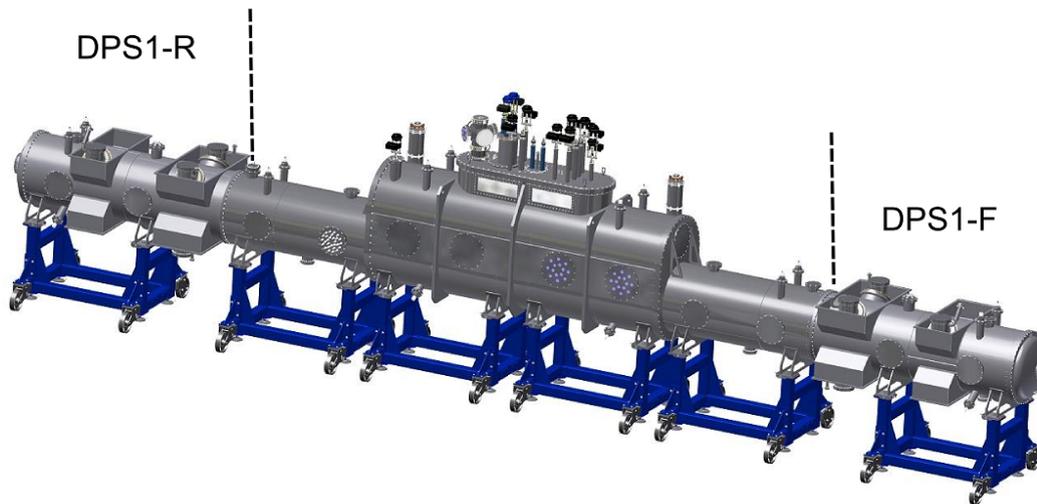


Abbildung 2.4.: Aufbau der fensterlosen gasförmigen Tritiumquelle WGTS.

Tritiummolekülen zu verhindern (siehe Abbildung 2.5).

Die Elektronen werden auch hier durch supraleitende Magnete mit einer Flussdichte von bis zu $B=5,6$ T adiabatisch geführt.

Zwischen den einzelnen Strahlrohrabschnitten sind vier Pumpstutzen angebracht, an denen mit Hilfe von Turbomolekularpumpen (TMPs), der Tritiumfluss um einen Faktor 10^5 reduziert wird, womit die Gesamtreduktion allein durch die DPS (DPS1-F+DPS2) in der Größenordnung von 10^7 liegt.

Wie auch schon in der WGTS wird das abgepumpte Tritium an den Kreislauf zurückgegeben.

Kryogene Pumpsektion (CPS)

Im zweiten Teil der Transportstrecke wird eine andere Methode zur Tritiumabscheidung genutzt. Mit Hilfe von flüssigem Helium wird die Innenwand des Strahlrohres auf eine Temperatur zwischen 3 K und 5 K abgekühlt, wodurch die Tritiummoleküle adsorbiert werden. Um die Effektivität dieses Prozesses weiter zu steigern wird die Oberfläche mit einer dünnen Schicht aus Argonschnee überzogen. Hierbei handelt es sich um einen rein passiven Prozess bei dem keinerlei aktive Pumpen zum Einsatz kommen.

Das System muss etwa alle 60 Tage mit Hilfe von gasförmigem Helium durchgespült werden um eine gleichbleibende Aufnahmefähigkeit für Tritium während der Messungen gewährleisten zu können. Verstärkt wird dieser Effekt, wie auch schon bei der DPS zuvor, durch eine Verkipfung der einzelnen Strahlrohre zueinander um 15° . Die Reduktion des Flusses liegt für die CPS alleine bei einem Faktor von 10^7 . In Kombination mit der DPS wird die für die Untergrundrate erforderliche Reduktion um 14 Größenordnungen erreicht.

2.3.3. Die Spektrometersektion

Für die Bestimmung der Neutrinomasse ist die genaue Analyse der kinetischen Energie der Elektronen entscheidend. Dies geschieht in der auf die Transportstrecke folgenden Spektrometersektion in einem zweistufigen Prozess nach dem MAC-E-Filterprinzip (siehe Abschnitt 2.2.2).

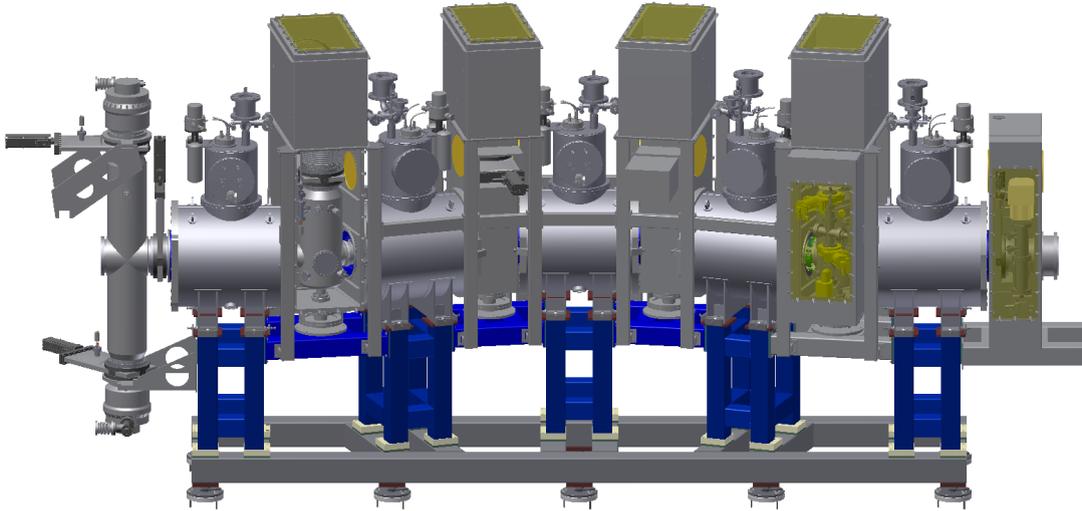


Abbildung 2.5.: Differentielle Pumpsektion im Transportabschnitt von KATRIN. Zu sehen sind die 20° -Schikanen, die eine direkte Sichtlinie von Quelle zu Spektrometer verhindert. Zwischen den fünf Strahlrohrabschnitten mit den umgebenen Solenoiden sind vier Pumpstutzen für die TMPs zu erkennen.

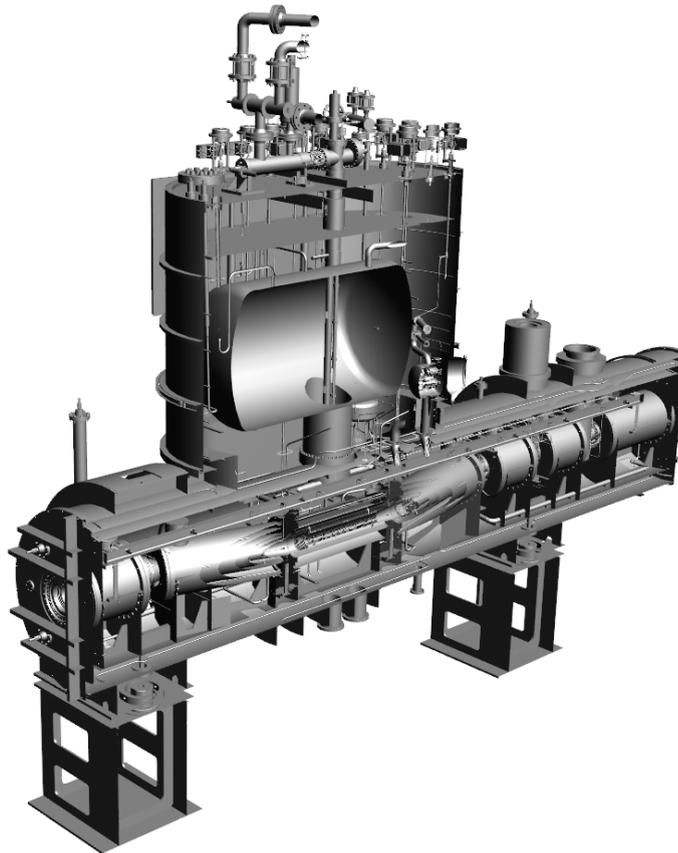


Abbildung 2.6.: Querschnitt durch die kryogene Pumpsektion innerhalb der Transportstrecke von KATRIN. Sie besteht ebenfalls aus mehreren Strahlrohrabschnitten, sowie einer Schikane mit 15° . Zur magnetischen Führung der Elektronen werden auch in diesem Abschnitt supraleitende Solenoide eingesetzt.

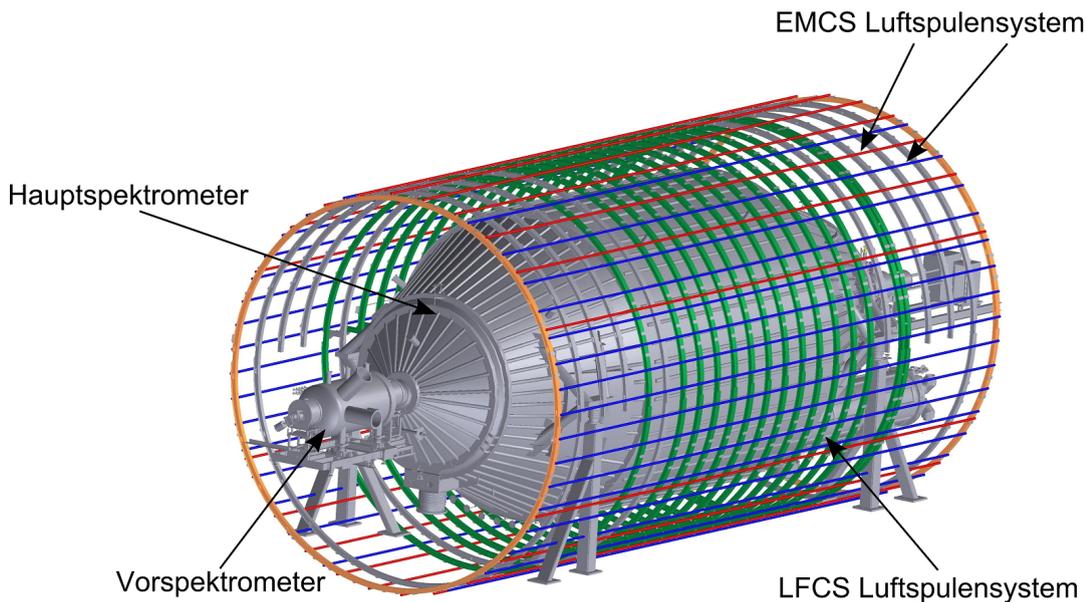


Abbildung 2.7.: Vor- und Hauptspektrometer des KATRIN-Experiments mit den umgebenden Luftspulensystemen LFCS (grün) und EMCS (blau, rot).

Vorspektrometer

Im ersten Segment, dem Vorspektrometer, findet während der Tritium-Messphase eine Vorsortierung der Elektronen statt. Es ist 3,4 m lang, hat einen Durchmesser von 1,7 m und besitzt ein inneres Drahtelektrodensystem zur Erzeugung eines elektrischen Retardierungspotentials. Die magnetische Führung übernehmen zwei Vorspektrometer-Solenoiden am Eingang und Ausgang, die jeweils eine Flussdichte von $B=4,5$ T besitzen. Durch ein elektrisches Potential mit einem Betrag von $U_0 \leq -18,3$ kV werden alle Zerfallselektronen mit einer Energie kleiner als 18,3 keV zur Quelle zurückreflektiert, wodurch sich der Elektronenfluss von 10^{10} Teilchen/s auf 10^4 Teilchen/s reduziert. Diese tragen keinerlei verwertbare Informationen über die Neutrinomasse (siehe Abbildung 2.2) und würden im Hauptspektrometer durch Streuung an Restgasatomen lediglich zu einer Erhöhung der Untergrundrate führen.

Hauptspektrometer

Die Energieauflösung von $\Delta E = 0,93$ eV, die für die genaue Analyse der kinetischen Energie der Elektronen am Endpunkt des Spektrums nötig ist, bedingt die Maße des Hauptspektrometers mit einer Länge von 23,3 m und einem Durchmesser von 9,9 m.

Der Teil der Elektronen, der das Vorspektrometer passiert hat läuft erneut gegen ein Retardierungspotential an. Dieses wird, wie auch schon beim Vorspektrometer, mit Hilfe eines Drahtelektrodensystems im Inneren des Spektrometers erzeugt. Dabei handelt es sich um ein zweilagiges System, bei dem die innere Drahtlage auf einem negativeren Potential als die äußere liegt. Durch diese Realisierung kann der Spektrometertank von Myon-induzierten Untergundelektronen aus der Wand abgeschirmt werden.

Das Magnetfeld wird auf der Quellseite durch die beiden Vorspektrometermagnete mit 4,5 T Flussdichte bestimmt, während detektorseitig der Pinch-Magnet mit 6 T und der Detektormagnet mit 3,6 T das Feld erzeugen. Um das Spektrometer herum ist ein Luftspulensystem aufgebaut, mit dem die Feinjustierung des Feldes (LFCS) sowie die Erdmagnetfeldkompensation (EMCS) ausgeführt werden kann.

In beiden Spektrometern herrscht bei den Messung ein Ultrahochvakuum (UHV) im Be-

reich von $\approx 10^{-11}$ mbar um eine möglichst niedrige Untergrundrate zu erhalten.

Monitorspektrometer

Parallel zum Haupt-Strahlverlauf wird in einer Nachbarhalle das Spektrometer des Mainzer Neutrino-Experiments als Monitor-Spektrometer weiterverwendet. Es ist mit dem Hochspannungssystem des KATRIN-Hauptspektrometers verbunden und erlaubt eine Überwachung der Spannungsversorgung im ppm-Bereich.

2.3.4. Das Detektorsystem

Der Aufbau von KATRIN schließt nach einer Länge von etwa 70 m mit dem Detektorsystem ab, dessen Aufgabe der Nachweis der im β -Zerfall entstandenen und durch das Spektrometer transmittierten Elektronen ist.

Das Kernelement ist dabei ein 5 Zoll großer monolithischer Wafer aus Silizium, der als PIN-Diode aufgebaut ist. Durch eine Segmentierung (siehe Abbildung 2.8) in 148 Pixel gleicher Fläche (12 Ringe mit je 12 Pixeln + 4 zentrale Pixel (bull's eye)) ist es möglich, die Analysierebene des Spektrometers mit einer guten räumlichen Auflösung auf dem Detektor abzubilden. Die typische Energieauflösung eines einzelnen Pixels liegt bei 1,4 keV (FWHM⁶).

Zur Untergrundreduzierung ist der Wafer von einem aktiven Veto-System aus Plastik-Szintillatoren, sowie einer Blei- bzw. Kupfer-Abschirmung umgeben. Desweiteren wurde eine Nachbeschleunigungselektrode (PAE⁷) in das System integriert, wodurch Signalelektronen mit bis zu 30 kV nachbeschleunigt werden können. Sie werden dadurch aus einem Energiebereich mit höherem intrinsischen Detektoruntergrund (z.B. durch radioaktive Zerfälle) in einen Bereich mit niedrigerem Untergrund beschleunigt. Der Wafer, sowie das Veto-System und die Nachbeschleunigungselektrode befinden sich innerhalb der Bohrung des Detektormagneten bei einer magnetischen Flussdichte von $B=3,3$ T, wodurch auf die Verträglichkeit der Bauelemente mit starken Magnetfeldern besonders geachtet werden musste.

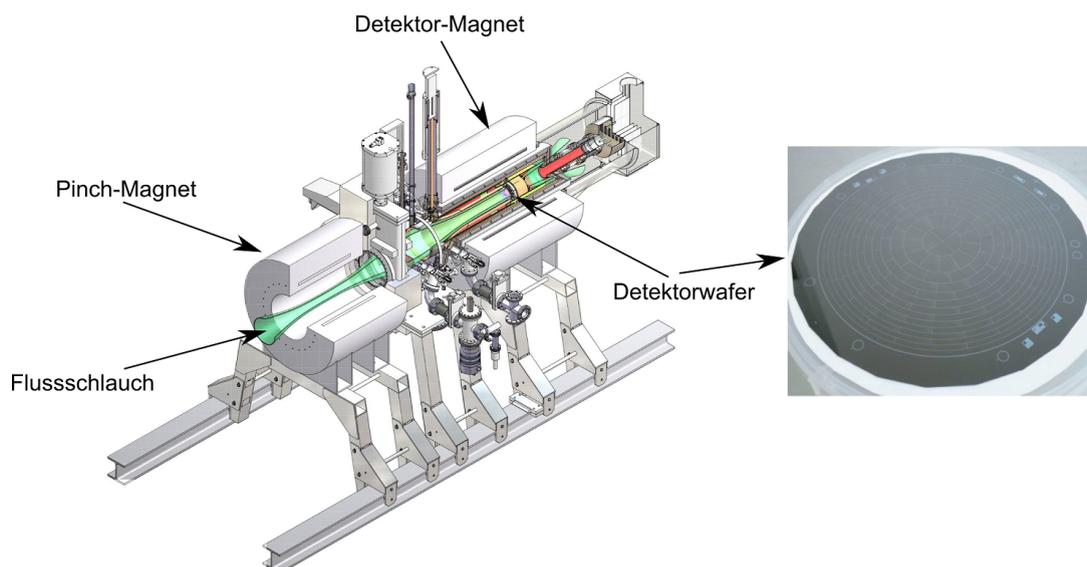


Abbildung 2.8.: Schematische Darstellung der Detektorsektion [Har12] (mod.) ([links](#)). Bild des Detektor-Wafers mit seiner Pixelsegmentierung ([rechts](#)).

⁶Full Width at Half Maximum

⁷Post Acceleration Electrode

3. Simulations- und Analysepaket Kasper

Wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt wurde, handelt es sich bei KATRIN um ein komplexes Großexperiment, bestehend aus vielen verschiedenen Komponenten.

Gerade an die elektromagnetischen Systeme, bestehend z.B. aus über 50 Solenoiden im gesamten Aufbau, werden hohe technische Anforderungen hinsichtlich ihrer Präzision und Stabilität gestellt. Dabei ist es von ebenso entscheidender Bedeutung auch eine in gleicher Weise funktionierende Simulationssoftware zu besitzen, um das Experiment mit all seinen Details modellieren zu können.

Für KATRIN soll dies das Simulations- und Analysepaket Kasper leisten. Die grundsätzliche Struktur von Kasper ist in Abbildung 3.1 zu sehen [BBC⁺13]. Dabei handelt es sich um ein Gesamtkonzept, das viele verschiedene Anwendungen/Module unter sich vereint. So steht dem Nutzer beispielsweise mit Kassiopeia ein leistungsfähiges Simulationsprogramm zur Verfügung, welches es ermöglicht Teilchentrajektorien innerhalb des Experiments zu berechnen. Dabei ist eine Berechnung der elektromagnetischen Felder mit höchster Präzision unerlässlich, was beispielsweise durch das Paket KEMField gewährleistet wird [Cor09]. Im Rahmen dieses Kapitels wird die Kassiopeia-Software vorgestellt und ihrer Funktionsweise erläutert (Abschnitt 3.1). Hierbei soll insbesondere auf die verschiedenen Methoden der elektromagnetischen Feldberechnung eingegangen werden [Glü06a], [Glü06b],[Cor09], die in Kassiopeia bzw. KEMField integriert sind (Abschnitt 3.1.1 und 3.1.2).

Zudem werden die Teilchenerzeugung und die Simulation der dazugehörigen Trajektorien (Abschnitt 3.1.3), sowie die ebenfalls integrierte Simulation des Detektors thematisiert (Abschnitt 3.1.4).

Im zweiten Teil des Kapitels wird das Programmpaket KTrAP beschrieben (Abschnitt 3.2), welches im Rahmen dieser Arbeit mitentwickelt wurde. Insbesondere wird hier auf ein Magnetfeldoptimierungsprogramm eingegangen (Abschnitt 3.2.1), mit dessen Hilfe optimierte Parameter für das LFCS¹ Luftspulensystem gefunden werden können (Kapitel 4.4).

Zum Abschluss werden noch ein Programm zur Feldlinienberechnung und Visualisierung (Abschnitt 3.2.2), sowie mehrere Tools zur Untersuchung der Transmissionsfunktion (siehe Kapitel 2, 4, 5) dargestellt (Abschnitt 3.2.3).

3.1. Die Kassiopeia-Software

Bei der Kassiopeia-Software handelt es sich um ein speziell für das KATRIN-Experiment entwickeltes Programmpaket. Es basiert hauptsächlich auf der Programmiersprache C++

¹Low Field Correction System

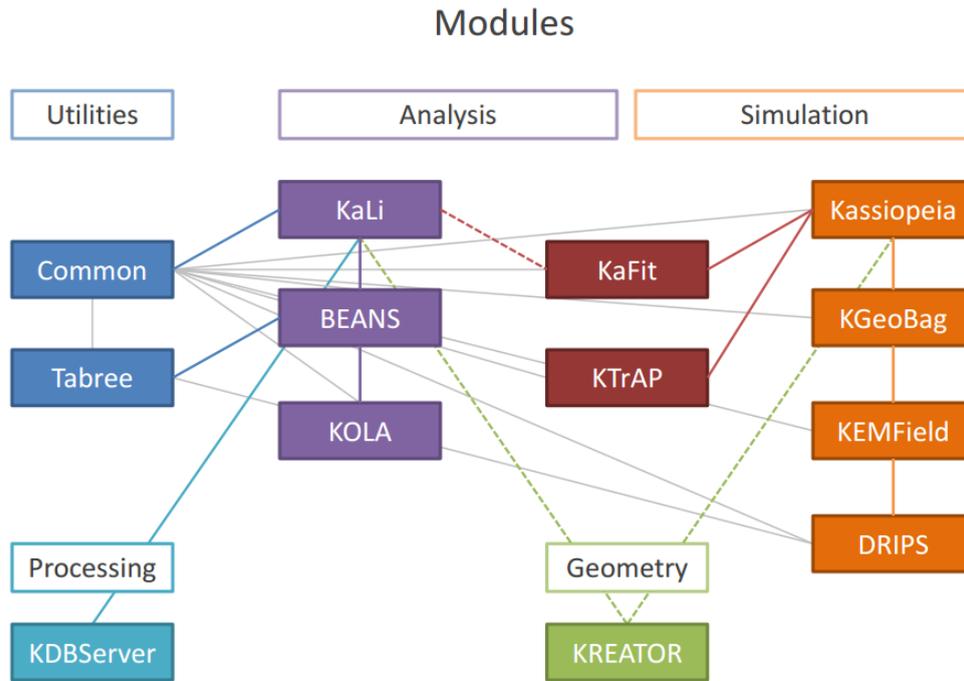


Abbildung 3.1.: Das Simulations- und Analysepaket Kasper mit seinem modularen Aufbau. [BBC⁺13] (mod.)

und entstand in enger Zusammenarbeit mehrerer Institute der Kollaboration [FG⁺13], [Mer12], [Wan13].

Das Hauptaugenmerk von Kassiopeia liegt dabei auf drei Bereichen, die im Folgenden kurz erläutert werden.

- **Elektromagnetische Optimierung:** Zur Bestimmung der Neutrinomasse muss das elektromagnetische Design des gesamten Aufbaus sehr präzise bekannt sein und dahingehend optimiert werden. Um dies zu erreichen ist eine Modellierung mit Hilfe genauer Berechnungen der elektrischen Potentiale, sowie der elektrischen und magnetischen Felder essentiell. Kassiopeia, sowie Kasper, liefern hierfür verschiedene Verfahren und Methoden zur Durchführung, siehe dazu 3.1.1, 3.1.2.
- **Monte Carlo Simulationen von Teilchentrajektorien:** Die Kassiopeia-Software erlaubt es darüber hinaus, Monte-Carlo Teilchensimulationen sowohl der Signal- als auch der Untergrundereignisse durchzuführen.
Der Monte-Carlo Aspekt steckt in der Generierung der Anfangsbedingungen der zu simulierenden Teilchen. Anschließend werden die Bahnen dieser Teilchen verfolgt, wobei die Einflüsse der elektromagnetischen Felder und Potentiale auf die Flugbahn ebenso berücksichtigt werden wie die Wechselwirkung mit anderen Teilchen, z.B. Streuung an Restgasmolekülen, oder mit dem Aufbau des Experiments selbst, z.B. Auftreffen auf den Detektor oder die Wände des Spektrometers.
Nur unter Berücksichtigung aller physikalischer Einflüsse auf die Signalelektronen aus dem β -Zerfall lassen sich die systematischen Effekte auf die Neutrinomassensensitivität minimieren.
- **Abschätzung systematischer Effekte sowie statistischer Unsicherheiten:** Neben der Simulation des elektromagnetischen Aufbaus verfügt Kassiopeia weiterhin über ein detailliertes Simulationsmodell der Tritiumquelle um bspw. Einflüsse von Schwankungen der Säulendichte auf die Sensitivität von KATRIN berücksichti-

gen zu können, siehe 2.3.1 und [Höt12].

In den folgenden Abschnitten werden die für diese Arbeit besonders relevanten Bestandteile von Kassiopeia genauer erläutert.

3.1.1. Magnetische Feldberechnung

Das Magnetfeld, welches durch einen stromdurchflossenen Leiter erzeugt wird, lässt sich mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes bestimmen.:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.1)$$

Dabei steht I für die Stromstärke im Leiter, $d\vec{l}$ für das Leiterstück, r für den Abstand vom Leiter und μ_0 für die magnetische Permeabilität.

Der Großteil des Magnetfeldes bei KATRIN wird durch supraleitende (bspw. Vorspektrometermagnete), sowie normalleitende (bspw. Luftspulensysteme) Spulen erzeugt. Der Rest entsteht durch Einflüsse von magnetischen Materialien sowie dem Erdmagnetfeld. Letztgenannte stellen eine störende Komponente dar und müssen minimiert bzw. kompensiert werden. Während die Spulensysteme ein axialsymmetrisches Feld erzeugen, ist der Beitrag der magnetischen Materialien und des Erdmagnetfeldes nicht-axialsymmetrisch. Entsprechend müssen beiderlei Komponenten bei Berechnungen berücksichtigt werden.

Axialsymmetrische Magnetfeldberechnung: Für die axialsymmetrische Magnetfeldberechnung sind zwei verschiedene Methoden anwendbar.

Die erste verwendet zur Berechnung elliptische Integrale und ist in einem großen geometrischen Bereich gültig (sogar innerhalb der Spulen). Jedoch ist sie in ihrer Anwendung relativ langsam.

Die zweite Methode setzt auf eine Entwicklung nach Legendrepoly-nomen, welche bis zu zwei Größenordnungen schneller, dafür nur in begrenzten Gebieten, anwendbar ist.

Aufgrund dessen ist es zweckmäßig zwischen den beiden Möglichkeiten je nach Position des Teilchens und Anforderung an die Präzision wechseln zu können. In den meisten Fällen bewegen sich die Elektronen in genügend großem Abstand zu den Spulen, so dass die zweite Methode genutzt werden kann.

- **Elliptische Integrale:** Die radiale (B_r), axiale (B_z) und azimuthale (B_φ) Komponente des Magnetfeldes einer dünnen, axialsymmetrischen Spule lässt sich mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes bestimmen [BBC⁺10].

$$B_r = \frac{I}{c} \frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a+r)^2 + z^2} E(k) \right], \quad (3.2)$$

$$B_z = \frac{I}{c} \frac{2}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a+r)^2 + z^2} E(k) \right], \quad (3.3)$$

$$B_\varphi = 0. \quad (3.4)$$

Dabei sind $K(k)$ und $E(k)$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Art:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (3.5)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (3.6)$$

Die Parameter r und z geben die radiale bzw. die axiale Position des Feldpunktes an, während a den Radius der Spule und I den durch sie fließenden Strom beschreibt. Bei c und k handelt es sich um Funktionen von r , z und a [PTVF07].

Falls es sich um eine ausgedehnte Spule der Länge L handelt, so ist eine weitere Integration in axialer Richtung gefordert und das folgende elliptische Integral dritter Art wird benötigt.

$$\Pi(c, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - n^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3.7)$$

Da die Integrale analytisch nicht lösbar sind, können nur numerische Berechnungsmethoden zum Einsatz kommen. Hierbei gibt es verschiedene Lösungsverfahren, wie beispielsweise die Chebyshev-Näherung [Cod65] oder die Carlson-Methode [PTVF07]. Letztere kommt vorwiegend zum Einsatz, da sie mit elliptischen Integralen dritter Art umgehen kann.

Eine im Anschluss durchgeführte Integration über den Radius der Spule führt schließlich auf das resultierende Feld.

- **Entwicklung nach Legendre-Polynomen:** Eine wesentlich schnellere Methode zur Berechnung des Magnetfeldes ist die Entwicklung nach Legendre-Polynomen [Glü11b].

Dazu betrachtet man einen fixen Punkt $S(z = z_0, r = 0)$ auf der z -Achse, den sogenannten Quellpunkt, und berechnet dort das Magnetfeld, sowie dessen Ableitungen. Damit lassen sich Koeffizienten der Form B_n^{cen} ($n = 0, 1, 2, \dots$) bilden, die sogenannten Quellkoeffizienten, die alle für den Punkt S definiert sind. B_0^{cen} steht für das Magnetfeld am Punkt selbst, B_1^{cen} ist proportional zur ersten Ableitung in z -Richtung usw.

Im Falle axialsymmetrischer Spulen lässt sich mit Hilfe der B_n^{cen} nun das Magnetfeld an einem beliebigen Feldpunkt $P(z, r)$ nach Legendre-Polynomen entwickeln, sofern der Punkt P nicht allzu weit vom Quellpunkt S entfernt ist.

Die Entwicklung in axialer sowie in radialer Richtung führt auf die Komponenten

$$B_z = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P_n(u), \quad (3.8)$$

sowie

$$B_r = -s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^{cen}}{n+1} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P'_n(u), \quad (3.9)$$

wobei ρ_{cen} den minimalen Abstand zwischen Quellpunkt und Spule darstellt, ρ den Abstand zwischen Feldpunkt und Quellpunkt und $P_n(u)$ die Legendre-Polynome. Zudem werden die Substitutionen $u = \cos(\theta)$ und $s = \sin(\theta)$, mit dem Winkel θ zwischen z -Achse und Feldpunkt, benutzt (siehe Abbildung 3.2).

Gleichzeitig beschreibt ρ_{cen} den maximalen Konvergenzbereich, innerhalb dessen die Entwicklung nach Legendre-Polynomen konvergiert. Durch geschickte Wahl der Quellpunkte lässt sich die geometrische Abdeckung maximieren. Dies wird vom Programm eigenständig vorgenommen. Für ein kleineres Verhältnis von ρ/ρ_{cen} konvergiert die Entwicklung schneller, weshalb das Programm stets automatisch nach dem nächstgelegenen Quellpunkt sucht.

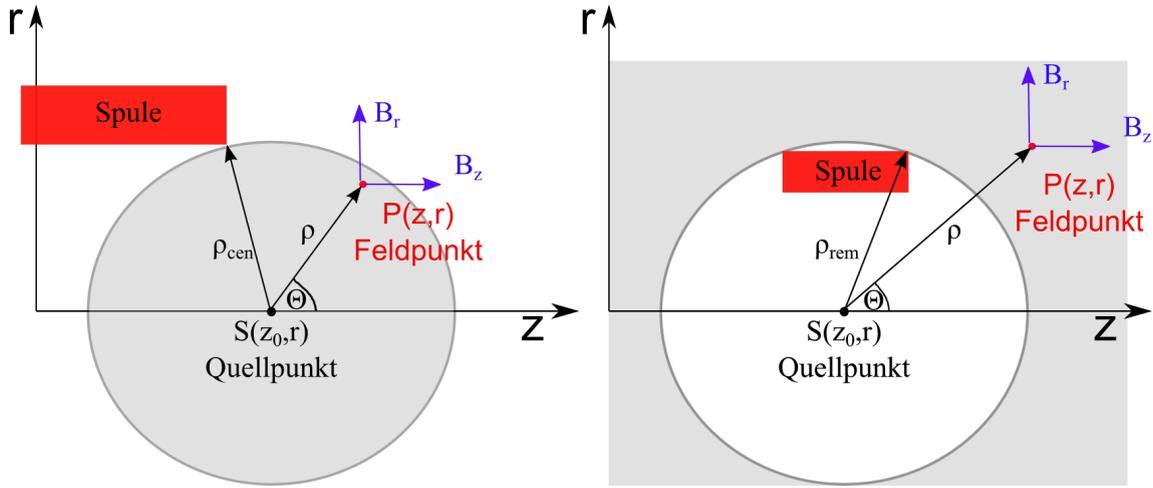


Abbildung 3.2.: Konvergenzbereiche für zentrale (**links**) sowie remote Legendre-Polynomentwicklung (**rechts**).

Die Gültigkeit der zentralen Quell-Koeffizienten B_n^{cen} bleibt für alle Feldpunkte innerhalb des Konvergenzbereichs solange bestehen, bis der Strom der Spule oder deren Geometrie geändert wird.

Will man das Feld an Punkten außerhalb des zentralen Konvergenzbereichs berechnen, lässt sich dies mit der remote Legendre-Polynomentwicklung bewerkstelligen. Die Magnetfeldkomponenten lassen sich damit wie folgt berechnen:

$$B_z = \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{rem} \left(\frac{\rho_{rem}}{\rho} \right)^{n+1} P_n(u), \quad (3.10)$$

$$B_r = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n^{rem}}{n} \left(\frac{\rho_{rem}}{\rho} \right)^{n+1} P'_n(u), \quad (3.11)$$

mit dem maximalen Abstand ρ_{rem} zwischen Quellpunkt und Spule. Die B_n^{rem} sind nun die remote Quell-Koeffizienten, die ihre Gültigkeit nur außerhalb von ρ_{rem} besitzen. Die Entwicklung konvergiert umso schneller, je weiter der Feldpunkt vom Quellpunkt entfernt ist. Das Verhältnis ρ_{rem}/ρ sollte dementsprechend möglichst klein sein.

Nichtsdestotrotz gibt es Bereiche, in denen beide Methoden der Legendre-Polynomentwicklung nicht angewendet werden können. In solchen Fällen wechselt das Programm automatisch zur Berechnung mit Hilfe elliptischer Integrale.

Nicht-axialsymmetrische Magnetfeldberechnung: Um Einflüsse von nicht-axialsymmetrischen Magnetfeldern, wie beispielsweise dem EMCS² Luftspulensystem abschätzen zu können, sind dreidimensionale Magnetfeldberechnungen nötig. Auch hier stehen zwei Methoden zu Verfügung [BBC⁺10], die im Folgenden kurz erläutert werden.

- **Integriertes Biot-Savart-Gesetz:** Das Magnetfeld B_i eines stromdurchflossenen Leiterelements lässt sich mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes (3.1) berechnen, indem man über das Segment $d\vec{l}_i$ integriert. Eine beliebig geformte Spule wird in N einzelne Segmente diskretisiert, das Magnetfeld jedes Segments berechnet und über alle

²Earth Magnetic Field Compensation System

Elemente $B = \sum_{i=1}^N B_i$ nach dem Superpositionsprinzip summiert.

Mit steigender Diskretisierung nimmt die Genauigkeit auf Kosten der Rechenzeit zu.

- **Magnetische Dipole:** Der für den Bau der KATRIN-Halle verwendete Stahlbeton ist für einen Großteil der Störeinflüsse durch nicht-axialsymmetrische Magnetfelder verantwortlich. Um die Wirkungsweise und Stärke abschätzen zu können, werden die Stahlträger als magnetische Dipole mit Magnetisierung \vec{M} und Radius r approximiert.

Die magnetische Ladung Q ist dabei gegeben durch

$$Q = |\vec{M}| \pi r^2. \quad (3.12)$$

Das Magnetfeld an einem bestimmten Punkt lässt sich durch

$$B(r) = Q \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{r_a}{|r_a|^3} + \frac{r_e}{|r_e|^3} \right) \quad (3.13)$$

berechnen, wobei r_a für den Radius am Anfangspunkt des Stahlträgers steht und r_e für den Radius am Endpunkt.

3.1.2. Elektrische Feldberechnung

Die elektrische Feld- sowie Potentialberechnung ist schwieriger zu handhaben als die magnetische Berechnung. Während Magnetfelder durch Ströme erzeugt werden, die sich einfach messen lassen, ist im elektrischen Fall die Ladungsdichte auf einem Element ausschlaggebend für Potential und Feld. Ihre Verteilung ist im Allgemeinen unbekannt und muss vor Beginn einer Simulation berechnet werden.

Zur Berechnung existieren verschiedene Verfahren, jedoch kommt aufgrund der Komplexität des Hauptspektrometers (Tankwand als Vollelektrode, zweilagiges Drahtelektrodensystem) und der enormen Größenunterschiede (Hauptspektrometer mit einer Länge von 24 m, Durchmesser der Drahtelektroden von 0.2-0.3 mm) bei KATRIN die Randelementmethode (REM) zum Einsatz [BBC⁺10].

Randelementmethode: Bei der Randelementmethode werden die Elektroden zunächst in N Teilelemente S_j zerlegt.

$$S = \sum_{j=1}^N S_j. \quad (3.14)$$

Wie bereits erwähnt, sind für die Feldberechnung die Ladungsdichten entscheidend, jedoch zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt. Deshalb ist das erste Ziel deren Bestimmung.

Eine gegebene bzw. bekannte Größe ist die eingestellte Spannung U_i einer Elektrode. Dieser Parameter ist mit der Ladungsdichte σ_j des Teilelements j über folgende Relation verknüpft:

$$U_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \sigma_j. \quad (3.15)$$

Die $C_{ij} = C_j(\vec{r}_i)$ sind dabei die sogenannten Coulomb-Matrixelemente, welche den jeweiligen Einfluss der Elektroden aufeinander beschreiben. Ein Element C_{ij} entspricht dem Potential in der Mitte der Elektrode i , welches durch die Einheitsladungsdichte der Elektrode j erzeugt wurde.

Dieser rein geometrische Faktor kann folgendermaßen bestimmt werden:

$$C_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_S|} d^2 r_S. \quad (3.16)$$

Sind die Matrixelemente berechnet, lässt sich das lineare Gleichungssystem (3.15) z.B. mit Hilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus lösen und so die Ladungsdichten σ_j bestimmen.

Um Arbeitsspeicherplatz und Rechenzeit bei einer hohen Diskretisierung in viele Teilelemente zu minimieren, kann auf iterative Berechnungsmethoden wie das Robin-Hood-Verfahren [FLC⁺12] zurückgegriffen werden.

Axialsymmetrische elektrische Feldberechnung: Sind die Ladungsdichten für die vorgesehene Simulation vorhanden, so läuft die eigentliche Feld- bzw. Potentialberechnung ähnlich ab wie für das Magnetfeld.

Auch hier stehen die Methoden mit Hilfe elliptischer Integrale, sowie die Entwicklung nach Legendre-Polynomen zur Auswahl. Letztere ist klar schneller, jedoch nur in bestimmten Bereichen gültig [Glü11a].

Das Potential, welches durch einen infinitesimal-dünnen, geladenen Ring am Feldpunkt P erzeugt wird, erhält man bei Verwendung der ersten Methode durch

$$\Phi(z, r) = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{K(k)}{S} \quad (3.17)$$

mit

$$S = \sqrt{(R+r)^2 + (z-Z)^2}, k = \frac{2\sqrt{Rr}}{S}. \quad (3.18)$$

Z ist dabei die axiale Koordinate des Rings, R der Radius, Q die Ladung, sowie $K(k)$ das erste elliptische Integral, siehe Gleichung (3.5).

Um das Potential zu erhalten, welches durch eine gesamte Elektrode erzeugt wird, muss diese in viele solcher Ringe diskretisiert und anschließend über alle Ringe summiert werden. Das Potential einer Drahtelektrode, welche als Liniensegment mit Endpunkten P_a und P_b approximiert wird, lässt sich durch

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{D_a + D_b + L}{D_a + D_b - L} \right) \quad (3.19)$$

berechnen, wobei L die Länge des Liniensegments, D_a und D_b die Entfernung der Endpunkte zum Feldpunkt P und $\lambda = Q/L$ die lineare Ladungsdichte des Segments beschreibt.

Bei der Entwicklung nach Legendre-Polynomen ist wie auch schon bei der Magnetfeldberechnung auf den Konvergenzbereich der Entwicklung zu achten. Die Unterteilung erfolgt erneut in einen zentralen, sowie einen remote Bereich, siehe dazu Abbildung 3.3.

Die nach der REM-Methode berechneten Ladungsdichten werden zuvor zur Bestimmung der Quell-Koeffizienten Φ_n^{cen} und Φ_n^{rem} benötigt. Für Feldpunkte innerhalb des zentralen Konvergenzbereichs ($\rho < \rho_{cen}$) erhält man für das Potential, sowie das axiale und radiale elektrische Feld

$$\Phi(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P_n(u), \quad (3.20)$$

$$E_z(z, r) = -\frac{1}{\rho_{cen}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Phi_{n+1}^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P_n(u), \quad (3.21)$$

$$E_r(z, r) = \frac{s}{\rho_{cen}} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{n+1}^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P_n'(u). \quad (3.22)$$

Teilchen, wie z.B. Streuung mit Restgasmolekülen, auf deren Bahnverlauf untersuchen.

Teilchenerzeugung

Der modulare Aufbau von Kasper setzt sich auch bei Kassiopeia fort. Zur Erzeugung von Teilchen wird das Modul KPaGe⁴ eingesetzt. Die darin enthaltenen Teilchen-Generatoren, auch "Creator" genannt, legen die Anfangsbedingungen der Teilchen fest.

Diese sind die Energie, die dreidimensionale Position, die Emissionsrichtung ausgedrückt durch den Polar- und Azimutalwinkel, θ und φ , sowie der Emissionszeitpunkt. Jeder der vier Teilchen-Generatoren besitzt verschiedene Einstellungsmöglichkeiten und ist beliebig kombinierbar. Dadurch lässt sich eine Vielzahl von Ausgangssituationen generieren. Im Folgenden werden einige Beispiele für die implementierten Generatoren gezeigt.

Energie-Generator:

- **feste Energie:** Hierbei wird eine vom Benutzer definierte feste Anfangsenergie gewählt, mit der die Teilchen starten sollen.
- **gleichförmig verteilte Energie:** Zwischen einer unteren und oberen Grenze wird auf Basis einer Gleichverteilung die Startenergie gewählt.
- **gaußförmig verteilte Energie:** Hier wird eine gaußförmige Verteilung definiert. Vom Benutzer werden der Erwartungswert der Gaußverteilung, sowie die Abweichung in Form des 1-Sigma-Intervalls gewählt.
- **Zerfallsspektrum:** Für diese Art der Generatordefinition wird eine für die Teilchensorte charakteristische Energieverteilung, bspw. die Zerfallsenergie von Tritium oder Radon, zu Grunde gelegt.

Positions-Generator:

- **feste Position:** Die Koordinaten der Startposition werden für alle Teilchen der Simulation fest eingestellt. Für eine Simulation der Transmissionsfunktion einer punktförmigen Quelle (z.B. Elektronenkanone) ist dies bspw. anwendbar.
- **Scheibe:** Hier wird eine Scheibe mit Hilfe eines Radius festgelegt, deren Mittelpunkt durch die drei Raumkoordinaten definiert ist. Die Orientierung erfolgt durch Angabe des Normalenvektors. Der Erzeugungsort der Teilchen ist über die gesamte Fläche gleichförmig verteilt.
Will man Teilchen simulieren, die einen Großteil des Flusschlauches im Spektrometer abdecken, ist dies die bevorzugte Wahl.
- **Oberfläche:** Dieser Generator ermöglicht eine ebenfalls gleichförmig verteilte Generierung von Teilchen, in diesem Fall jedoch auf einer Oberfläche. Eine Oberfläche ist dabei eine in der Kassiopeia-Geometrie definierte Form, bspw. die Spektrometertankwand. Somit lässt sich die Bahn von Sekundärelektronen aus der Tankwand nachempfinden.
- **Volumen:** Hier muss ein ebenfalls in der Geometrie definiertes Volumen als Ausgangspunkt der Teilchenerzeugung dienen. Die Startpunkte werden homogen über das gesamte Volumen verteilt.

Richtungs-Generator:

- **feste Richtung:** Bei der festen Richtungsvorgabe werden ein polarer Winkel θ sowie ein azimutaler Winkel ϕ eingestellt. θ ist definiert als Winkel zwischen Impuls- und Magnetfeldrichtung, bzw. Impuls- und z-Richtung.

⁴Kassiopeia Particle Generator

- **gaußförmig verteilte Richtung:** Wie auch schon bei der Energie werden der Erwartungswert des Winkels sowie die 1-Sigma Abweichung vom Benutzer als Parameter definiert. Dies geschieht sowohl für θ wie auch für ϕ .
- **isotrope Verteilung:** In diesem Fall werden die Teilchen mit Winkeln zwischen den jeweiligen minimalen und maximalen Werten erzeugt. Diese liegen für den polaren Winkel bei $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ und für den azimuthalen Winkel bei $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ und können vom Benutzer weiter eingeschränkt werden.

Zeit-Generator:

Der Startzeitpunkt eines jeden erzeugten Teilchens kann mit Hilfe dieses Generators variiert werden. Hauptsächlich findet die Standardeinstellung von Null, da eine nachträgliche Änderung bei der Analyse der Simulationsdaten noch möglich ist.

Bahnberechnung

Nachdem die Anfangsbedingungen der Teilchen festgelegt wurden, muss nun ihr Weg im Spektrometer berechnet werden. Die Trajektorie wird dabei in viele einzelne Schritte unterteilt, wobei die Schrittweite nicht notwendigerweise konstant sein muss.

Bei der Betrachtung der Bahn können zwei verschiedene Methoden zum Einsatz kommen. Dabei handelt es sich zum einen um die exakte Berechnungsmethode und zum anderen die adiabatisch approximierte Methode. Im Folgenden werden die beiden Herangehensweisen näher erläutert.

Exakte Berechnungsmethode: Die Bewegung von geladenen Teilchen in elektromagnetischen Feldern kann mit Hilfe der Lorentzgleichung

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.26)$$

beschrieben werden. Die exakte Berechnungsmethode setzt genau hier an, indem sie bei jedem einzelnen Schritt des Teilchens dessen Bewegungsgleichung löst und somit die Bahn simuliert, siehe Abbildung 3.4.

Zur Auswahl stehen verschiedene Lösungsverfahren auf Basis eingebetteter Runge-Kutta [Bar10] oder Predictor-Corrector-Methoden [Fau12]. Hauptsächlich Verwendung findet die Runge-Kutta Methode 8ter Ordnung [Glü08]. Dabei handelt es sich um ein numerisches Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Das System aus Differentialgleichungen besteht im vorliegenden Fall aus

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{\gamma m} \quad (3.27)$$

sowie

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{\gamma m} \right). \quad (3.28)$$

Die Größen Ort \vec{x} und Impuls \vec{p} sind dabei über die relativistische Beziehung

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.29)$$

verknüpft.

Adiabatisch approximierte Berechnungsmethode: Bei der zweiten Herangehensweise der Berechnung wird die Flugbahn des Teilchens in zwei Komponenten aufgeteilt. Eine

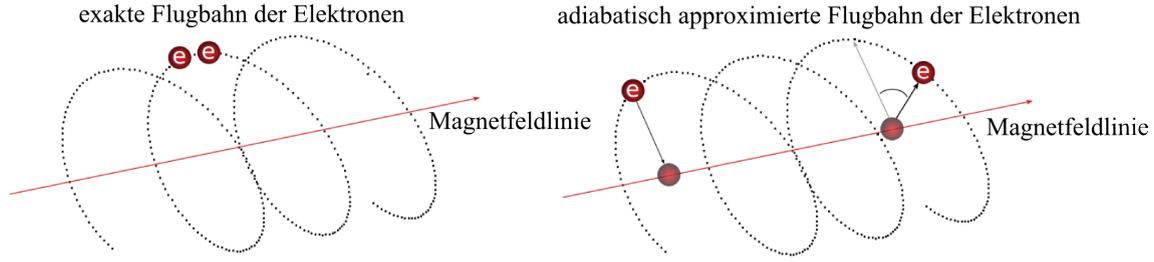


Abbildung 3.4.: Exakte Bahnberechnung durch Lösung der Bewegungsgleichung, inklusive Zyklotronbewegung (**links**). Adiabatisch approximierte Bahnberechnung mit Hilfe der Beschreibung der Zentrumsbewegung sowie der überlagerten Zyklotronbewegung (**rechts**) [Mer12] (mod.)

davon ist parallel gerichtet zum Magnetfeld und wird Zentrumsbewegung entlang der führenden Magnetfeldlinie genannt, während die senkrechte Komponente die Zyklotronbewegung beschreibt, siehe Abbildung 3.4. Das zugehörige System aus Bewegungsgleichungen besteht aus der Zentrumsbewegung

$$\dot{\vec{x}} = \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} \frac{\vec{B}}{B}, \quad (3.30)$$

der senkrechten Impulskomponente

$$\dot{\vec{p}}_{\perp} = \frac{p_{\perp} p_{\parallel}}{2\gamma m B} \nabla B \frac{\vec{B}}{B}, \quad (3.31)$$

der parallelen Komponente

$$\dot{p}_{\parallel} = -\frac{p_{\perp}^2}{2\gamma m B} \left(\nabla B + q\vec{E} \right) \frac{\vec{B}}{B}, \quad (3.32)$$

sowie der orbitalen Phase

$$\dot{\phi} = \frac{q}{\gamma m} B \quad (3.33)$$

und wird mit Hilfe der Runge-Kutta Methode berechnet.

Die Vorteile dieser Methode liegen in der Möglichkeit durch die Wahl einer großen Schrittweite die Berechnungszeit ohne großen Genauigkeitsverlust zu verkürzen.

Allerdings ist diese Methode nur dann anwendbar, wenn die Teilchenbewegung adiabatisch erfolgt, das orbitale magnetische Moment also eine Erhaltungsgröße ist.

Wie bereits kurz erwähnt ist die Schrittweite der Teilchen nicht notwendigerweise konstant bei ihrem Flug durch das Spektrometer. Gesteuert wird sie mit Hilfe der Schrittweitenkontrolle, die auf Basis verschiedener Parameter die Schrittweite anpasst.

Solche Parameter sind beispielsweise

- das Verhältnis der Schrittlänge zur Zyklotronperiode,
- ein festes Zeitintervall des Schritts,
- eine maximal erlaubte Schrittlänge oder
- eine maximal erlaubte Energieverletzung zwischen zwei Schritten.

Alle hier genannten Kriterien - sowie weitere in Kassiopeia integrierte - zur Schrittweitenkontrolle werden vom Benutzer festgelegt und können unabhängig voneinander, auch kombiniert, eingesetzt werden. Nach jedem erfolgten Schritt der Simulation werden alle

gewählten Kriterien auf ihre Gültigkeit hin überprüft. Ist eines der Kriterien nicht erfüllt, so wird der berechnete Schritt verworfen und mit einer neuen, kleineren Schrittweite erneut bestimmt.

Das Ende einer Teilchenflugbahn wird in der Simulation mit Hilfe sogenannter Terminatoren erreicht. Dabei handelt es sich um vom Benutzer definierte Parameter, bei deren Erreichen der simulierte Pfad gestoppt werden soll. Die Kontrolle ob eine Abbruchbedingung vorliegt wird nach jedem Schritt durchgeführt. Wie auch bei den Generatoren sind in Kassiopeia eine Vielzahl von Terminatoren abrufbar, von denen im Folgenden einige vorgestellt werden.

- Maximale Pfadlänge bzw. maximale Schrittzahl: Wird eine zuvor festgelegte Weglänge überschritten oder eine definierte maximale Anzahl Schritte erreicht, so wird die Simulation gestoppt.
- Maximale Flugzeit: Hierbei wird die Flugzeit als Kontrollmechanismus verwendet. Dieser Terminator ist nützlich bei der Untersuchung nicht-adiabatischer Effekte.
- Erreichen einer maximalen oder minimalen axialen bzw. radialen Position: So lässt sich beispielsweise eine Simulation vor einem für die Simulation uninteressanten Bereich stoppen um Rechenzeit zu sparen.
- Geometrie- oder Feldgrenzen: Wie bei den Positionsgeneratoren für Oberfläche und Volumen, bei denen Teilchen anhand einer definierten Geometrie in Kassiopeia erzeugt wurden, lässt sich deren Flugbahn auch bei Erreichen einer solchen beenden. Es ist ebenfalls eine Begrenzung auf ein Gebiet möglich, in dem ein bestimmtes elektrisches oder magnetisches Feld vorherrscht.
- Minimale Energie: Eine zuvor festgelegte untere Grenze sorgt dafür, dass Teilchen unterhalb dieser Schwelle nicht weiter berechnet werden.

Alle Terminatoren lassen sich beliebig kombinieren und sogar in verschiedenen Bereichen des Experiments aktivieren oder deaktivieren. Dadurch lässt sich ein hoher Grad an Flexibilität erreichen, der für verschiedene Problemstellungen wie Untergrund- oder Transmissionssimulationen nötig ist.

3.1.4. Detektorsimulation

Sobald die Teilchen erfolgreich das Hauptspektrometer durchquert haben, werden sie beim Auftreffen auf den Detektor analysiert. Dabei handelt es sich um einen segmentierten Siliziumwafer, siehe Abschnitt 2.3.4. Softwareseitig wird das Verhalten einerseits durch KESS⁵, andererseits durch DRIPS⁶ beschrieben.

KESS:

Bei KESS handelt es sich um ein in der KATRIN-Kollaboration [Ren11] entwickeltes Tool, welches in Kassiopeia integriert wurde, mit dem das Verhalten niederenergetischer (0-50 keV) Elektronen in Silizium simuliert werden kann.

Die Simulation ist ereignisbasiert und verfolgt ein Elektron schrittweise auf dem Weg durch das Silizium. Der Detektor ist dabei in zwei Bereiche unterteilt, die etwa 100 nm dicke Totschicht gefolgt vom sensitiven Bereich mit 500 μm .

Zur Bestimmung des Verhaltens innerhalb des Siliziums wurden in KESS verschiedene physikalische Prozesse implementiert. Dabei handelt es sich um elastische und inelastische Streuung, sowie Ionisation und Relaxation. Oberflächeneffekte am Übergang zwischen Vakuum und Silizium werden ebenfalls bei der Simulation berücksichtigt.

⁵KATRIN Electron Scattering in Silicon

⁶Detector Electronics Simulation Tool

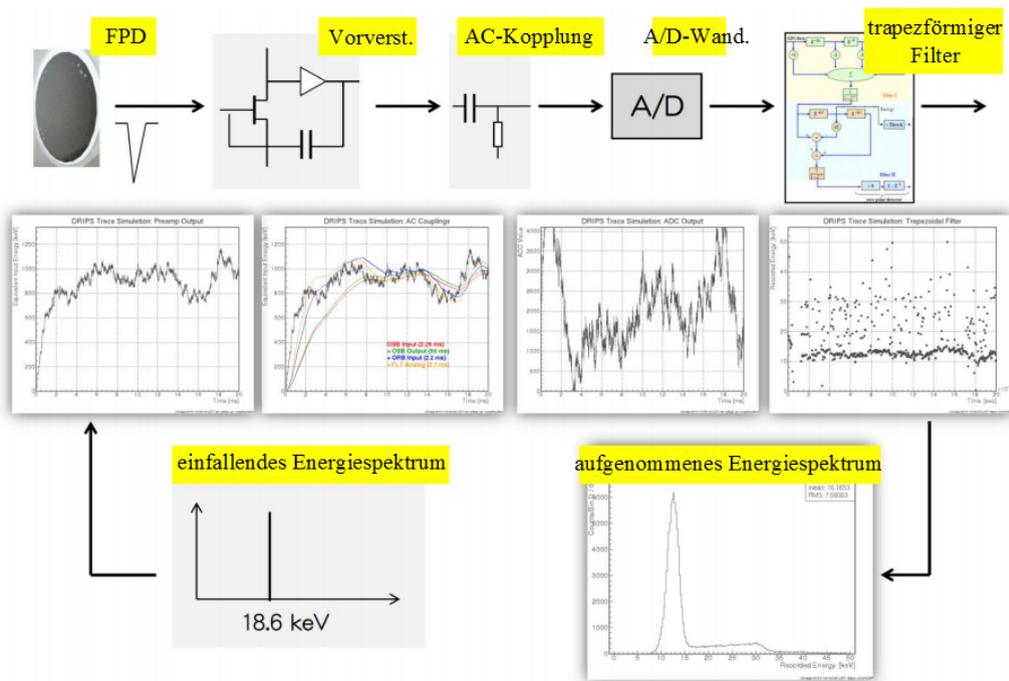


Abbildung 3.5.: Signalverlauf und Verarbeitung im Detektorsystem (**oben**). Signalform nach der jeweiligen Station (**mitte**). Eingangs- und Ausgangssignal (**unten**), aus [BBC⁺13] (mod.).

DRIPS:

Während mit Hilfe von KESS das Verhalten der Elektronen im Detektorwafer beschrieben wird, geschieht die Simulation der Signalauslese der Detektorelektronik mit DRIPS. Dabei handelt es sich um ein von S. Enomoto entwickeltes Programmpaket außerhalb von Kassiopeia (siehe Abbildung 3.1), welches jedoch die Funktionalitäten von Kasper verwendet. Ziel ist es, das aufgenommene Energiespektrum der Elektronen zu simulieren und die Auswirkungen der Detektorelektronik auf das Signal abschätzen zu können. Die Schrittfolge macht Abbildung 3.5 deutlich.

Den Anfang macht das "reine" Detektorsignal, welches mit Hilfe einer Vorverstärkerstufe aufbereitet wird. Das auftretende elektronische Rauschen wird in der Simulation modellhaft durch drei verschiedene Rauschquellen beschrieben. Es handelt sich dabei um das sogenannte Stromrauschen und Spannungsrauschen, sowie das $1/f$ -Rauschen [Spi05].

Nach dem Vorverstärker gelangt das Signal im analogen Abschnitt über mehrere AC-Kopplungen (Hochpassfilter), zum Digital/Analogwandler (ADC⁷). Bei den AC-Kopplungen handelt es sich um die Ein- und Ausgänge der optischen Sender- und Empfänger-Platten (OSB, ORB⁸), sowie den Analogteil der FLT⁹-Karten. Nach der Digitalisierung, die auf den FLT-Karten vorgenommen wird, schließt sich noch eine trapezförmige Filtersektion an. Dort wird das Signal schlussendlich bearbeitet, bevor man das aufgenommene Energiespektrum der Elektronen erhält.

Eine genauere Beschreibung von DRIPS, sowie ein Vergleich zwischen Simulation und Daten findet sich in [Eno13b].

⁷Analog - to - Digital Converter

⁸Optical Sender/ Receiver Board

⁹First Level Trigger

3.2. Das Programmpaket KTrAP

Bei KTrAP handelt es sich gleichermaßen um ein Analyse- sowie Simulationspaket, das die Vorzüge der Kasper-Umgebung nutzt, siehe Abbildung 3.1. So macht es Gebrauch von Feldberechnungsmethoden aus Kassiopeia und KEMField, Minimierungsmethoden aus KaFit, sowie der xml-Konfigurationsstruktur aus Common.

KTrAP ist ein Akronym und steht für **KATRIN Transmission Analysis Package**. Es wurde im Rahmen dieser Arbeit mitentwickelt und befindet sich zurzeit noch im Aufbau. Die wichtigsten Programme, die es momentan umfasst, sind ein Luftspulenoptimierungsprogramm, auf dessen Aufbau in Kapitel 3.2.1 und auf dessen genaue Funktionsweise in Kapitel 4 eingegangen wird. Des Weiteren sind Programme zur Berechnung und Visualisierung von Feldlinien und Transmissionsparametern, wie der Longitudinalenergie, und eine Analysierebenensuche, siehe 3.2.2 und 3.2.3, enthalten.

3.2.1. Der LFCS Optimierer

Um die angestrebte Neutrinomassensensitivität zu erreichen zu können ist eine genaue Kenntnis der elektromagnetischen Eigenschaften des Spektrometers unerlässlich. Die Feldkonfigurationen müssen dahingehend optimiert sein, so wenig Untergrund wie möglich zu erzeugen und gleichzeitig die Transmissionsbedingung zu erfüllen, siehe Kapitel 4.2.1.

Wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert, ist durch die zu erwartende geringe Rate an Signalelektronen eine hohe Effizienz bei deren Transmission und Detektion sehr wichtig. Hier kommt dem Zusammenspiel von elektrischem und magnetischem Feld eine entscheidende Bedeutung zu.

Der LFCS Optimierer setzt genau an diesem Punkt an. Es handelt sich dabei um ein Programm zur Bestimmung optimaler Spulenströme für das LFCS System am KATRIN Hauptspektrometer. Eine erste Version wurde ursprünglich innerhalb Kassiopeias durch F.Glück, N.Wandkowsky und T.Platon entwickelt [Wan13],[Glü12],[DGL⁺13], und im Rahmen dieser Arbeit in KTrAP integriert sowie um weiterer Funktionen, wie beispielsweise verschiedene Minimierungsroutinen (Abschnitt 4.3.2 und 4.3.3), erweitert.

Der Benutzer legt zunächst die Methoden der elektromagnetischen Feldberechnung, sowie die Geometrie des Aufbaus, fest.

Im Anschluss definiert er die Startparameter der Optimierung, wie Startströme der Luftspulen, Grenzen in denen die Ströme gewählt werden dürfen, sowie die Funktion selbst, welche minimiert werden soll, siehe dazu Abschnitt 4.3.1. Des Weiteren müssen die Kriterien für einen Abbruch der Routine festgelegt werden. Dies kann das Erreichen einer maximalen Schrittzahl des Minimierungsalgorithmus oder auch eine Genauigkeitsanforderung sein.

Im letzten Schritt muss noch die Wahl für eine Minimierungsroutine getroffen werden. Zur Auswahl stehen der Simplex-Algorithmus (siehe [NM65] und Abschnitt 4.3.2), der Markov-Chain Metropolis-Hastings-Algorithmus (siehe [Sch13] und Abschnitt 4.3.3), sowie das Minuit2-Verfahren aus ROOT [Jam00].

Die in den folgenden Kapiteln gewählten Einstellungen der Spulenströme des LFCS wurden mit Hilfe der Simplex-Methode gewonnen. Kapitel 4 enthält einen Vergleich zwischen Simplex und Markov-Chain, ebenso wie eine detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise bei der Optimierung.

3.2.2. Feldliniensimulation

Im Rahmen der Optimierung der LFCS-Einstellungen gilt es, die gewonnenen Spulenströme auf ihre Anwendbarkeit im realen Aufbau hin zu testen. Dabei sind mehrere Kriterien

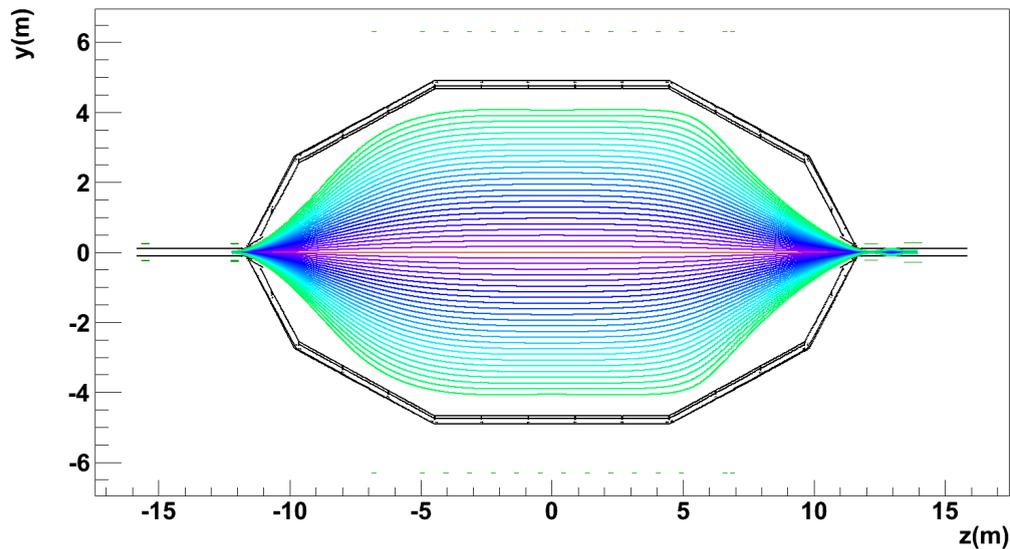


Abbildung 3.6.: Simulationsergebnis des Feldliniensimulators. Zu sehen sind 30 Feldlinien des $\Phi = 191 \text{ Tcm}^2$ -Flussschlauchs. Die Berechnung erfolgt nur in der oberen Hälfte und die Feldlinien werden bei $y = 0$ gespiegelt. Das Magnetfeld im Zentrum des Spektrometers beträgt $B = 0,3 \text{ mT}$.

zu erfüllen, wie beispielsweise die Tatsache, dass der magnetische Flussschlauch, der auf dem Detektor abgebildet wird durch die gewählten Spulenströme weder die Tankwand noch die Elektrodenlagen berühren darf. Dadurch wäre eine Verletzung der Transmissionsbedingung gegeben und ein Teil des Signals ginge verloren.

An dieser Stelle kommt das Programm zur Feldliniensimulation zum Tragen. Die optimierten Spulenströme werden als Parameter eingelesen und die resultierenden Feldlinien gezeichnet, siehe Abbildung 3.6. Gleichzeitig sind weitere Parameter, wie der Verlauf des elektrischen Potentials oder die daraus resultierende longitudinale kinetische Energie, sehr wichtig. Der Ort, an dem diese Größen ihr Minimum erreichen, wird Analysierpunkt genannt und ist eine zentrale Kenngröße der Transmissionseigenschaften des Spektrometers. Für jede simulierte Feldlinie wird dieser Analysierpunkt berechnet und ebenfalls in einem Diagramm dargestellt. Dadurch ist es möglich, dessen radiale Abhängigkeit zu bestimmen. Die Möglichkeiten des Feldliniensimulators werden im folgenden Kapitel 4 bei der Optimierung angewendet.

3.2.3. Transmissionstools

Neben den zuvor erläuterten Bestandteilen von KTrAP existieren weitere Programme zur Untersuchung der Transmissionseigenschaften des Spektrometers, auf die im Folgenden kurz eingegangen wird.

- **Erstellung einer Transmissionsdatei:** Eine Transmissionsfunktion besteht für gewöhnlich aus einer Vielzahl von Messpunkten (etwa 50-60) bei unterschiedlichen Potentialen. Jeder dieser Punkte beschreibt die Wahrscheinlichkeit für ein Elektron bei einer bestimmten Energie transmittiert zu werden, siehe Abbildung 3.7. Bei Simulationen werden die Ergebnisse jedes einzelnen Messpunktes in einer eigenen Datei gespeichert. Um dennoch die komplette Funktion untersuchen zu können wird das Programm "Create Transmission File" eingesetzt. Damit lassen sich die Dateien der

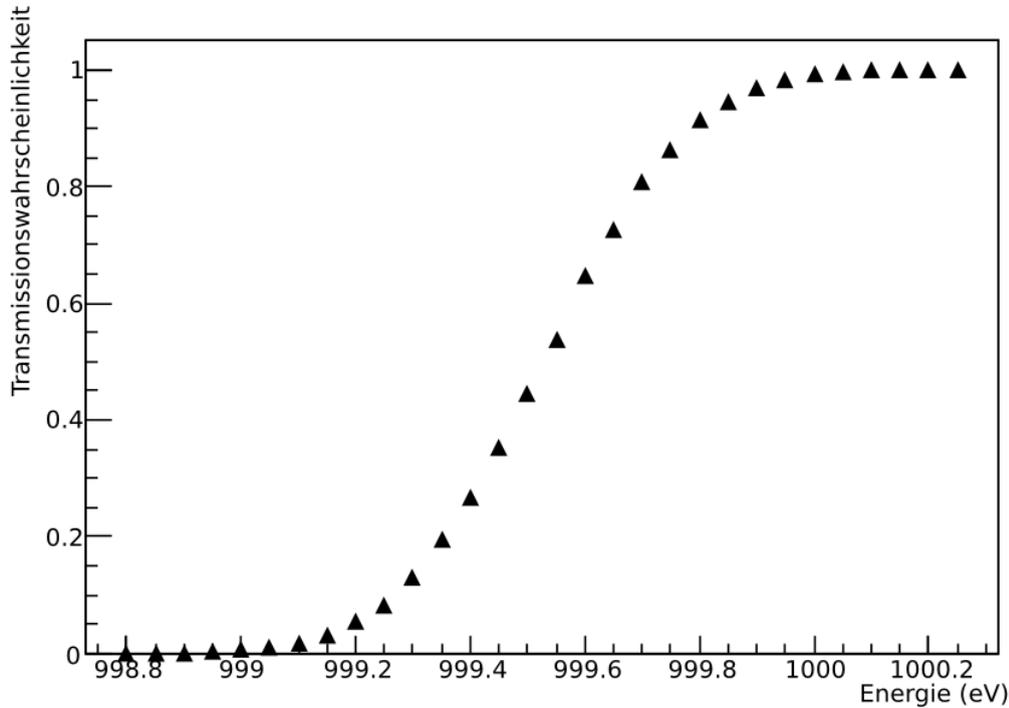


Abbildung 3.7.: Simulierte Transmissionsfunktion bei einem Magnetfeld von $B = 0,38$ mT, siehe Abbildung 3.6. Erstellt wurde die Datei mit Hilfe des Programms "Create Transmission File" und geplottet mit dem "Transmissionsplotter"

Messpunkte öffnen, die relevanten Größen wie Energie und Rate auslesen und in einer einzelnen Datei zusammenführen.

- **Transmissionsplotter:** Die erzeugte Transmissionsdatei lässt sich mit Hilfe eines weiteren Programms, dem "Transmissionsplotter" als Grafik darstellen, siehe Abbildung 3.7. Gleichzeitig ist er in der Lage mehrere Dateien dieses Formats verarbeiten zu können, was es ermöglicht verschiedene Transmissionsfunktionen in einer Darstellung vergleichen zu können.
- **Startzeitmodifikator:** In Abschnitt 3.1.3 wurde bei der Beschreibung des Zeit-Generators verdeutlicht, dass die Startzeit eines Teilchens in der Simulation meist mit Null angenommen wird. Problematisch wird diese Einstellung, wenn die Teilchenerzeugung mit Hilfe eines Lasers oder eine LED geschehen soll, die aufgrund des photoelektrischen Effekts [Ein05] Elektronen aus einer beschichteten Kathodenoberfläche herauslöst. In den Abschnitten 5.1 und 5.4.1 ist dies bei der Verwendung einer Elektronenkanone dargestellt. Durch Unterschiede in den Pulslängen, sowie in der Anzahl an pro Puls erzeugten Elektronen, ist die Zeitverteilung komplizierter. Diesem Umstand trägt das Programm "Modify Start Time" Rechnung, indem es solche Effekte berücksichtigt und korrigiert.
Zur Anwendung kommt diese Modifikation insbesondere bei der Simulation der Detektorelektronik DRIPS, siehe 3.1.4, da dort die Ankunftszeitverteilung der Elektronen entscheidenden Einfluss auf das resultierende Signal hat. Des Weiteren bietet sich mit Hilfe des Programms die Möglichkeit, bereits durchgeführte Simulationen mit einer Startzeit der Teilchen von Null anzupassen und wiederzuverwenden, wodurch die Zeit für eine neue Simulation gespart werden kann.

4. LFCS Magnetfeldoptimierung

Für die Bestimmung der Neutrinomasse mit dem KATRIN Experiment werden genaue Kenntnisse der elektromagnetischen Felder benötigt. Insbesondere im Hauptspektrometer, welches nach dem MAC-E-Filterprinzip, siehe Abschnitt 2.7, funktioniert und in welchem die Analyse der Elektronen stattfindet, ist eine Optimierung der Feldkonfigurationen unerlässlich.

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht die Magnetfeldoptimierung. Dazu wird in Abschnitt 4.1 ein Überblick über die Spulensysteme LFCS (4.1.1) sowie EMCS (4.1.2) gegeben. Im Anschluss werden die Anforderungen an eine Optimierung im Hinblick auf die sogenannte Transmissionsbedingung (4.2.1) anhand der elektromagnetischen Eigenschaften des Spektrometers verdeutlicht.

Das im vorangegangenen Kapitel erläuterte Programm LFCS Optimierer (3.2.1) wird verwendet um auf Basis einer mathematischen Mehrkriterienoptimierung (4.3.1) eine optimierte Spulenkongfiguration zu erhalten.

Es kommen dabei zwei Minimierungsverfahren zur Anwendung, deren Funktionsweise in den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3, und deren Ergebnisse im Rahmen von Abschnitt 4.4 erläutert werden.

4.1. Die Luftspulensysteme des Hauptspektrometers

Das Luftspulensystem des KATRIN Hauptspektrometers gliedert sich in zwei voneinander unabhängige Systeme, die um den Hauptspektrometertank angebracht sind. Ein axialsymmetrischer Aufbau zur Feinformung des Feldes (LFCS), welches in Abbildung 4.1 grün dargestellt ist, sowie ein nicht-axialsymmetrischer Aufbau, in Abbildung 4.1 rot und blau markiert, zur Kompensation des Erdmagnetfeldes (EMCS).

Ohne diese beiden Korrekturfelder wäre der für das Experiment relevante Fluss Schlauch verformt und würde, wie aus Darstellung 4.2 ersichtlich, nicht in den Tank hineinpassen. Die Folgen wären eine erhöhte Untergrundrate von den Wänden, sowie ein Verlust an Signalelektronen, welche auf die Wand treffen.

Mit Hilfe des EMCS wird die Verformung durch das Erdmagnetfeld ausgeglichen, siehe Abbildung 4.3(a). Der Durchmesser des Fluss Schlauchs ist im Zentrum jedoch nach wie vor größer als der Durchmesser des Spektrometertanks. Daher ist eine weitere Korrekturmaßnahme mit Hilfe des LFCS nötig. Eine Berührung des Fluss Schlauchs mit der inneren Tankwand wird dadurch verhindert. Der mit beiden Kompensationsfeldern resultierende Verlauf des Fluss Schlauchs ist in Bild 4.3(b) dargestellt.

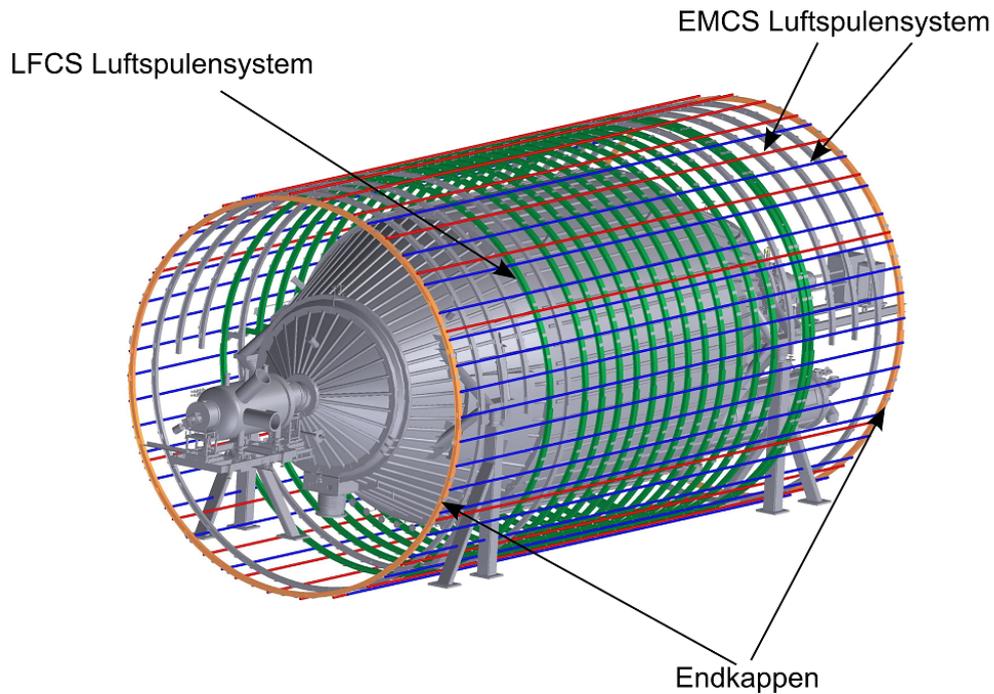


Abbildung 4.1.: Das axialsymmetrische LFCS Luftspulensystem in grün, sowie das nicht-axialsymmetrische EMCS System in blau/rot. Die beiden orangefarbenen Endkappen beherbergen die elektrischen Verbindungen der linearen EMCS Segmente.

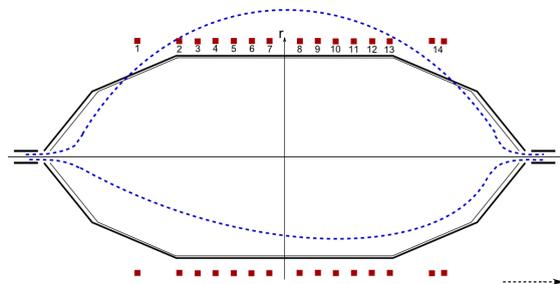


Abbildung 4.2.: Schematische Darstellung des magnetischen Flusschlauchs ohne Korrektur durch die beiden Luftspulensysteme.

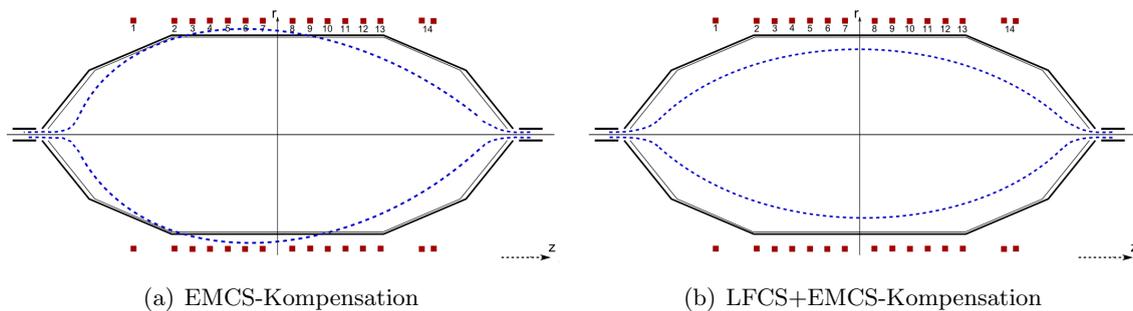


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung des magnetischen Flusschlauchs (a) nach der Korrektur durch das EMCS, (b) nach der Korrektur durch LFCS+EMCS.

Tabelle 4.1.: Axiale Position z , Windungszahl $N_{\text{Windungen}}$ sowie maximale Stromstärke I_{max} für die 14 Spulen des LFCS.

Luftspule	z (m)	$N_{\text{Windungen}}$	I_{max} (A)
1	-6,79	14	100
2	-4,94	14	100
3	-4,04	8	125
4	-3,14	8	125
5	-2,24	8	125
6	-1,34	8	125
7	-0,44	8	125
8	0,46	8	125
9	1,35	8	125
10	2,26	8	125
11	3,16	8	125
12	4,06	14	100
13	4,95	14	100
14a	6,60	14	70
14b	6,90	14	70

4.1.1. Low Field Correction System - LFCS

Das LFCS besteht aus 14 ringförmigen Spulen mit einem Durchmesser von 12,6 m. Sie sind außerhalb des Spektromertanks angebracht und verlaufen axialsymmetrisch zur Strahlachse. Die genaue Position z , Windungszahl $N_{\text{Windungen}}$ und maximale Stromstärke I_{max} lassen sich Tabelle 4.1 entnehmen.

Jede Spule besitzt ihr eigenes Netzteil, wodurch sie sich individuell ansteuern lassen. Dies erlaubt eine Feinjustierung des Magnetfeldes, dass je nach Anforderung eine Vielzahl unterschiedlicher Magnetfeldeinstellungen realisiert werden können. Magnetfeldstärken von 0,3 mT bis 1 mT sind in der Analysierebene erreichbar. Da die Energieauflösung des MAC-E-Filters allein vom Verhältnis magnetischen Feldstärken am Pinch-Magneten und im Zentrum des Spektrometers abhängt, siehe Gleichung 2.5, sollte das Magnetfeld im nominellen Betrieb, also bei der Bestimmung der Neutrinomasse, möglichst klein gewählt werden ($B \approx 0,3 - 0,4$ mT). Gleichzeitig muss der Referenz-Flussschlauch jedoch innerhalb des Spektrometers gehalten werden, wodurch eine untere Grenze für das Feld vorgeben ist. Sie liegt im Bereich von $B \approx 0,33$ mT.

Bei der Beschreibung des Hauptspektrometers in Abschnitt 2.3.3 wurde deutlich, dass die supraleitenden Solenoide am Ein- und Ausgang des Spektrometers unterschiedliche Feldstärken besitzen. Ihr Streufeld verursacht eine Verschiebung des Flussschlauches, wodurch eine Asymmetrie bezüglich der Analysierebene erzeugt wird, siehe Abbildung 4.3(a). Mit Hilfe der letzten detektorseitigen Luftspule (14a+14b in Tabelle 4.1) wird diese Asymmetrie beseitigt. Sie besteht aus zwei Spulen in kleinem Abstand, deren Stromrichtung gegenüber den restlichen 13 Spulen umgekehrt wurde. Dadurch fungieren sie als "Gegenspulen" und reduzieren das Feld der detektorseitigen Magnete, dem Pinch- und Detektormagneten. Die Optimierung der Spulenströme des LFCS ist Inhalt dieses Kapitels.

4.1.2. Earth Magnetic Field Compensation System - EMCS

Für die Kompensation des Erdmagnetfeldes muss zunächst dessen Ausrichtung und Stärke am relevanten Ort (Campus Nord in Karlsruhe) bekannt sein. Laut dem Geoforschungszentrum in Potsdam [Pot13] besitzt das Erdmagnetfeld dort im August 2013 eine Gesamtintensität von $B_{\text{ges}} = 48,28 \mu\text{T}$.

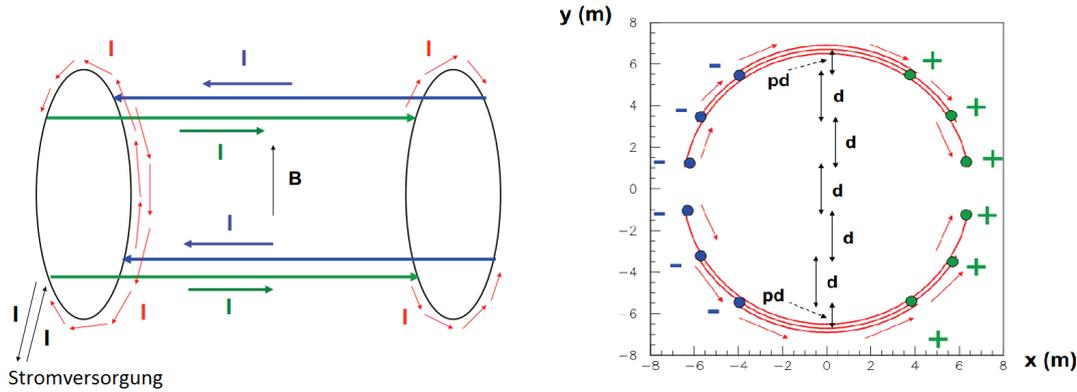


Abbildung 4.4.: Schematische Darstellung des Stromverlaufs in zwei horizontalen "cosine coils", welche die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes kompensieren. Die beiden Kreise entsprechen den orangefarbenen Endkappen des Spektrometers in Abbildung 4.1 (**links**). Querschnitt durch die x-y-Ebene, die z-Richtung zeigt in die Fläche hinein (**rechts**). Die Farben korrespondieren zu denen im linken Bild. Die Position der horizontalen Drähte liegt auf einem Kreis mit äquidistantem vertikalem Abstand zwischen verschiedenen Schleifen. Aus [DGL⁺13] (mod)

Diese verteilt sich auf die Nord-Komponente mit $B_{\text{Nord}} = 20,60 \mu\text{T}$, die Ost-Komponente mit $B_{\text{Ost}} = 0,61 \mu\text{T}$ sowie die vertikale Komponente mit $B_{\text{vert.}} = 43,66 \mu\text{T}$.

Da die Strahlachse des KATRIN-Experiments bis auf wenige Grad Abweichung eine Süd-Nord Ausrichtung besitzt, was in KATRIN-Koordinaten der z-Achse entspricht, lässt sich die Nord-Komponente fast ausschließlich durch das axialsymmetrisch zur z-Achse aufgebaute LFCS kompensieren.

Somit verbleiben die vertikale $B_{\text{vert.}}$, die horizontale(Ost)- sowie ein kleiner Beitrag der horizontalen(Nord)-Komponente $B_{\text{horiz.}(Ost+Nord)}$, die mit Hilfe der EMCS unabhängig voneinander kompensiert werden müssen. Das Erdmagnetfeld innerhalb des experimentellen Aufbaus wird als homogen angenommen, wodurch ein homogenes Kompensationsfeld benötigt wird. Geeignete Systeme wie Helmholtz-Spulen scheiden jedoch aufgrund der erforderlichen Größe für den Einsatz aus [Fuj88, Kir92, SN06].

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung eines Systems aus sogenannten "cosine coils" [EO66]. Es handelt sich dabei um eine spezielle Anordnung der Leiterschleifen entlang einer zylindrischen Oberfläche, so dass die Stromdichteverteilung innerhalb der Schleifen eine $\cos(\theta)$ -Form annimmt. Dies wird dadurch erreicht, dass die Schleifen im Schnittpunkt von horizontalen äquidistanten Linien mit einem Kreis vom Radius des LFCS Systems platziert werden, siehe Bild 4.4 rechts. Für die vertikale Komponente wird ein System aus 16 Leiterschleifen (8 je Halbkreis) benötigt (Abbildung 4.1 blaue Drähte), während für den schwächeren horizontalen Teil 10 Schleifen (5 je Halbkreis) (Abbildung 4.1 rote Drähte) ausreichend sind.

Jede der Schleifen besteht aus zwei geraden Segmenten entlang der Spektrometerachse, sowie aus zwei Bögen an den Enden, siehe Abbildung 4.4 links sowie Abbildung 4.1. Durch den Zusammenschluss aller vertikalen sowie horizontalen Schleifen lässt sich durch die Einstellung von zwei Strömen (EMCS-vert. 50 A und EMCS-horiz. 9A) das Erdmagnetfeld kompensieren.

4.2. Die elektromagnetischen Eigenschaften des Hauptspektrometers

Die elektromagnetischen Eigenschaften, die das Hauptspektrometer erfüllen muss, sind vielfältig und erfordern eine genauere Betrachtung [GMO⁺09] in diesem Abschnitt. Im Besonderen wird das Augenmerk auf der magnetischen Optimierung liegen [DGL⁺13, Wan13].

- **Magnetische adiabatische Führung**

Wie schon bei der Beschreibung der Luftspulensysteme 4.1 erwähnt, ist ein zentraler Punkt die magnetische, adiabatische Führung der Elektronen. Signalelektronen aus dem β -Zerfall von Tritium müssen mit möglichst hoher Effizienz durch das Spektrometer zum Detektor geleitet werden. Dazu ist es nötig den magnetischen Flussschlauch mit einer Größe von 191 Tcm^2 innerhalb der Tankwand zu halten. Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, geschieht dies mit Hilfe der Korrekturfelder des LFCS sowie des EMCS. Ein direkter Kontakt des Flussschlauchs mit den Elektroden oder der Tankwand würde dazu führen, dass dort herausgelöste Elektronen direkt zum Detektor geführt werden würden. Dies hätte einen Anstieg der Untergrundrate zur Folge. Gleichzeitig wären Signalelektronen, die durch einen verformten Flussschlauch auf der Wand aufschlagen, für die Analyse verloren. Die adiabatische Führung, die für die Elektronen erforderlich ist, siehe Abschnitt 2.2.2, gelingt nur, sofern der Magnetfeldgradient innerhalb des Spektrometers nicht zu groß wird. Durch die axialen Ausmaße des Tanks ist dieser Anforderung Rechnung getragen.

- **Transmissionsbedingung**

Ein weiterer wichtiger Bestandteil ist die Erfüllung der Transmissionsbedingungen. Im Allgemeinen besitzen die Teilchen beim Eintritt in das Spektrometer einen Startwinkel, wodurch ein Teil ihrer kinetischen Energie in Form von transversaler Energie vorliegt. Mit Hilfe des MAC-E-Filters wird dieser Teil in longitudinale Energie umgewandelt und kann somit durch das elektrostatische Retardierungspotential analysiert werden. Der Punkt, an dem die Elektronen keine longitudinale Energie mehr besitzen und umkehren, wird Analysierpunkt genannt.

Ziel ist es, eine Konfiguration zu finden, in welcher dieser Punkt nicht vom Startwinkel abhängt. Des Weiteren sollen die Analysierpunkte verschiedener Feldlinien in einer Ebene, der sogenannten Analysierebene, nahe dem Spektrometerzentrum liegen.

Eine genauere Betrachtung der Transmissionsbedingungen wird in Abschnitt 4.2.1 stattfinden.

- **Homogenität des Magnetfeldes**

Eine gute radiale Homogenität des Magnetfeldes ist für die Analyse unumgänglich. Auch im Falle einer Erfüllung der Transmissionsbedingungen sind kleine Inhomogenitäten des Magnetfeldes zwischen den einzelnen Feldlinien nicht zu verhindern. Sie gehen als systematische Fehler in die Analyse des Tritium- β -Spektrums ein. Durch die Verwendung eines Multipixeldetektors, siehe Abschnitt 2.3.4, der eine radiale Auflösung besitzt, lässt sich diese Systematik reduzieren.

- **Untergrund**

Bei der Reduktion des Untergrundes kommt dem Magnetfeld eine besondere Bedeutung zu. Frühere Experimente an MAC-E-Filtern haben gezeigt, dass durch eine Erhöhung des Magnetfeldes der Untergrund reduziert werden kann [Gol95, Mül02, Lam09, Gro10].

Dieser wird hauptsächlich durch Myon-induzierte Sekundäremission von Elektronen aus der Tankwand oder den inneren Elektroden erzeugt. Für diese Teilchen ist es schwer in ein senkrecht zu ihnen verlaufendes Magnetfeld einzudringen, wodurch dieses als eine Art Schild fungiert. Je stärker das Feld, desto weiter ist der Fluss-schlauch von der Wand entfernt und umso schwieriger ist das Eindringen in ihn. Gleichzeitig wird jedoch auch die Energieauflösung des Spektrometers verschlechtert, da diese vom Verhältnis der Magnetfelder abhängt. Dementsprechend muss eine optimale Einstellung gefunden werden, bei der die Energieauflösung akzeptabel und der Untergrund möglichst gering ist.

4.2.1. Transmissionsbedingung

Bei der Beschreibung der Transmissionsbedingung ist der Begriff der Transmissionsenergie entscheidend. Dazu betrachtet man ein Elektron, das am Punkt P_S in der Quelle startet. Das dort herrschende Potential wird mit U_S , das Magnetfeld mit B_S bezeichnet. Die kinetische Energie des Teilchens beträgt E_S . Aufgrund der Energieerhaltung lässt sich die kinetische Energie E_P an einem beliebigen Punkt P der Bahn durch

$$E_S + qU_S = E_P + qU_P \quad (4.1)$$

berechnen. U_P steht für das Potential am Punkt P und q bezeichnet die Ladung des Teilchens ($q = -e$ für ein Elektron).

Die kinetische Energie E setzt sich dabei aus einer longitudinalen E_{\parallel} , sowie einer transversalen Komponente E_{\perp} zusammen.

$$E = E_{\perp} + E_{\parallel} \quad (4.2)$$

Aufgrund der adiabatischen Bewegung, bei der das magnetische Moment μ nach Gleichung 2.4 eine Erhaltungsgröße ist, lässt sich die Gleichung nach der longitudinalen Energie im Punkt P umstellen. Man erhält

$$E_{P\parallel} = E_S - q(U_P - U_S) - \frac{B_P(\gamma_S + 1)}{B_S(\gamma_P + 1)} E_S \sin^2(\theta_S). \quad (4.3)$$

Der Winkel θ_S beschreibt dabei den Winkel zwischen Magnetfeldrichtung und Impulsrichtung und γ ist der relativistische Lorentzfaktor mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + E/(mc)^2$.

Wird die Startenergie E_S groß genug gewählt, so bleibt die longitudinale Energie auf der gesamten Bahn positiv. Für das Teilchen bedeutet dies, dass es das Spektrometer durchquert und zum Detektor gelangt. Der Punkt, an dem die Gleichung 4.3 den Wert Null erreicht, wird Analysierpunkt P_A genannt. Die entsprechende Startenergie E_S wird Transmissionsenergie E_{trans} genannt und es gilt $E_S = E_{trans}$.

Gleichung 4.3 lässt sich damit umformen und man erhält

$$E_{trans} = \frac{q(U_A - U_S)}{1 - \frac{B_A(\gamma_S + 1)}{B_S(\gamma_A + 1)} \sin^2(\theta_S)}, \quad (4.4)$$

wobei U_A das Potential und B_A das Magnetfeld am Analysierpunkt beschreibt.

Die Transmissionsenergie ist also einerseits durch das Verhältnis der Magnetfelder zwischen Analysierpunkt B_A und Startpunkt B_S , und andererseits durch die Potentiale an diesen Punkten bestimmt, wobei es sich rein um Spektrometereigenschaften handelt. Die Abhängigkeit vom Startwinkel θ_S ist hingegen von der Quelle definiert.

Betrachtet man nun eine feste Spektrometerkonfiguration, so ist die Transmissionsenergie allein eine Funktion des Startwinkels $E_{trans}(\theta_S)$. Ein wichtiger Punkt ist, dass θ_S immer den maximalen Winkel $\theta_{S,max}$ beschreibt, der bei dieser Energie transmittiert wird. Für

Startwinkel $\theta_S < \theta_{S,max}$ ist $E_S > E_{trans}$ und somit die Transmission gewährleistet. Im Umkehrschluss lässt sich Gleichung 4.4 auch invertieren

$$\theta_{S,max}(E_S) = \arcsin \sqrt{\left(1 - \frac{q(U_A - U_S)}{E_S}\right) \frac{B_S}{B_A}}, \quad (4.5)$$

wodurch der maximal mögliche Startwinkel $\theta_{S,max}$ in Abhängigkeit einer festen Startenergie E_S berechnet werden kann.

Mit Hilfe der Transmissionsenergie lässt sich im Folgenden die Transmissionsfunktion $T(E_S)$ berechnen. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Elektron mit fester Startenergie E_S transmittiert wird. Zunächst muss mit der Gleichung 4.5 der maximale Startwinkel $\theta_{S,max}$ bestimmt werden für den $E_S \geq E_{trans}$ erfüllt ist. Dies bedeutet, dass Teilchen mit größeren Winkeln $\theta_S \geq \theta_{S,max}$ aufgrund einer resultierenden Startenergie von $E_S \leq E_{trans}$ reflektiert werden. Im nächsten Schritt wird über alle realisierbaren Winkel, beginnend beim kleinsten $\theta_{S,min}$ bis hin zum größten $\theta_{S,max}$ integriert. Um eine Gewichtung entsprechend der auftretenden Häufigkeit vornehmen zu können muss die normalisierte Winkelverteilung der Elektronen bekannt sein. Im Falle einer isotropen Quelle ist $\theta_{S,min} = 0^\circ$ und $\theta_{S,max}$ durch die Startenergie $\theta_{S,max}(E_S)$ gegeben, siehe Gleichung 4.5. Wir erhalten schließlich die normalisierte Transmissionsfunktion

$$T(E_S, q\Delta U) = \begin{cases} 0 & E_S < q\Delta U \\ \frac{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{q\Delta U}{E_S}\right) \frac{B_S}{B_A}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B_S}{B_{max}}}} & q\Delta U < E_S < q\Delta U + \Delta E \\ 1 & E_S > q\Delta U + \Delta E \end{cases} \quad (4.6)$$

Darin beschreibt $\Delta U = U_A - U_S$ die Potentialdifferenz zwischen Analysier- und Startpunkt, $\Delta E = E \frac{B_A}{B_{max}}$ die Energieauflösung des MAC-E-Filters (siehe Gleichung 2.5) und B_{max} das maximale Magnetfeld im experimentellen Aufbau (Pinch).

Eine detaillierte Herleitung von Gleichung 4.6 findet sich in [Wan13].

Das Magnetfeld wurde detektorseitig stärker gewählt als quellseitig (Designwerte: $B_S = 4,5$ T, $B_{max} = 6$ T), wodurch es einen maximalen Akzeptanzwinkel $\theta_{S,max} = 60^\circ$ gibt, oberhalb dessen alle Elektronen am Pinch reflektiert werden (magnetischer Spiegel, Gleichung 2.7 in Abschnitt 2.2.2). Diese Art der Winkelselektion ist unabhängig von der Startwinkelverteilung und wird in der Transmissionsfunktion 4.6 durch den Term im Nenner berücksichtigt.

Muss durch ein Nichterfüllen der Transmissionsbedingung zusätzlich die Winkelabhängigkeit des Potentials U_A und Magnetfeldes B_A sowie eine mögliche radiale Abhängigkeit beachtet werden, so ist die Berechnung der Transmissionsfunktion ungleich schwieriger zu bewerkstelligen.

Zusammenfassend lassen sich die Transmissionsbedingung folgendermaßen ausdrücken.

- Der Analysierpunkt und damit das Minimum der longitudinalen Energie soll unabhängig vom Startwinkel sein.
- Die Analysierpunkte der einzelnen Feldlinien sollten an der gleichen axialen Position im Zentrum des Spektrometers bei $z = 0$ m, der sogenannten Analysierebene zusammenfallen.

Durch die Erfüllung der Transmissionsbedingungen ist die Transmissionsfunktion von nur wenigen Parametern B_S , B_A , B_{max} , U_S und U_A abhängig, was ihre Bestimmung erheblich vereinfacht.

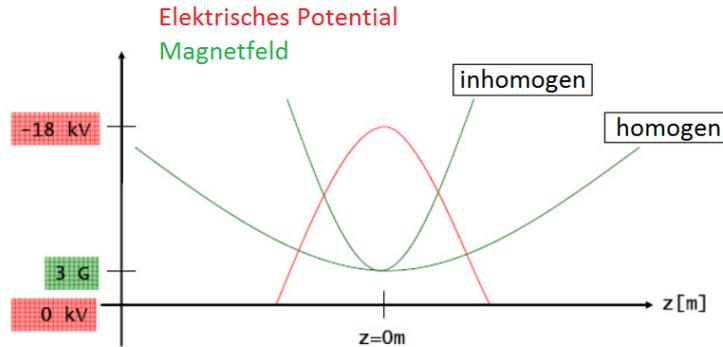


Abbildung 4.5.: Inhomogenes elektrisches Potential, das sein Maximum bei $z = 0$ besitzt und schnell zu beiden Enden abnimmt. Aufgrund der Dominanz des elektrischen Potentials ist eine Erfüllung der Transmissionsbedingung unabhängig vom Magnetfeld möglich. Diese Konfiguration ist aufgrund der im Text erläuterten Nachteile bei KATRIN jedoch nicht realisiert. Aus [GMO⁺09] (mod.)

4.2.2. Realisierung der Transmissionsbedingungen

Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, ist die Erfüllung der Transmissionsbedingungen von entscheidender Bedeutung. Dabei gibt es drei mögliche Konfigurationen zur Realisierung, die im Folgenden kurz erläutert werden.

1.) Inhomogenes elektrisches Potential

In diesem Fall wird eine elektrische Feldkonfiguration gewählt, in der das Potential seinen maximalen Wert in der Analysierebene besitzt und zu beiden Seiten des Spektrometers schnell abfällt, siehe Abbildung 4.5. Dann ist das Minimum der longitudinalen Energie durch das Potentialmaximum definiert und der Einfluss des Magnetfeldes ist vernachlässigbar. In Gleichung 4.3 zeigt sich dies durch eine Dominanz des zweiten Terms (der Potentiale) gegenüber den anderen Beiträgen. Da jedoch eine große axiale Inhomogenität des Potentials auch eine entsprechende radiale Inhomogenität impliziert, kann eine solche Konfiguration bei KATRIN nicht verwendet werden.

2.) Homogenes elektrisches Potential mit globalem Magnetfeldminimum

Durch das Elektrodensystem kann ein sehr homogenes elektrisches Potential über den gesamten axialen Verlauf des Spektrometers erzeugt werden, siehe Abbildung 4.6. Diese axiale Homogenität schlägt sich in einer ebenfalls sehr guten radialen Homogenität nieder, welche für die Bestimmung der Transmissionsfunktion von Vorteil ist. Für einen Startwinkel von $\theta_S = 0^\circ$ ist die Longitudinalenergie sogar gänzlich unabhängig vom Magnetfeld, siehe Gleichung 4.3. Einzig das maximale elektrische Potential bestimmt das Minimum von E_{\parallel} und damit den Analysierpunkt. Für Startwinkel $\theta_S > 0^\circ$ hingegen verschiebt das Magnetfeld das Minimum von E_{\parallel} . Während das Potential die Longitudinalenergie langsam reduziert, bewirkt das Magnetfeld den gegenteiligen Effekt. Durch Absinken der magnetischen Feldstärke zum Zentrum hin findet eine Konversion von $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$ statt, welche die Longitudinalenergie erhöht. Das homogene Potential ist je nach Inhomogenität des Magnetfeldes nicht in der Lage dies zu kompensieren, wodurch sich der Analysierpunkt verschiebt. In diesem Fall wäre der Punkt winkelabhängig und die Transmissionsbedingung wäre nicht erfüllt.

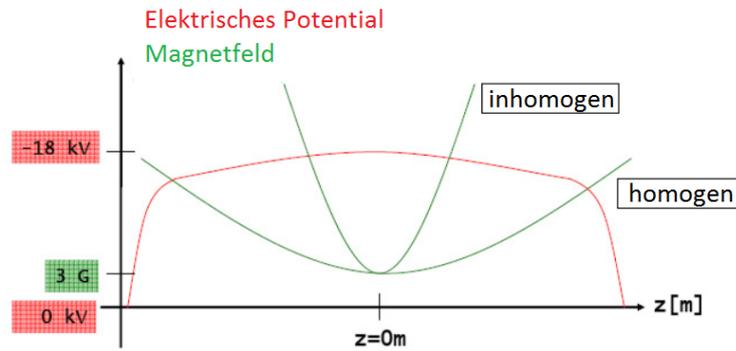


Abbildung 4.6.: Homogenes elektrisches Potential (wie bei KATRIN realisiert) mit einem globalen Magnetfeldminimum im Zentrum bei $z = 0$ gekoppelt. Hierbei muss das Magnetfeld ebenfalls sehr homogen sein, damit die Transmissionsbedingung nicht verletzt wird. Aus [GMO⁺09] (mod.)

Um solch ein Verhalten zu verhindern, muss das Magnetfeld also eine vergleichbare Homogenität wie das elektrische Potential besitzen, damit sich die Reduktion von E_{\parallel} durch das Potential und die Erhöhung von E_{\parallel} durch das Magnetfeld gegenseitig kompensieren.

3.) Homogenes elektrisches Potential und lokales Magnetfeldmaximum

Um die Verletzung der Transmissionsbedingung zu verhindern, besteht des Weiteren die Möglichkeit, statt eines globalen Minimums, eine Magnetfeldkonfiguration zu verwenden, die auf zwei lokale Minima in einem axialen Abstand von wenigen Metern sowie ein lokales Maximum in der Analysierebene setzt. Abbildung 4.7 zeigt eine solche Realisierung.

Zunächst arbeiten das Potential und das Magnetfeld wie in der vorherigen Konfiguration gegeneinander. Durch den Anstieg des Potentials wird E_{\parallel} reduziert während gleichzeitig das absinkende Magnetfeld E_{\parallel} erhöht. Sobald das Elektron ein lokales Minimum erreicht und das Magnetfeld Richtung Zentrum ansteigt, ändert sich die Situation. Nun reduzieren sowohl Potential wie auch Magnetfeld die longitudinale Energie. Dadurch ist gewährleistet, dass dessen Minimum und damit der Analysierpunkt auf jeden Fall im Zentrum liegt. Die Transmissionsbedingung ist in diesem Fall erfüllt.

In den letzten beiden Fällen muss das Magnetfeld so gewählt werden, dass die Umwandlung von $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$ in Richtung des Spektrometerzentrums hinreichend schnell geschieht. Ansonsten führt der steile Potentialgradient dazu, dass die Longitudinalenergie schon außerhalb des Zentrums negativ und das Elektron verfrüht reflektiert wird.

4.3. Mathematische Optimierungsmethoden

Die Einsatzmöglichkeiten des LFCS sind vielfältig und reichen von der Feinformung des Magnetfeldes innerhalb des Hauptspektrometers über die Einstellung der Feldstärke in der Analysierebene (maximal $B = 1$ mT sind realisierbar) bis hin zur Erfüllung der magnetischen Designkriterien, siehe Abschnitt 4.2.

Die dahingehende Optimierung der Spulenparameter (Ströme) ist ein wichtiger Bestandteil zur Realisierung der Transmissionsbedingungen. Durch die individuelle Ansteuerung der einzelnen Spulen bedarf es einer automatisierten Routine, welche die Ströme auf Basis benutzerdefinierter Kriterien berechnet.

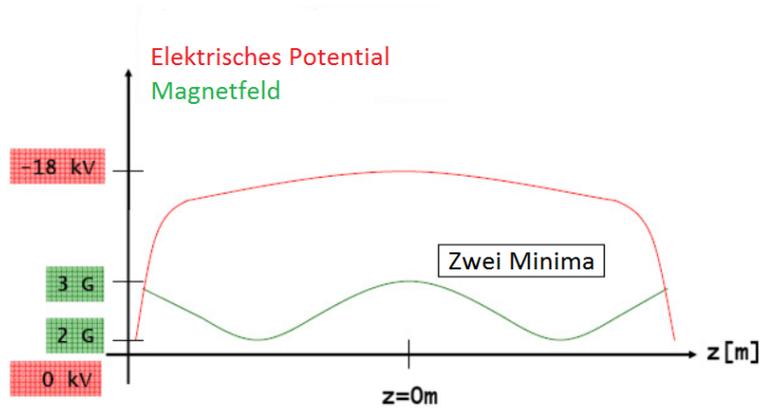


Abbildung 4.7.: Auch hier ist das elektrische Potential sehr homogen. Mit Hilfe eines lokalen Maximums des Magnetfeldes im Zentrum $z = 0$ lässt sich die Transmissionsbedingung wesentlich einfacher erreichen. Aus [GMO⁺09] (mod.)

Die Optimierung kann mit Hilfe zweier unterschiedlicher Verfahren durchgeführt werden, dem Simplex-Algorithmus (Abschnitt 4.3.2) oder der Markov Chain Monte Carlo-Methode (Abschnitt 4.3.3), deren Ergebnisse verglichen werden. Dabei wird die Betrachtung auf die Konfiguration beschränkt, die ein lokales Magnetfeldmaximum im Zentrum aufweist, also der dritten Konfiguration zur Erfüllung der Transmissionsbedingung im vorherigen Abschnitt 4.2.2 entspricht.

Eine Gegenüberstellung und ein Vergleich mit der zweiten relevanten Realisierung aus Abschnitt 4.2.2) findet sich in [DGL⁺13] und [Wan13].

4.3.1. Mehrkriterien-Optimierung

Die Grundlage jedweder mathematischer bzw. numerischer Optimierung liegt zunächst in der Formulierung der Problemstellung und der Definition der Zielvorgaben. Dies erfordert die Festlegung der freien Parameter sowie der Aufstellung eines funktionalen Zusammenhangs der sogenannten Bewertungsfunktion, die optimiert werden soll. Aufbauend darauf wird eine Optimierungsmethode gewählt, die für dieses spezifische Problem geeignet ist, unabhängig davon ob es sich dabei um eine Minimierungs- oder Maximierungsaufgabe handelt.

Die Problemstellung im vorliegenden Fall ist dabei die Suche nach den freien Parametern, den 14 Spulenströmen, an die spezifische Anforderungen gestellt werden wie bspw. die Erfüllung der Transmissionsbedingung oder die Einstellung einer bestimmten Magnetfeldstärke in der Analysierebene. Zum Einsatz kommt eine auf mehreren Kriterien basierende Bewertungsfunktion, die diesen unterschiedlichen Forderungen Rechnung trägt und mit Hilfe der Optimierung minimiert werden soll. Gleichzeitig müssen mögliche Grenzen der Parameter festgelegt werden innerhalb derer sie variiert werden dürfen. Im Falle der Spulenströme sind dies die maximal zulässigen Ströme, siehe Tabelle 4.1.

Die Optimierung beginnt mit der Definition der Bewertungsfunktion F

$$F = \sum_{k=1}^N w_k O_k. \quad (4.7)$$

Sie besteht aus mehreren Kriterien O_k basierend auf den gestellten Anforderungen, sowie den zugehörigen Gewichtungsfaktoren w_k . Diese spiegeln zum einen den unterschiedlichen Stellenwert der einzelnen Kriterien (einige sind wichtiger als andere) wider. Zum anderen dienen sie der Skalierung um die verschiedenen auftretenden Größenordnungen der O_k untereinander ausgleichen zu können.

Im Allgemeinen werden für die Optimierung $N = 3$ Kriterien gewählt, die im Folgenden erläutert werden.

1.) Magnetfeldstärke im Zentrum des Spektrometers

Die erste Zielvorgabe der Optimierung soll eine vom Benutzer definierte Magnetfeldstärke im Zentrum des Spektrometers sein, siehe Abbildung 4.8. Aufgrund der Abhängigkeit der Energieauflösung des MAC-E-Filters von der Magnetfeldstärke im Zentrum ist dies eine wichtige Kenngröße des elektromagnetischen Aufbaus. Funktionell ausgedrückt wird es durch das Quadrat der Abweichung des Ist-Wertes B_{ist} vom Soll-Wert B_{soll}

$$O_1 = (B_{ist} - B_{soll})^2.$$

Der Ist-Wert berechnet sich aus den Beiträgen der Solenoide sowie der aktuellen Einstellungen aller LFCs Spulen, wohingegen der Soll-Wert vom Benutzer zuvor festgelegt wurde.

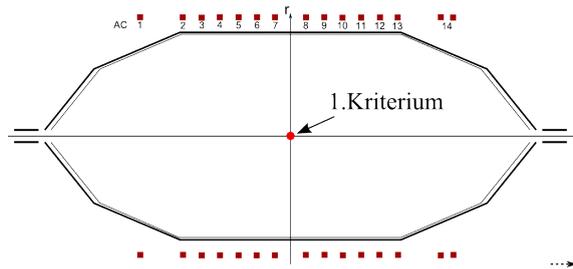


Abbildung 4.8.: Schematische Darstellung des Spektrometers. Der rote Punkt im Zentrum beschreibt den für das erste Optimierungskriterium relevanten Feldpunkt.

2.) Radiale Homogenität

Der zweite Beitrag hat zum Ziel eine gute radiale und damit auch axiale Homogenität des Magnetfeldes zu gewährleisten. Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben sorgt ein homogenes axiales Magnetfeld dafür, dass die Analysierpunkte verschiedener Feldlinien nahe dem Zentrum des Spektrometers zusammenfallen. Dadurch ist die Transmissionsbedingung erfüllt und die Analyse der Transmissionsfunktion wird deutlich vereinfacht. Für die Optimierung werden im Spektrometer bei $z = 0$ m zehn Punkte definiert. Sie befinden sich wie in Abbildung 4.9 dargestellt in äquidistanten radialen Abständen nach außen, wobei $r_p = 0,43p$ mit $p = (0, \dots, 10)$. Der letzte Punkt befindet sich damit in einem Abstand von der Strahlachse von $r = 4,3$ m, was dem äußeren Rand des magnetischen Flusschlauches entspricht. Durch Summation der Quadrate der jeweiligen Differenz aus Ist-Werte $B_{ist,p}$ am Punkt p und Soll-Wert B_{soll} im Zentrum erhält man

$$O_2 = \sum_{p=1}^{10} (B_{ist,p} - B_{soll})^2.$$

3.) Axialer Magnetfeldgradient

Das letzte Kriterium soll im Spektrometerzentrum ein lokales Maximum des Magnetfeldes erzeugen. Wie bei der Beschreibung der Möglichkeiten zur Realisierung der Transmissionsbedingungen in Abschnitt 4.2.2 gezeigt wurde, lässt sich dadurch die Transmissionsbedingung sehr viel einfacher erfüllen, da in diesem Fall das elektrische Potential und das Magnetfeld gemeinsam zur Reduktion der Longitudinalenergie beitragen.

Dementsprechend wird der axiale Magnetfeldgradient, siehe dazu Abbildung 4.10, in

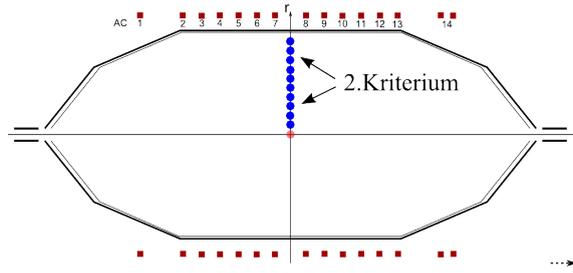


Abbildung 4.9.: Schematische Darstellung des Spektrometers. Die blauen Punkt im Zentrum beschreiben die für das zweite Optimierungskriterium relevanten Feldpunkte.

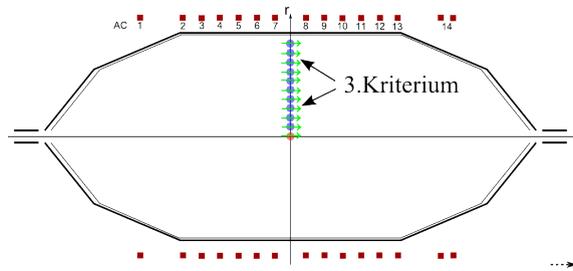


Abbildung 4.10.: Schematische Darstellung des Spektrometers. Die grünen Pfeile im Zentrum beschreiben den für das dritte Optimierungskriterium relevanten axialen Gradienten an den Feldpunkten der ersten beiden Kriterien.

den 11 Punkten, die für die beiden vorherigen Kriterien verwendet wurden, berechnet. Der größte Beitrag geht anschließend in Bewertungsfunktion ein:

$$O_3 = \max \left| \frac{\partial B_{ist,p}}{\partial z} \right|.$$

Mit Hilfe der empirisch gewonnenen Gewichtungsfaktoren $w_1 = 1$, $w_2 = 20$ und $w_3 = 100$ erfolgt im Anschluss die Berechnung der Bewertungsfunktion F . Da sie den unterschiedlichen Stellenwert repräsentieren ist bereits an dieser Stelle ersichtlich, dass der radialen Homogenität, wie auch dem Magnetfeldgradienten, eine deutlich höhere Bedeutung beigegeben wird als der Magnetfeldstärke im Zentrum.

Nach Festlegung der Kriterien sowie der zugehörigen Bewertungsfunktion gilt es nun diese im Hinblick auf eine Optimierung der Spulenströme zu minimieren. Um die Rechenzeit so gering wie möglich zu halten werden die Magnetfelder an den relevanten Punkten nur einmal am Anfang für einen normierten Spulenstrom von 1 A berechnet. Dies ist möglich, da diese Punkte während des gesamten Optimierungszyklus die selben bleiben und sich die Felder dann durch Superposition berechnen lassen. Funktional ausgedrückt lässt sich das Magnetfeld eines Punktes als Überlagerung der Beiträge jeder einzelnen Spule b_j , skaliert mit den durch sie fließenden Strömen I_j beschreiben

$$B = B_{rest} + \sum_{j=1}^{14} b_j I_j. \quad (4.8)$$

Dieses Verfahren ist möglich aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Strom und Magnetfeld. Der konstante "Offset" B_{rest} beinhaltet die unveränderlichen Beiträge der Solenoide sowie des Erdmagnetfeldes.

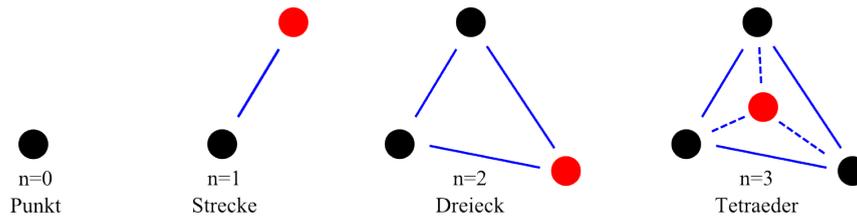


Abbildung 4.11.: Darstellung eines Simplex für verschiedene Dimensionen.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Einhaltung der nominellen Betriebsparameter. Für die Spulen bedeutet dies, dass die maximalen Stromstärken, bei denen sie betrieben werden können, siehe Tabelle 4.1, nicht überschritten werden dürfen.

Solch technische Grenzen führen ebenso zu mathematischen Grenzbedingungen, die bei der Optimierung berücksichtigt werden müssen. Da Einschränkungen der Parameter die Optimierungsaufgabe ungleich erschweren würden, wird eine Variablentransformation der Form

$$I_j = I_{min,j} + \left(I_{max,j} - I_{min,j} \right) \frac{1 + \cos(x_j)}{2} \quad (4.9)$$

eingeführt. Durch den Wechsel des zu optimierenden Parameters vom Spulenstrom I_j zur Variablen x_j ist die Beschränkung durch einen maximalen Strom umgangen worden. x_j als neuer Parameter kann und darf bei der Optimierung jeden Wert annehmen, während gleichzeitig die Grenzen der Ströme eingehalten werden.

Die Startwerte für den Algorithmus werden mit Hilfe einer manuellen Vorauswahl gefunden. Eine zufällige Wahl der Startparameter führt zwar schon zu einer deutlich reduzierten Bewertungsfunktion und dadurch auch zu optimierten Strömen, jedoch zeigen sich große Differenzen bei den Strömen benachbarter Spulen. Deren Belastung wird durch die manuelle Auswahl stark reduziert und gleichzeitig können durch geschickte Wahl der Startbedingungen die Voraussetzungen für die Routinen verbessert werden.

Das Vorgehen ist dabei wie folgt: Zunächst werden von Hand geeignete Startströme gewählt, indem deren Auswirkung auf Transmissionsbedingung, Flussschlauch und Symmetrie betrachtet wird. Zum Einsatz kommen hier die Programme zur Feldlinienberechnung und Visualisierung, aus Abschnitt 3.2.2. Diese manuelle Optimierung muss einige Male durchgeführt werden, bevor die so erhaltenen Spulenströme als Startwerte für den Optimierungsalgorithmus verwendet werden können. Die benötigte Zeit für die Erstellung eines solchen "Satzes" an Startwerten beträgt etwa 30 min.

Abschließend steht noch die Wahl des Algorithmus an, der für die Optimierung verwendet werden soll, siehe dazu Kapitel 3.2.1. Im Folgenden werden zwei Verfahren vorgestellt und miteinander verglichen.

4.3.2. Nelder-Mead Downhill Simplex Algorithmus

Beim ersten Algorithmus handelt es sich um das sogenannte Downhill-Simplex-Verfahren nach J.A. Nelder und R. Mead [NM65]. Es findet Anwendung bei der nichtlinearen Minimierung von Funktionen und gehört in die Kategorie der "Direct-Search-Algorithmen". Dies bedeutet er setzt keinerlei Gradienteninformationen voraus und benötigt somit keine Ableitungen, wodurch eine Implementierung sehr einfach ist. Somit basiert er allein auf dem Vergleich von Funktionswerten mit Hilfe eines Simplex. Dabei handelt es sich um ein geometrisches Objekt, genauer gesagt um ein n-dimensionales Volumen ein sogenanntes Polytop, welches aus n+1 Punkten, sogenannten Vertices, aufgebaut ist. Jeder weitere Vertex erhöht die Dimensionalität um Eins. In Bild 4.11 ist beispielhaft die Darstellung eines Simplex für n=0,1,2,3-Dimensionen gezeigt.

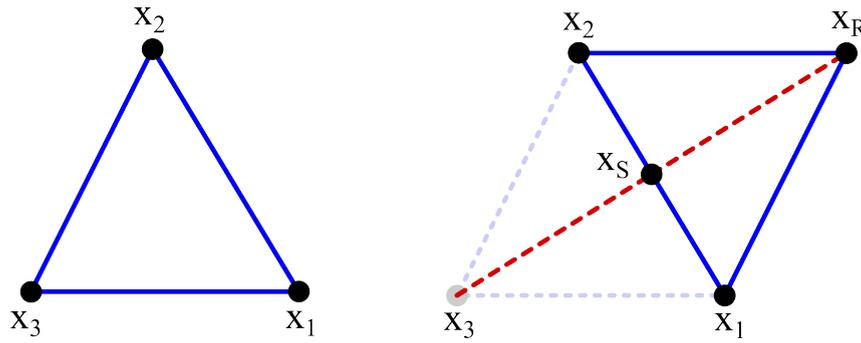


Abbildung 4.12.: Startpunkte x_1, x_2, x_3 des Simplex für $n=2$ Dimensionen (links). Durch Funktionswertevergleich wird versucht, x_3 durch Reflexion am Schwerpunkt x_S durch einen geeigneteren Punkt x_R zu ersetzen (rechts).

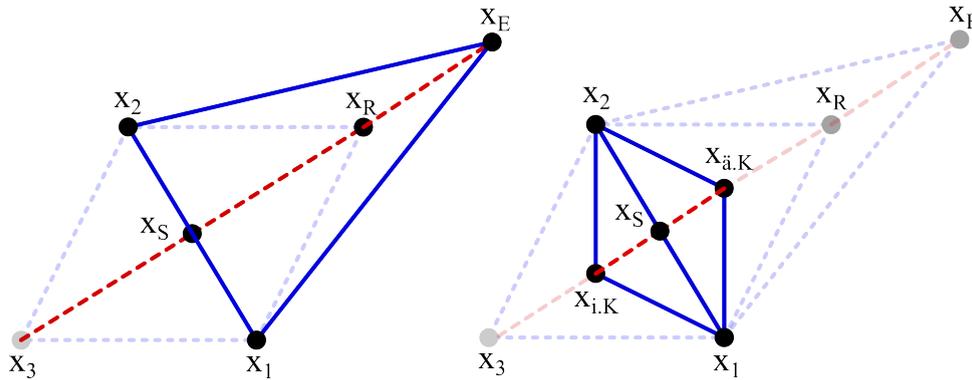


Abbildung 4.13.: Liefert x_R bereits eine Verbesserung, so wird mit Hilfe einer Expansion x_E versucht das Ergebnis weiter zu optimieren (links). Gelingt dies nicht, findet eine Kontraktion (innere $x_{i.K}$ oder äußere $x_{ä.K}$) statt (rechts).

Die Funktionswerte an den Vertices werden miteinander verglichen und auf deren Basis ändert das Simplex durch verschiedene Transformationen iterativ seine Form. Zur Verfügung stehen die Operationen der Reflexion, Expansion sowie der inneren oder äußeren Kontraktion.

Am Beispiel eines $n=2$ -Simplex (Dreieck nach Abbildung 4.11) wird im Folgenden ein iterativer Schritt dargestellt. Demgegenüber handelt es sich bei der Spulenoptimierung um ein $n=14$ dimensionales Problem mit einem entsprechend 15-teiligen Simplex.

Zu Beginn liegt ein Dreieck mit den Koordinaten x_1, x_2 und x_3 vor, siehe Abbildung 4.12 (links). Die zugehörigen Funktionswerte werden entsprechend mit $f(x_1), f(x_2)$ und $f(x_3)$ gekennzeichnet. Im Anschluss erfolgt die Sortierung, aufsteigend nach dem Funktionswert, wobei $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ gilt und sich einfachheitshalber Nummerierungsreihenfolge und Funktionswertsortierung entsprechen. Folglich besitzt Punkt x_3 den größten Funktionswert und trägt somit am stärksten negativ zur Bewertungsfunktion bei. In einem ersten Schritt wird nun versucht den Funktionswert $f(x_3)$ zu verbessern, indem der Punkt reflektiert wird. Dies geschieht im Schwerpunkt x_S der beiden verbliebenen Punkte x_1 und x_2 , wodurch sich Punkt x_R mit Funktionswert $f(x_R)$ ergibt wie in Abbildung 4.12 (rechts). Das weitere Vorgehen hängt nun vom erreichten Resultat ab. Ist $f(x_1) \leq f(x_R) < f(x_3)$, so wird Punkt x_3 verworfen und stattdessen x_R als neuer Punkt x'_3 gewählt. Dadurch ist ein Iterationsschritt beendet und die Prozedur beginnt erneut.

Falls $f(x_R) < f(x_1)$, der Funktionswert am reflektierten Punkt also sogar kleiner ist als am zuvor besten Punkt, so wird eine Expansion durchgeführt, siehe Abbildung 4.13 (links).

Liegt der Funktionswert des Expansionspunktes $f(x_E)$ unterhalb des Reflexionspunktes $f(x_E) < f(x_R)$ so wird der Expansionspunkt x_E als neuer Punkt x_3'' verwendet. Ist allerdings $f(x_R) < f(x_E)$, so wird weiterhin x_R benutzt. Der Grund für dieses Vorgehen ist, dass für einen gefundenen Funktionswert, der kleiner ist als alle bisherigen, die Wahrscheinlichkeit groß ist, dass dieser Punkt einem Minimum zugewandt ist, so dass der Punkt x_E in größerem Abstand lediglich zur Überprüfung benutzt wurde.

Als dritte Möglichkeit ergibt sich $f(x_3) \leq f(x_R)$. Da der Punkt x_R in diesem Fall keine Verbesserung im Vergleich zu x_3 mit sich bringt, wird eine Kontraktion durchgeführt wie in Abbildung 4.13 (rechts) dargestellt. Möglich ist sowohl eine innere $x_{i,K}$, wie auch eine äußere Kontraktion $x_{\bar{i},K}$, wobei im Folgenden nicht zwischen den Kontraktionsarten unterschieden wird. Falls der Funktionswert $f(x_K) < f(x_3)$ ist wird kontrahiert und Punkt x_3 durch x_K ersetzt. Die neue Bezeichnung ist dann x_3''' . Gilt auch für den kontrahierten Punkt $f(x_3) < f(x_K)$, so wird das Simplex in Gänze verkleinert. Der Punkt x_1 mit dem optimalsten Funktionswert behält dabei seine Position bei und die Strecken $\overline{x_1x_2}$ sowie $\overline{x_1x_3}$ werden halbiert.

Die Schrittweiten der Reflexion, Expansion und Kontraktion werden durch Koeffizienten α , β und γ in Abhängigkeit des Abstandes zwischen dem Schwerpunkt x_S und dem Punkt x_3 definiert. Bevorzugte Parameter sind $\alpha = 1$, $\beta = 2$ sowie $\gamma = \frac{1}{2}$, wodurch x_R genauso weit vom Schwerpunkt entfernt ist wie x_3 . Für x_E und x_K gilt Ähnliches mit der doppelten, bzw. der halben Entfernung.

Der mittlere Funktionswert der Bewertungsfunktion F des Optimierungsproblems reduziert sich nach jedem Simplex-Schritt bis entweder ein lokales bzw. globales Minimum oder die maximale Anzahl an Iterationsschritten erreicht ist. Die erhaltenen Spulenströme werden im Anschluss ausgegeben und können als Parameter in Monte Carlo Teilchensimulationen oder für Feldlinienberechnungen eingesetzt werden.

4.3.3. Markov-Chain Monte Carlo mit Metropolis-Hastings-Algorithmus

Die hohe Dimensionalität des Parameterraums kann dazu führen, dass Minimierungsroutinen wie der Downhill-Simplex-Algorithmus Probleme bei der Suche des Minimums bekommen. So können sie je nach Beschaffenheit in lokalen Minima "hängen" bleiben statt das globale Minimum zu finden.

Das zweite Verfahren verwendet dementsprechend eine andere Methode der Optimierung. Ihr zugrunde liegt eine Markov-Chain Monte Carlo (MCMC), die unter Verwendung eines Algorithmus, hier dem Metropolis-Hastings-Algorithmus, das Minimum einer Funktion sucht. Bei einer MCMC basiert das Absuchen des Parameterraums im Allgemeinen auf einer zufälligen Wahl der zu evaluierenden Punkte, einem sogenannten "random walk". Der Zusatz Markov Chain bezieht sich dabei auf die ausschließliche Abhängigkeit des gewählten Punktes x_{n+1} vom vorherigen Punkt x_n . Die Positionen der Punkte x_{n-1} oder x_{n-2} haben keinerlei Einfluss mehr auf die aktuelle Entscheidung.

Der Vorschlag für einen neuen Schritt wird durch das "transition kernel" beschrieben. Im vorliegenden Fall handelt es sich dabei um eine 14-dimensionale Gauß-Verteilung, in deren Zentrum der aktuelle Punkt liegt. Dabei gibt die Breite dieser Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Abstand zwischen vorgeschlagenem und aktuellem Punkt größer oder kleiner ist.

Für die Akzeptanz des neu vorgeschlagenen Punktes ist nun der Metropolis-Hastings-Algorithmus verantwortlich. Er verwendet das sogenannte Metropolis-Verhältnis

$$r = \frac{p(y|D, I)}{p(x_n|D, I)} \cdot \frac{q(x_n|y)}{q(y|x_n)}, \quad (4.10)$$

das entscheidet ob y als neuer Punkt x_{n+1} verwendet wird oder nicht [Gre05]. $\frac{q(x_n|y)}{q(y|x_n)}$ beschreibt dabei die Vorschlagsfunktion. Ist sie symmetrisch, was bei der vorliegenden

Gauß-Verteilung der Fall ist, so ergibt das Verhältnis gerade Eins. Demgegenüber gibt der erste Quotient an, ob Punkt y näher am gesuchten Minimum liegt als x_n und dementsprechend wahrscheinlicher ist. In diesem Fall ist $r > 1$ und der Punkt wird akzeptiert. D und I sind hierbei Parameter der Ziel-Verteilung (Bewertungsfunktion). Bei gleichem Verhältnis ist $r = 1$ und der Punkt wird ebenfalls verwendet. Liegt der vorgeschlagene Punkt jedoch weiter vom Minimum entfernt, d.h. ist der Funktionswert größer, so ist $0 < r < 1$ und beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Punkt akzeptiert wird. Dies ist der große Unterschied zum Downhill-Simplex Verfahren und macht es möglich, dass sich der Algorithmus mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vom Minimum entfernen kann. Dadurch lassen sich lokale Minima durchschreiten. Der Entscheidungsprozess lässt sich mit Hilfe einer Akzeptanzrate

$$\alpha(x_n, y) = \min(1, r) = \min\left(1, \frac{p(y|D, I)}{p(x_n|D, I)} \cdot \frac{q(x_t|y)}{q(y|x_n)}\right) \quad (4.11)$$

beschreiben, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der ein neuer Punkt y akzeptiert wird.

Die hier beschriebene Methode der Anwendung einer MCMC zur Minimierungssuche ist lediglich ein sehr kleiner Ausschnitt für deren Verwendbarkeit. Ihre Stärken spielt sie beispielsweise in der bayesschen Statistik aus, da sie eine Aussage über die "posterior probability" treffen kann, die für gewöhnlich nicht zu berechnen ist.

Eine genaue Betrachtung sowie Beschreibung der MCMC-Verfahren findet sich in [Sch13].

4.4. Ergebnisse der Optimierung

Die Optimierung der Spulenströme erfolgt im Hinblick auf die erstmalige gemeinsame Inbetriebnahme der Spektrometer- und Detektorsektion (SDS¹-Commissioning). In einem ersten Schritt werden Messungen ohne Hochspannung, also einem maximalen Potential von 1kV auf den inneren Drahtlagen durchgeführt, weshalb die Startbedingungen für die Optimierung entsprechend angepasst werden müssen. Eine Änderung zurück zum nominalen Hochspannungsbetrieb (bei 18,6 kV) ist jedoch sehr einfach möglich. Die verwendeten Einstellungen der Solenoide sowie des Elektrodensystems sind in den Tabellen 4.2 und 4.3 ersichtlich.

Tabelle 4.2.: Position, Feld- und Stromstärke der Solenoide beim SDS Commissioning

Komponente	z (m)	B (T)	I (A)
PS1	-15,50	3	104,7
PS2	-12,10	4,3	148,6
Pinch	12,18	5	72,6
Detektor	13,78	3,5	54,6

Tabelle 4.3.: Potentialbelegung des Elektrodensystems beim SDS Commissioning

Komponente	U (V)
innere Drahtlage	-1000,0
äußere Drahtlage	-1000,0
Tank	0.0

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Optimierung mit Hilfe des Simplex-Algorithmus sowie auch der MCMC gezeigt. Ziel der Optimierung ist es, geeignete Magnetfeldkonfigurationen für die Messphase zu erhalten. Hier werden zwei unterschiedliche Spuleneinstellungen vorgestellt, die einem Magnetfeld in der Analysierebene von $B = 0,36$ mT und $B = 0,48$ mT entsprechen.

Beide Verfahren beginnen ihre Minimierung mit den selben Startwerten, die mit Hilfe einer manuellen Vorauswahl, siehe Kapitel 4.3.1, gewonnen wurden.

4.4.1. $B = 0,36$ mT in der Analysierebene

Die minimal mögliche Stärke des Magnetfeldes in der Analysierebene unter Verwendung optimierter Luftspulenströme liegt im Bereich von $B = 0,35$ mT für den maximalen magnetischen Flusschlauch von $\Phi = 210$ Tcm², siehe dazu Abbildung 4.14. Die erste Konfiguration mit $B = 0,36$ mT kommt dieser Anforderung sehr nah. Beide Optimierungsroutinen starten jeweils mit den selben Anfangsparametern um eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse gewährleisten zu können. In Tabelle 4.4 sind diese Parameter, ebenso wie die resultierenden Werte für beide Algorithmen, dargestellt. Zu beachten ist in beiden Fällen die Polung der 14. Luftspule. Sie dient der Kompensation des Streufeldes, welches durch den Pinch-Magneten verursacht wird.

In Abbildung 4.15 sind die Feldlinien des $\Phi = 210$ Tcm² Flusschlauches für die Simplex-Routine zu sehen. Den Vergleich dazu bietet Bild 4.16, das mit Hilfe der MCMC bestimmt wurde. In beiden Fällen erfolgt keine Berührung der Elektroden bzw. der Tankwand, wenn

¹Spektrometer Detektor Sektion

Tabelle 4.4.: Startparameter und resultierende Ströme der Optimierung für den Simplex-Algorithmus (**links**), sowie die MCMC (**rechts**). Die Werte entsprechen der $B = 0,36$ mT Konfiguration. Zu beachten ist die Polung der 14. Luftspule.

Luftspule	I_{start} (A)	$I_{\text{opt.,Simplex}}$ (A)	$I_{\text{opt.,MCMC}}$ (A)
1	27	28.6	36.2
2	25	24.0	19.6
3	23	17.3	13.2
4	25	22.1	17.1
5	40	33.5	39.1
6	43	36.4	36.2
7	43	35.8	42.1
8	41	54.1	38.5
9	40	10.2	35.1
10	39	52.1	35.3
11	37	32.0	32.3
12	35	20.1	24.6
13	30	29.8	19.4
14a+b	-55	-51.8	-47.4

Tabelle 4.5.: Startparameter und resultierende Ströme der Optimierung für den Simplex-Algorithmus (**links**), sowie die MCMC (**rechts**). Die Werte entsprechen der $B = 0,48$ mT Konfiguration. Zu beachten ist die Polung der 14. Luftspule.

Luftspule	I_{start} (A)	$I_{\text{opt.,Simplex}}$ (A)	$I_{\text{opt.,MCMC}}$ (A)
1	34	60.1	33.9
2	32	15.4	35.2
3	30	24.3	39.7
4	32	41.8	24.8
5	47	47.4	60.6
6	50	77.4	53.3
7	50	29.7	49.1
8	48	52.1	44.9
9	47	58.0	54.0
10	46	48.6	50.8
11	44	54.8	43.1
12	42	23.8	39.5
13	41	46.0	52.2
14a+b	-55	-50.9	-60.8

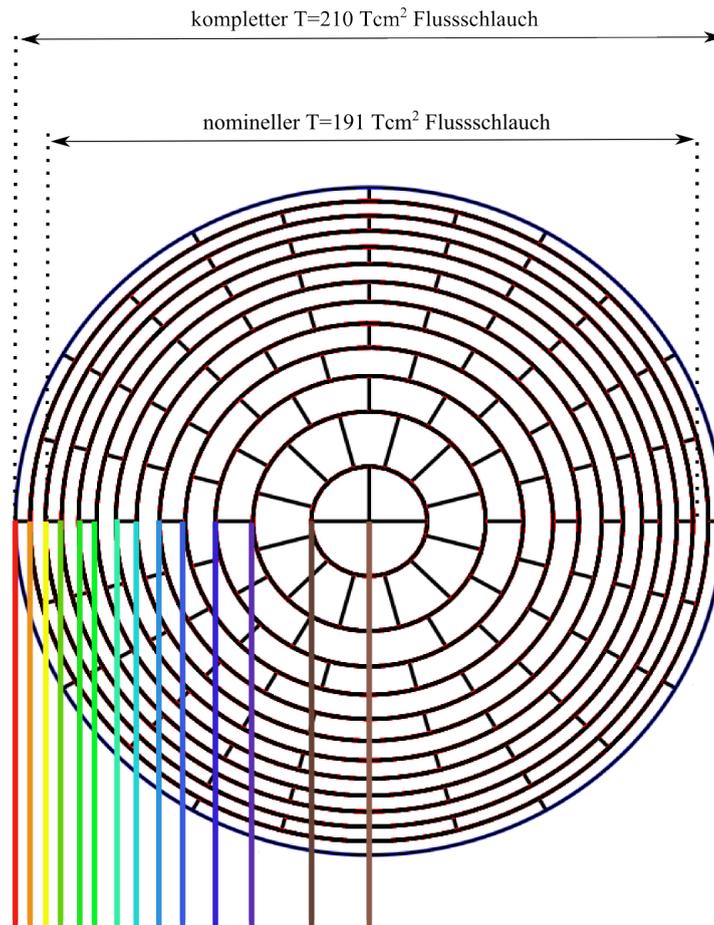


Abbildung 4.14.: Schematische Darstellung des FPD Wafers mit den vier "bulls eye" Pixeln in der Mitte und den 12 umgebenden Ringen. Der nominelle magnetische Flussrohr beträgt während der Tritiummessung $\Phi = 191 \text{ Tcm}^2$, was den inneren 10 Ringen entspricht. Die Optimierung für das SDS Commissioning zielt darauf ab, den maximal beobachtbaren Flussrohr (12 Ringe) mit $\Phi = 210 \text{ Tcm}^2$ ohne Berührung der Drahtelektroden abbilden zu können. Die farblichen Markierungen repräsentieren die Feldlinien und zeigen ihren Auftreffpunkt, in diesem Fall die Pixelgrenzen auf dem Detektor. Die Farbkodierung wurde entsprechend den restlichen Bildern dieses Kapitels gewählt. Aus [Ste07] (mod).

gleich der Abstand sehr gering ist. Es gilt jedoch zu beachten, dass der nominelle Fluss-schlauch bei KATRIN mit $\Phi = 191 \text{ Tcm}^2$ während der Tritiummessung auf jeden Fall deutlich weiter von den Begrenzungen des Spektrometers entfernt sein wird. Der hier gezeigte Fall spiegelt demnach eine obere Grenze wider. Die Symmetrie der Feldlinien im Bereich des Zentrums ($z = 0 \text{ m}$) zeigt die erfolgreiche Kompensation durch das LFCS. Im Folgenden beschreiben die oberen Bilder immer die Ergebnisse, die durch die Simplex-Routine erreicht wurden, während die unteren Bilder der MCMC-Routine entsprechen. Abbildungen 4.17 und 4.18 zeigen den Potentialverlauf entlang der berechneten Feldlinien. Eine Berührung der Drahtelektroden würde sich innerhalb dieser Darstellungen durch eine deutliche Verformung der Potentialkurven hin zu deutlich höheren Werten zeigen. Das Potential erreicht im Zentrum seinen maximalen Wert von -1000 V , wie es bei den Realisierungsbedingungen in Kapitel 4.2.2 beschrieben wurde. Die leichte detektorseitige Verformung bei $z = 5\text{-}6 \text{ m}$ wird durch den verringerten Abstand der Feldlinien von den Drahtelektroden, aufgrund der nicht vollständigen Streufeldkompensation der 14. Luftspule, verursacht, ist jedoch in dieser Größenordnung nicht relevant.

Das geforderte lokale Maximum des Magnetfeldes (siehe Kapitel 4.2.2) wird aus den Abbildungen 4.19 und 4.20 ersichtlich. Die vergrößerten Ausschnitte zeigen, dass dies speziell für die äußeren Feldlinien erreicht wird, da dort eine Erfüllung der Transmissionsbedingung aufgrund axialer Abhängigkeiten des Potentials am schwierigsten ist. Auch hier lässt sich im Bereich von $z = 5\text{-}6 \text{ m}$ eine Verformung der Kurven ausmachen. In diesem Fall kommt sie jedoch durch das Kompensationsfeld der 14. Luftspule zustande. Dieses schwächt zwar den Einfluss des Pinch-Magneten bezüglich des Spektrometerzentrums ab und kompensiert ihn im Idealfall komplett, sorgt aber direkt am Ort der Spule für eine nicht weiter störende Überkompensation des Feldes, wie sich hier zeigt.

Das genaue Zusammenspiel von elektrischem Potential und Magnetfeld sorgt für eine zielgerichtete Umwandlung von transversaler in longitudinale Energie $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$, wobei E_{\parallel} schlussendlich analysiert wird (Abschnitt 2.2.2). In den Darstellungen 4.21 und 4.22 ist E_{\parallel} in Abhängigkeit der z -Position für verschiedene Feldlinien gezeigt. Berechnet wurde E_{\parallel} für den maximalen Startwinkel $\theta_{PS2} = 66^{\circ}$ im zweiten Vorspektrometermagneten ($B_{PS2} = 4,3 \text{ T}$), der noch vom Pinch-Magneten ($B_{Pinch} = 5 \text{ T}$) akzeptiert wird. Die Erfüllung der Transmissionsbedingungen ist daran geknüpft, dass $E_{\parallel} > 0 \forall z \in [-15, +15]$ und nur null bzw. minimal im Zentrum des Spektrometers ist. Eine Verletzung dieser Bedingung würde sich durch negative Werte von E_{\parallel} bemerkbar machen, die im Falle großer Winkel am ehesten zu erwarten sind. Jedoch lässt selbst eine Vergrößerung der Bildausschnitte keine Abweichung vom Minimum im Zentrum erkennen.

Genauer wird dies in den Abbildungen 4.23 und 4.24 untersucht, indem die Position des Minimums von E_{\parallel} entlang jeder Feldlinie berechnet und der resultierende Punkt, der Analysierpunkt, in Abhängigkeit der z -Position dargestellt wird. Hier wurden drei unterschiedliche Startwinkel $\theta_{PS2} = 0^{\circ}, 33^{\circ}, 66^{\circ}$ verwendet. Die erwartete größere Abweichung vom Zentrum bei höheren Winkeln lässt sich nur bedingt feststellen, unabhängig vom verwendeten Minimierungsverfahren. Gleichwohl ist eine deutliche Verschiebung bei großen Radien aufgrund störender Einflüsse durch die dortige Nähe zu den Drahtelektroden zu beobachten. Nichtsdestotrotz liegt die Abweichung Δz vom Zentrum nur im Millimeterbereich ($-1,5 \text{ mm} < \Delta z < +0,5 \text{ mm}$ für das Simplex und $-2,0 \text{ mm} < \Delta z < +2,5 \text{ mm}$ für die MCMC) und entspricht somit den Anforderungen.

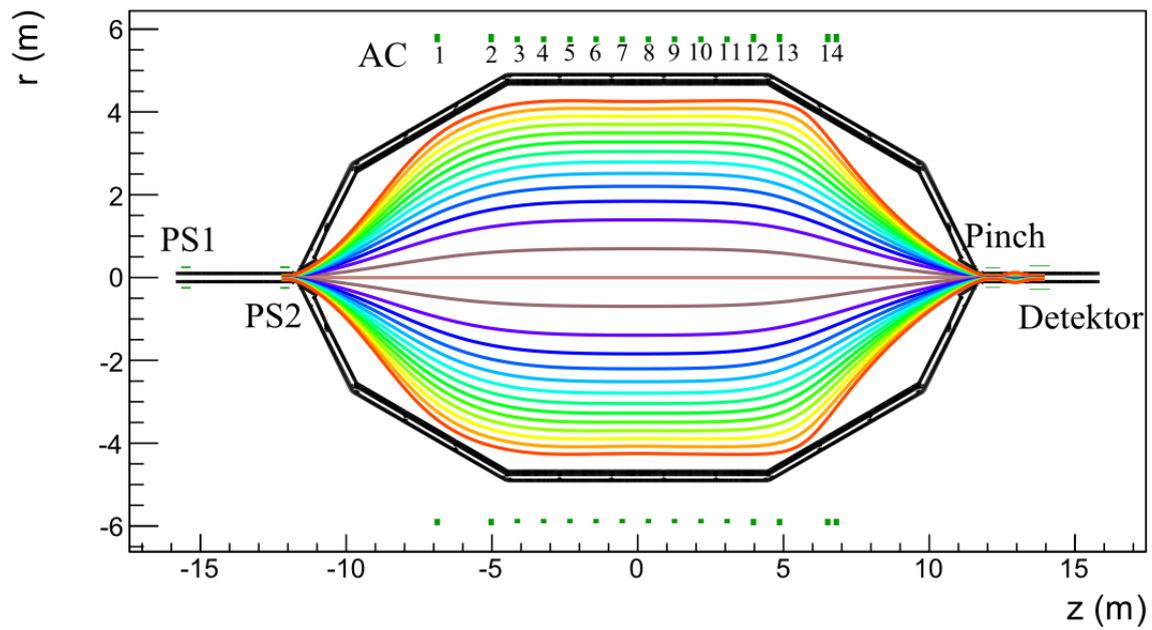


Abbildung 4.15.: Berechnete Feldlinien auf Basis der optimierten Spulenwerte, die mit Hilfe des Simplex-Algorithmus erstellt wurden. Das Magnetfeld in der Analysierebene beträgt $B = 0,36$ mT.

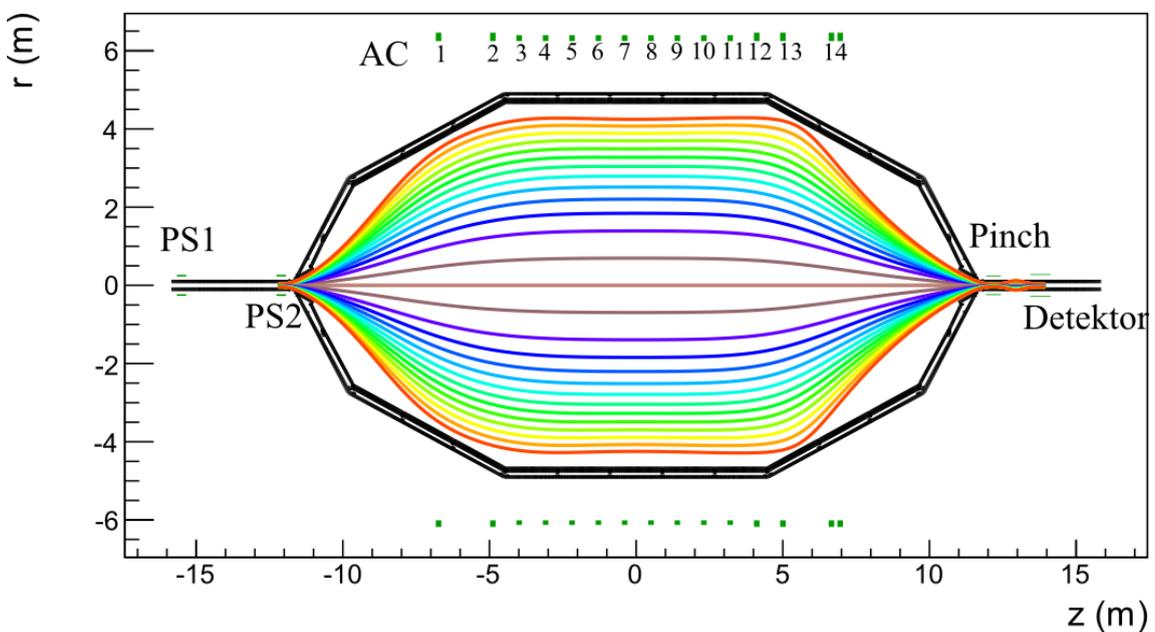


Abbildung 4.16.: Berechnete Feldlinien auf Basis der optimierten Spulenwerte, die mit Hilfe der MCMC erstellt wurden. Das Magnetfeld in der Analysierebene beträgt $B = 0,36$ mT.

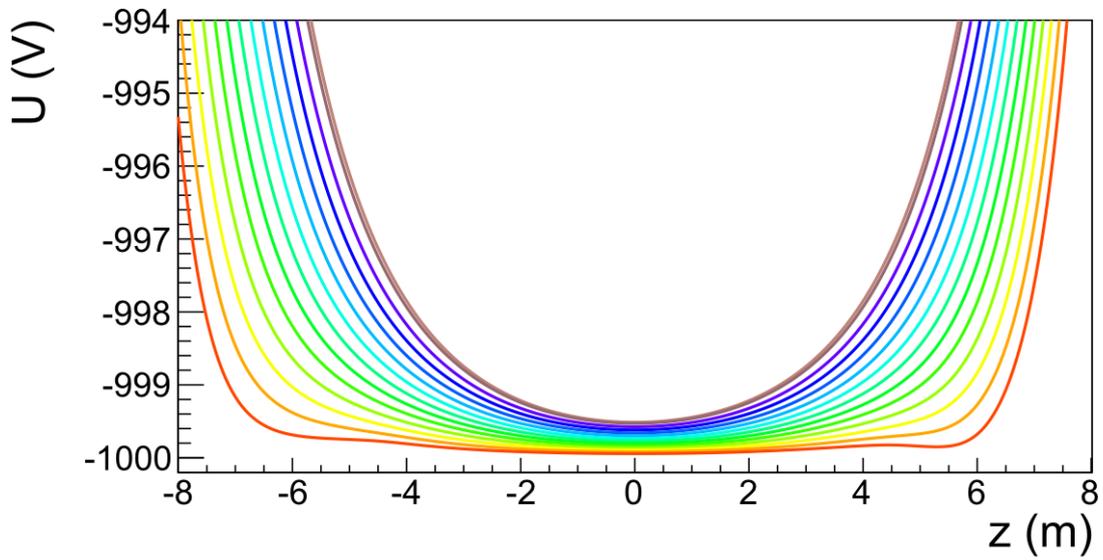


Abbildung 4.17.: Potentialverlauf entlang der Feldlinien für den Simplex-Algorithmus.

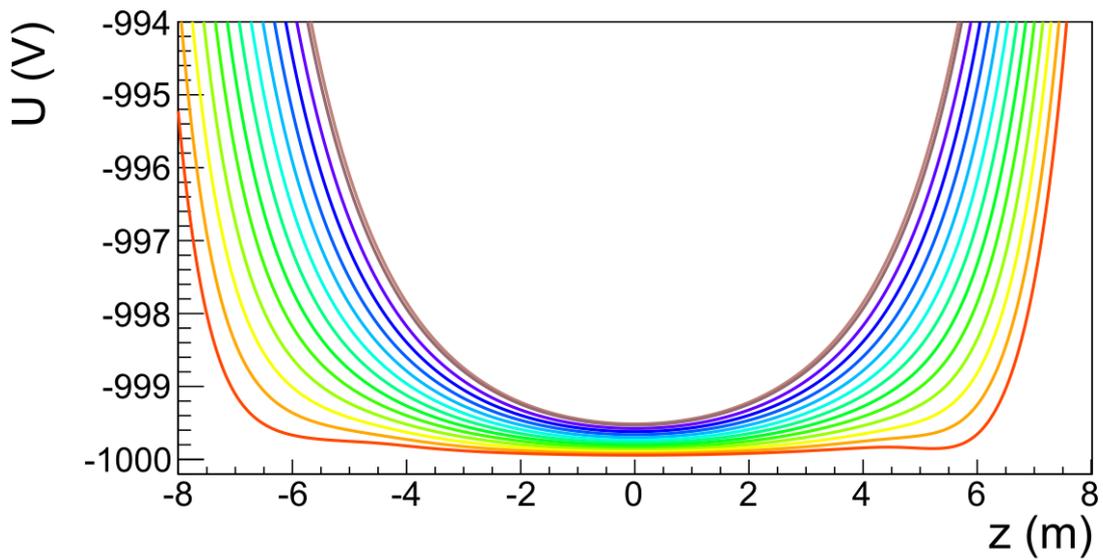


Abbildung 4.18.: Potentialverlauf entlang der Feldlinien für die MCMC.

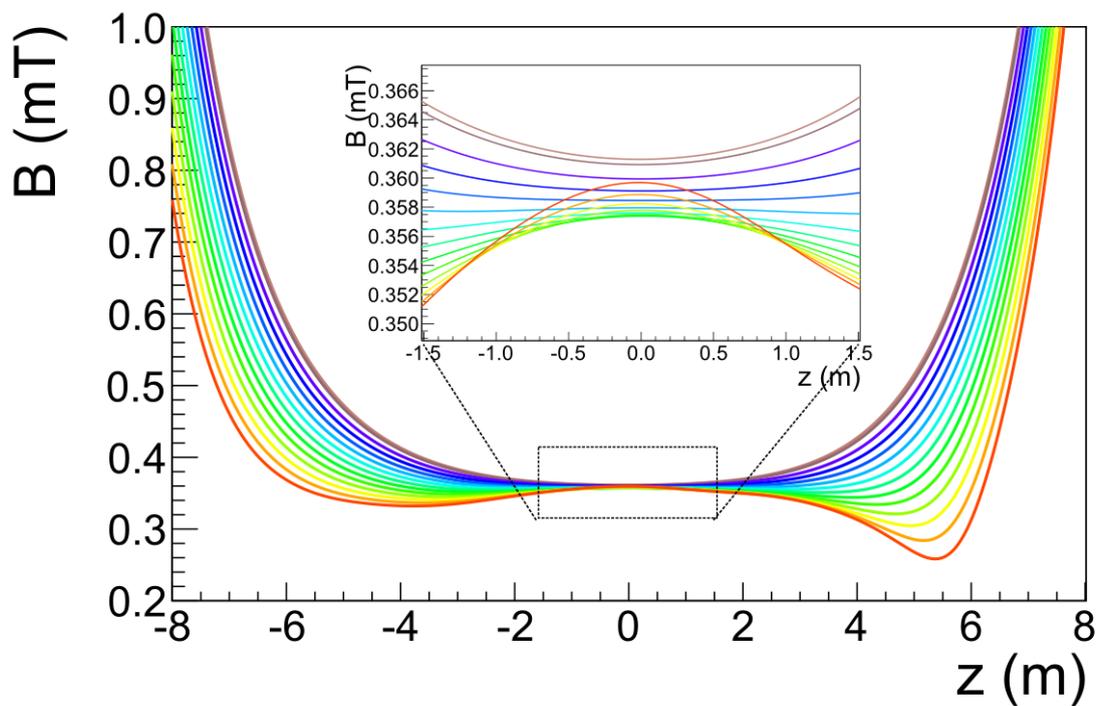


Abbildung 4.19.: Magnetfeldstärke entlang der Feldlinien für den Simplex-Algorithmus. Aus dem vergrößerten Bild lässt sich die Analysierfeldstärke von $B = 0,36$ mT entnehmen.

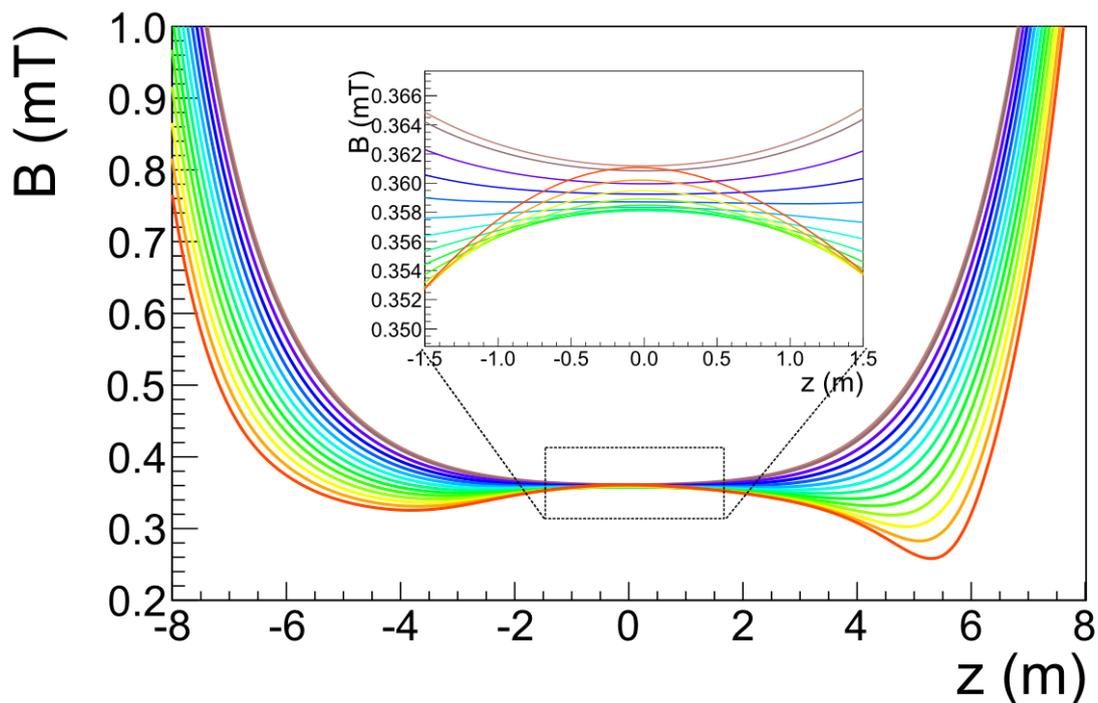


Abbildung 4.20.: Magnetfeldstärke entlang der Feldlinien für die MCMC. Auch hier entspricht die Analysierfeldstärke einem Wert von $B = 0,36$ mT.

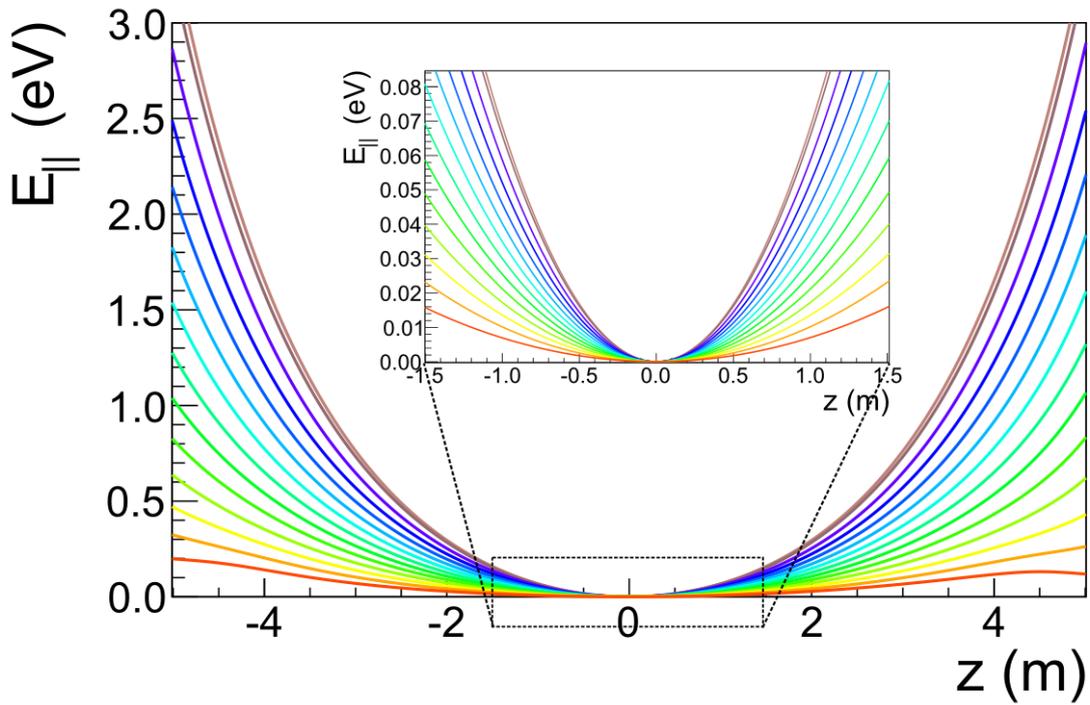


Abbildung 4.21.: Longitudinalenergie $E_{||}$ entlang der Feldlinien für den Simplex-Algorithmus. Ein Abfall in den negativen Bereich und damit eine Verletzung der Transmissionsbedingung ist nicht vorhanden.

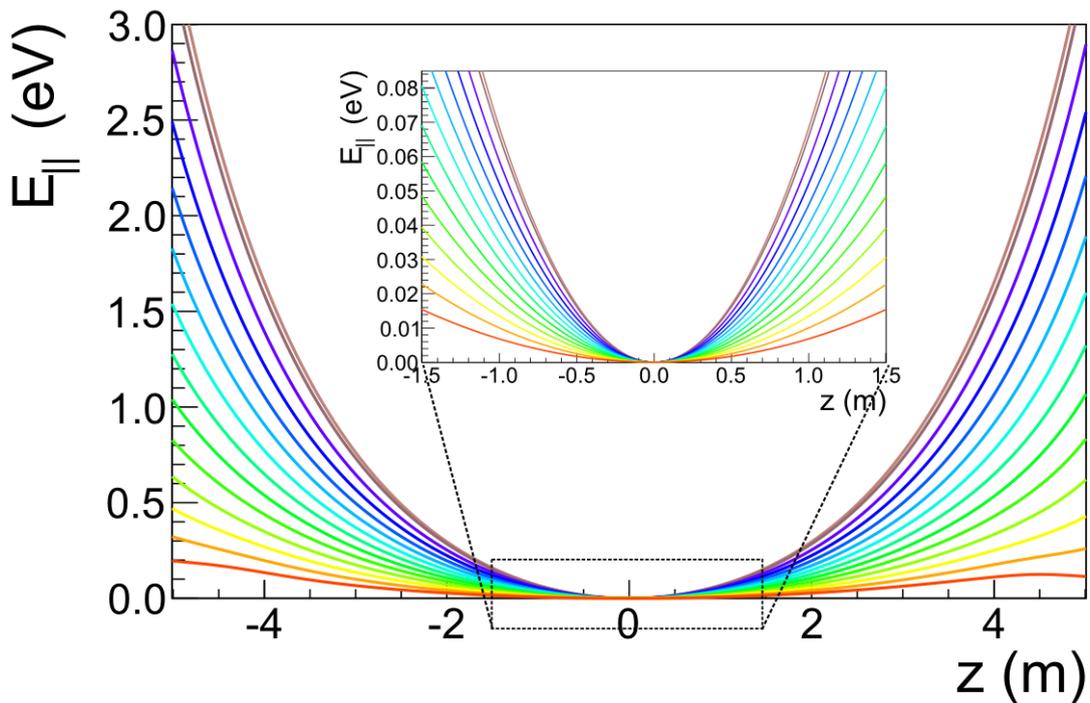


Abbildung 4.22.: Longitudinalenergie $E_{||}$ entlang der Feldlinien für die MCMC. Auch hier ist kein Abfall in den negativen Bereich erkennbar.

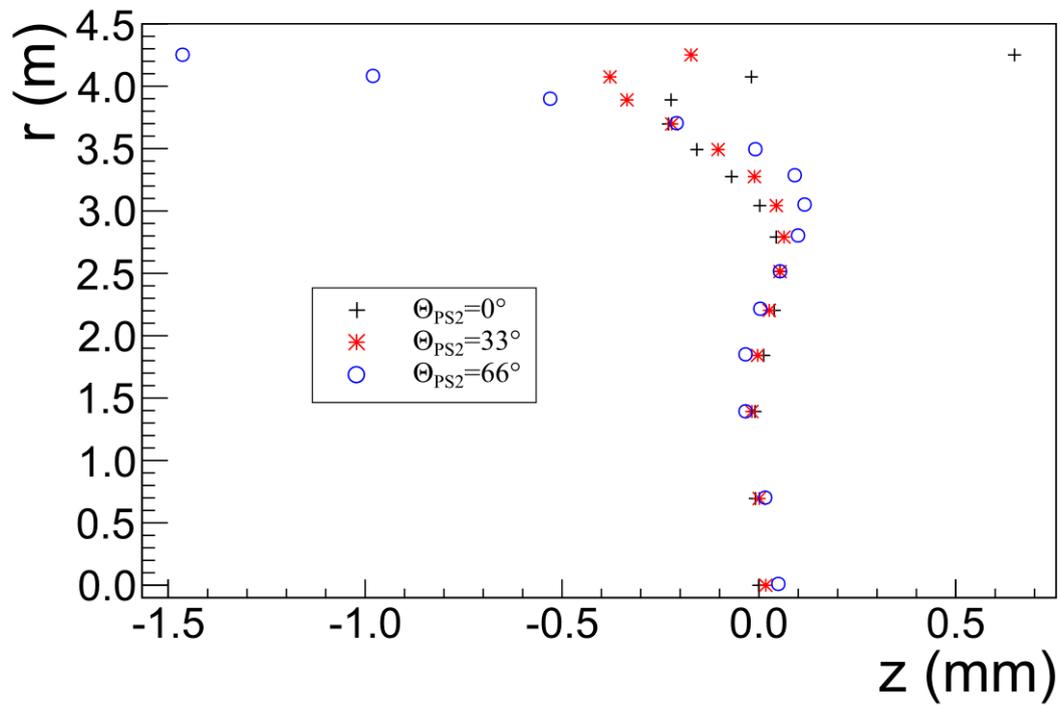


Abbildung 4.23.: Analysierpunkte für die einzelnen Feldlinien bei drei unterschiedliche Startwinkel θ_{PS2} unter Verwendung des Simplex-Algorithmus.

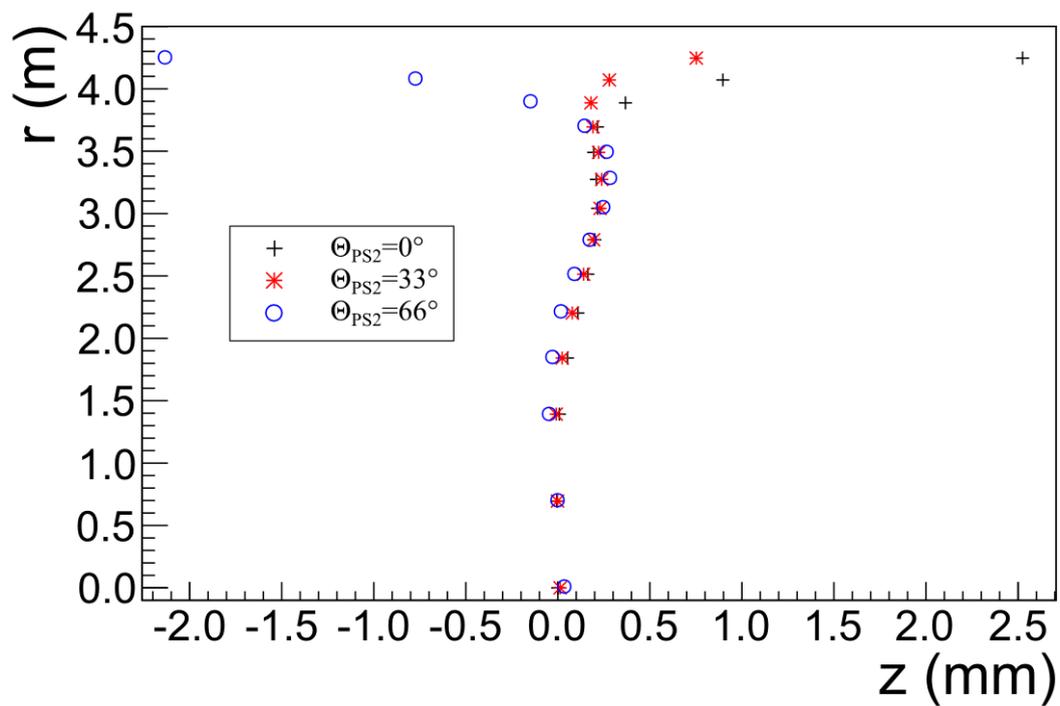


Abbildung 4.24.: Analysierpunkte für die Feldlinien und drei unterschiedliche Startwinkel θ_{PS2} bei Verwendung der MCMC.

4.4.2. $B = 0,48$ mT in der Analysierebene

Um Aussagen bspw. über die Abhängigkeit des Untergrundes vom Magnetfeld treffen zu können werden verschiedene Magnetfeldkonfigurationen mit unterschiedlichen Magnetfeldstärken benötigt. Der zweite Satz von Parametern ist dementsprechend für ein größeres Feld von $B = 0,48$ mT ausgelegt. Die Optimierung erfolgt auch hier für beide Routinen mit den selben Startwerten der Ströme. Sie sind, ebenso wie deren Ergebnisse, in Tabelle 4.5 einsehbar.

Erneut wird zuerst der resultierende Fluss Schlauch mit einer Größe von $\Phi = 210$ Tcm² betrachtet. Die entsprechenden Feldlinien sind in Abbildung 4.25 für den Simplex-Algorithmus und in Abbildung 4.26 für die MCMC-Methode dargestellt. Wie zuvor entsprechen die oberen Bilder dem Simplex, die unteren der MCMC. Im direkten Vergleich mit dem Fluss Schlauch des $B = 0,36$ mT Feldes fällt eine deutliche Komprimierung in radialer Richtung auf, die durch größere Spulenströme des LFCS und damit durch ein größeres Magnetfeld zustande kommt. Ein Unterschied zwischen beiden Routinen ist nicht erkennbar.

Die Abbildungen 4.27 und 4.28 zeigen den Verlauf des Potentials entlang der Feldlinien in Abhängigkeit der axialen Position. Während bei der $B = 0,36$ mT Konfiguration eine leichte Verformung im Bereich von $z = 5-6$ m aufgrund der Nähe zu den Drahtelektroden zu erkennen war, tritt diese für die $B = 0,48$ mT Einstellung nicht mehr auf. Dies lässt sich durch den vergrößerten Abstand zu den Elektroden erklären.

Das Magnetfeld ist auf ein lokales Maximum im Zentrum optimiert um im Zusammenspiel mit dem dort maximal negativen Potential die Transmissionsbedingung zu erfüllen. Die beiden Darstellungen 4.29 und 4.30 spiegeln dieses Verhalten des Magnetfeldes wider. Aus den vergrößerten Ausschnitten lässt sich die erzielte Feldstärke von $B = 0,48$ mT ablesen. Die resultierende Longitudinalenergie E_{\parallel} ist in Abbildung 4.31 und 4.32 ersichtlich. Wie schon bei der $B = 0,36$ mT Konfiguration ist eine Verletzung der Transmissionsbedingung, d.h. $E_{\parallel} < 0$ nicht vorhanden.

Einen genauen Aufschluss über die Position des jeweiligen Analysierpunktes geben die letzten beiden Abbildungen 4.33 und 4.34. Sie wurden für den maximal möglichen Winkel $\theta_{PS2} = 66^{\circ}$ erstellt und zeigen die Abweichung Δz der Position des Minimums von E_{\parallel} gegenüber dem Idealfall bei $z = 0$ m. Eine stärkere Abweichung ist erneut bei größeren Radien zu erkennen und beläuft sich für die Simplex-Routine auf $-0,05$ mm $< \Delta z < +0,4$ mm sowie für die MCMC auf $-0,2$ mm $< \Delta z < +0,2$ mm. Dabei lässt sich eine symmetrische Verteilung der Punkte um das Zentrum bei der MCMC beobachten, während es beim Simplex-Verfahren eine "Vorzugsrichtung" detektorseitig zu geben scheint. Die im vorherigen Abschnitt beschriebene erwartete stärkere Abweichung für größere Startwinkel θ_{PS2} ist auch nur tendenziell bei der MCMC zu sehen. Gleichwohl spricht man hier von Abweichungen im Submillimeterbereich, die für Messungen der Transmissionsfunktion keinen großen Einfluss haben. Durch die Erhöhung des Magnetfeldes konnte die Abweichung der Analysierpunkte Δz vom Idealfall insbesondere bei großen Radien deutlich reduziert werden.

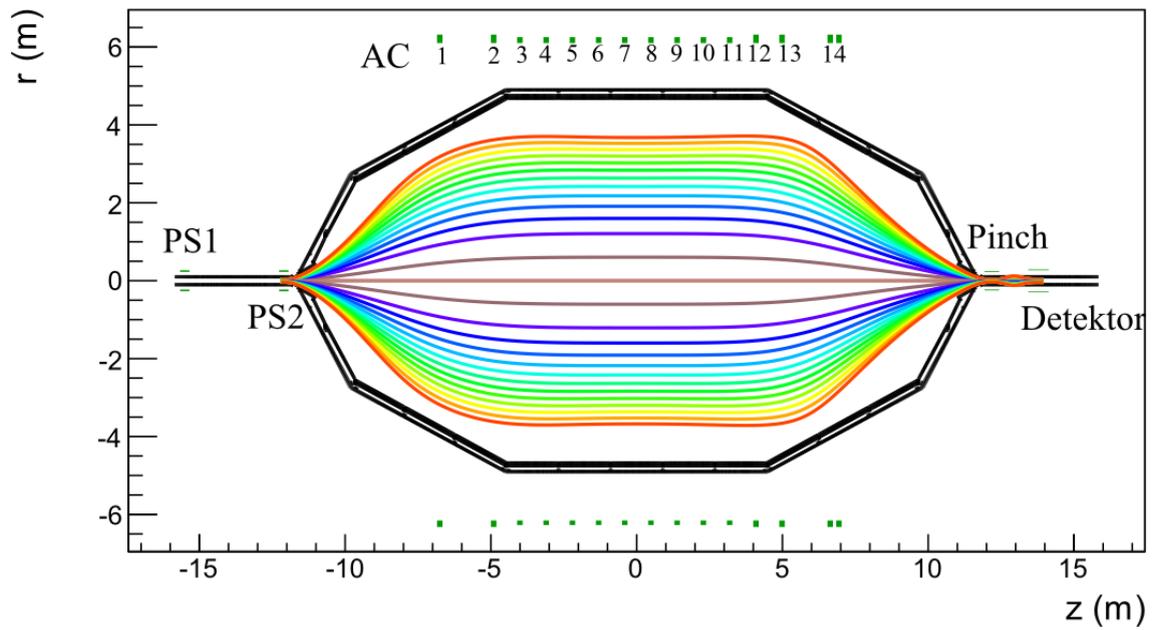


Abbildung 4.25.: Berechnete Feldlinien auf Basis der optimierten Spulnwert, die mit Hilfe des Simplex-Algorithmus erstellt wurden. Das Magnetfeld in der Analysierebene beträgt $B = 0,48$ mT.

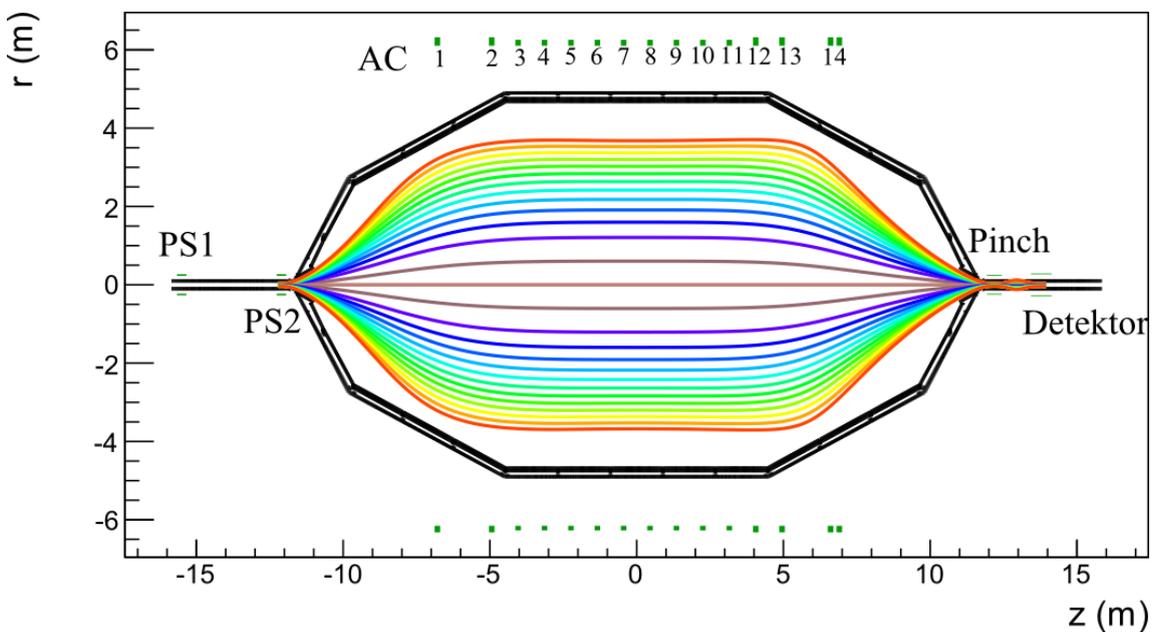


Abbildung 4.26.: Berechnete Feldlinien auf Basis der optimierten Spulnwert, die mit Hilfe der MCMC erstellt wurden. Das Magnetfeld in der Analysierebene beträgt $B = 0,48$ mT.

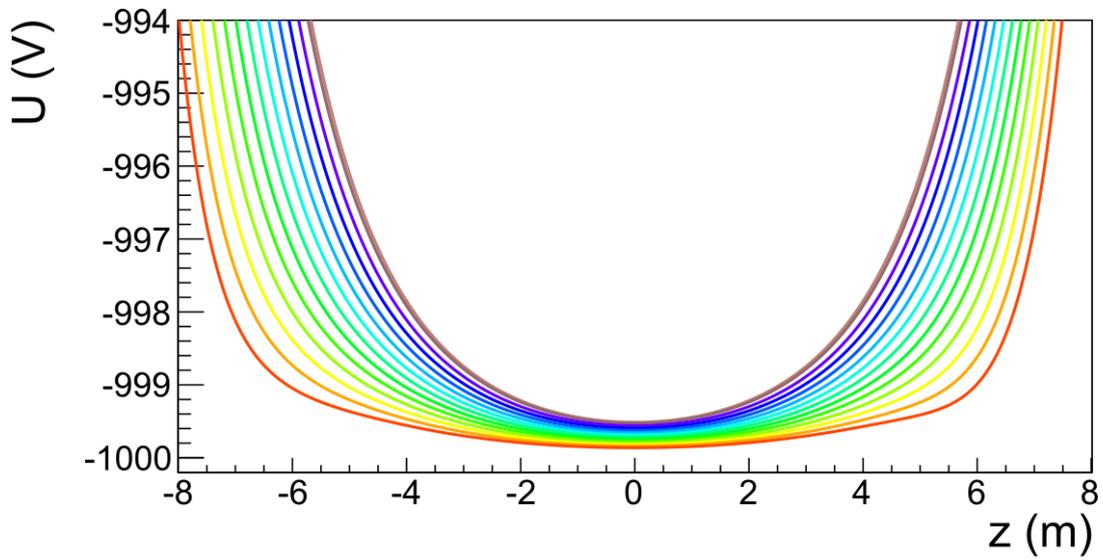


Abbildung 4.27.: Potentialverlauf entlang der Feldlinien für den Simplex-Algorithmus.

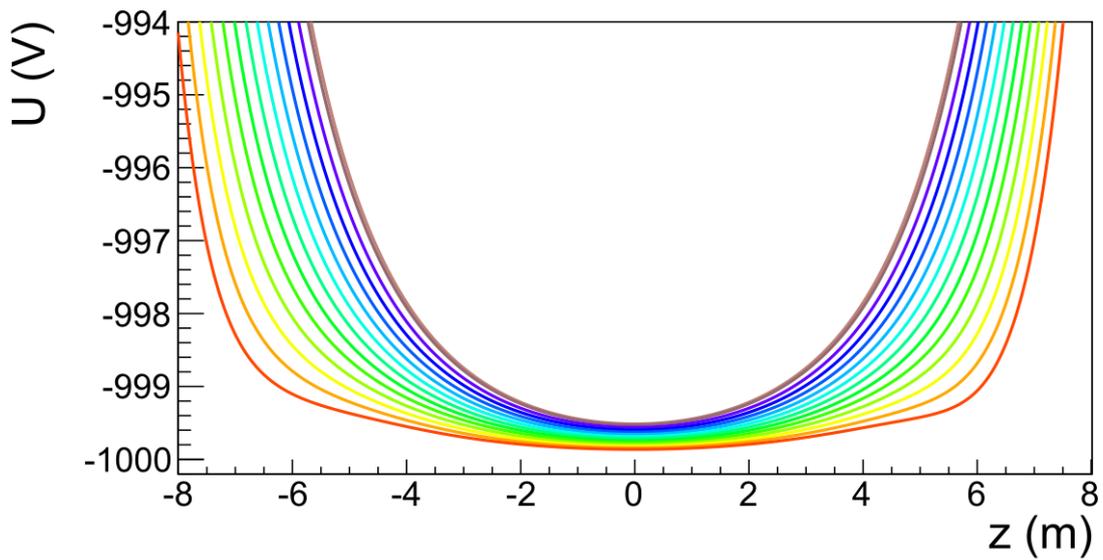


Abbildung 4.28.: Potentialverlauf entlang der Feldlinien für die MCMC.

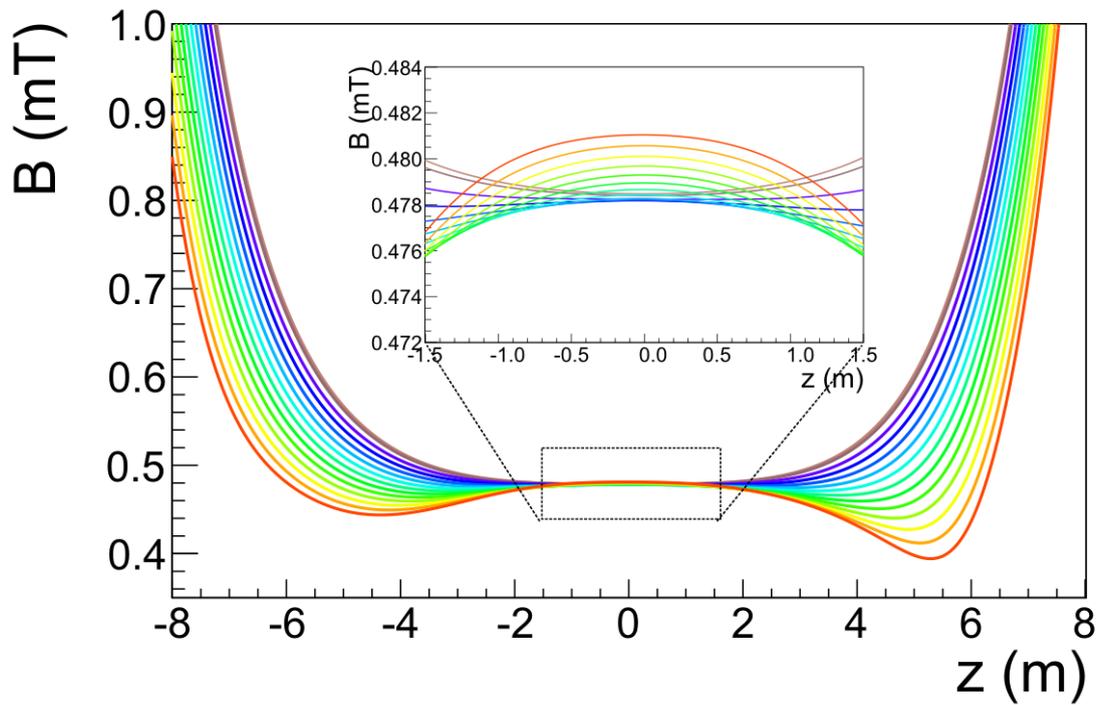


Abbildung 4.29.: Magnetfeldstärke entlang der Feldlinien für den Simplex-Algorithmus. Eine Feldstärke von $B = 0,48$ mT lässt sich im vergrößerten Bild erkennen.

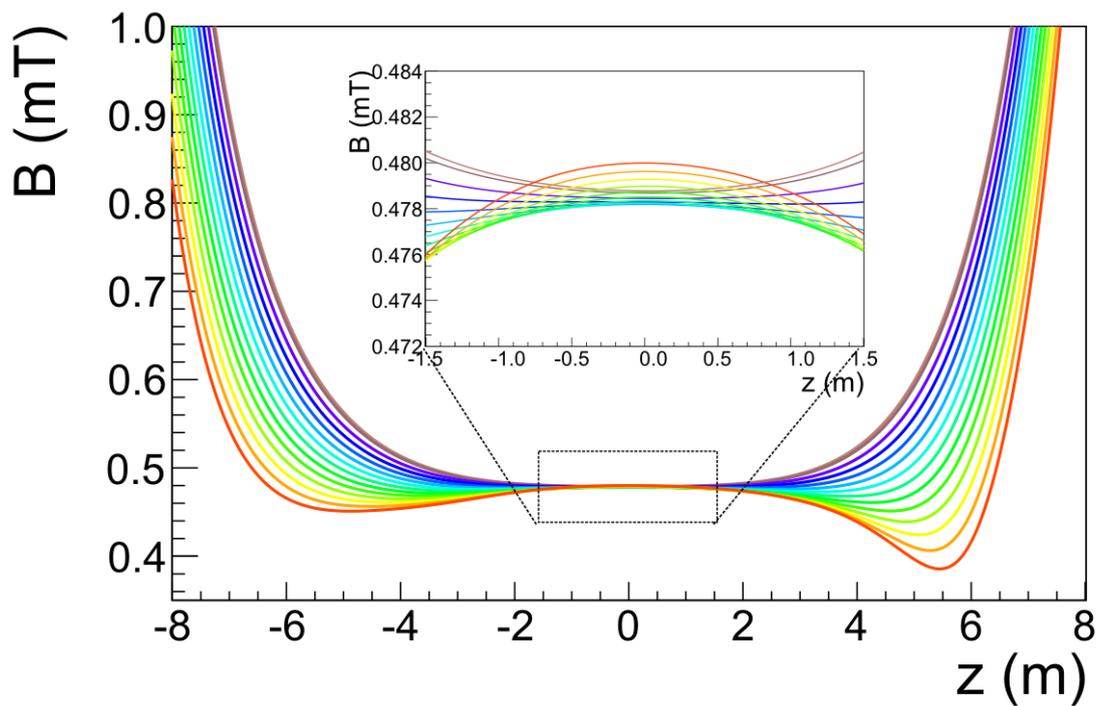


Abbildung 4.30.: Magnetfeldstärke entlang der Feldlinien für die MCMC. Auch hier lässt sich eine Feldstärke von $B = 0,48$ mT im vergrößerten Bild erkennen.

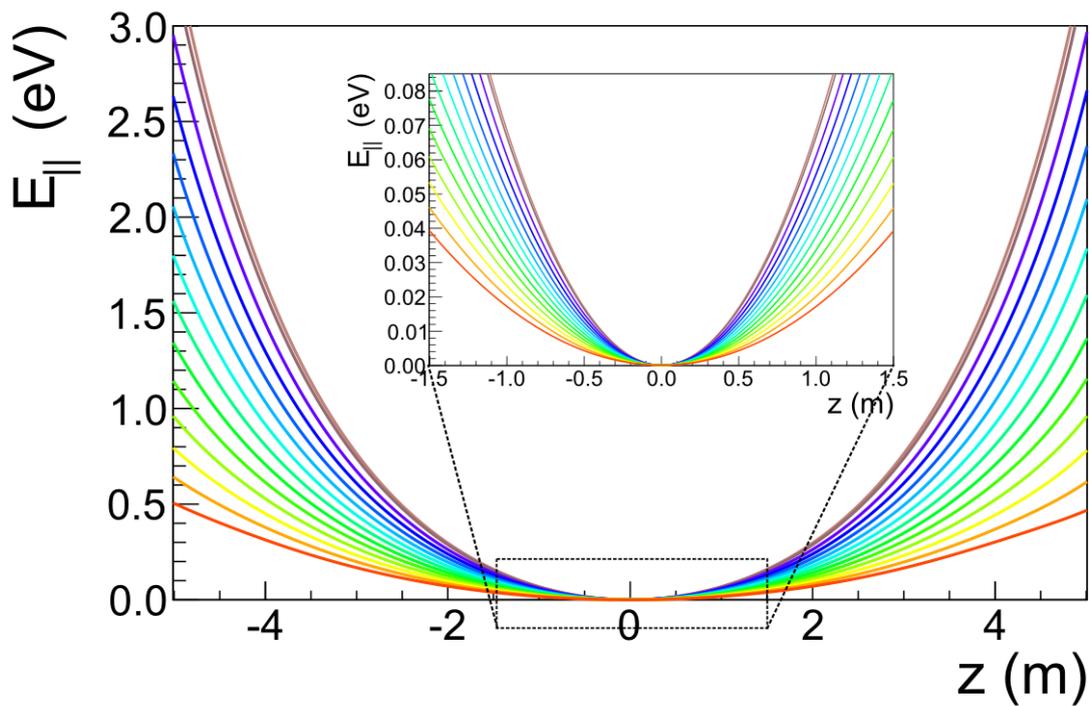


Abbildung 4.31.: Longitudinalenergie $E_{||}$ entlang der Feldlinien für den Simplex-Algorithmus. Ein Abfall in den negativen Bereich und damit eine Verletzung der Transmissionsbedingung ist nicht vorhanden.

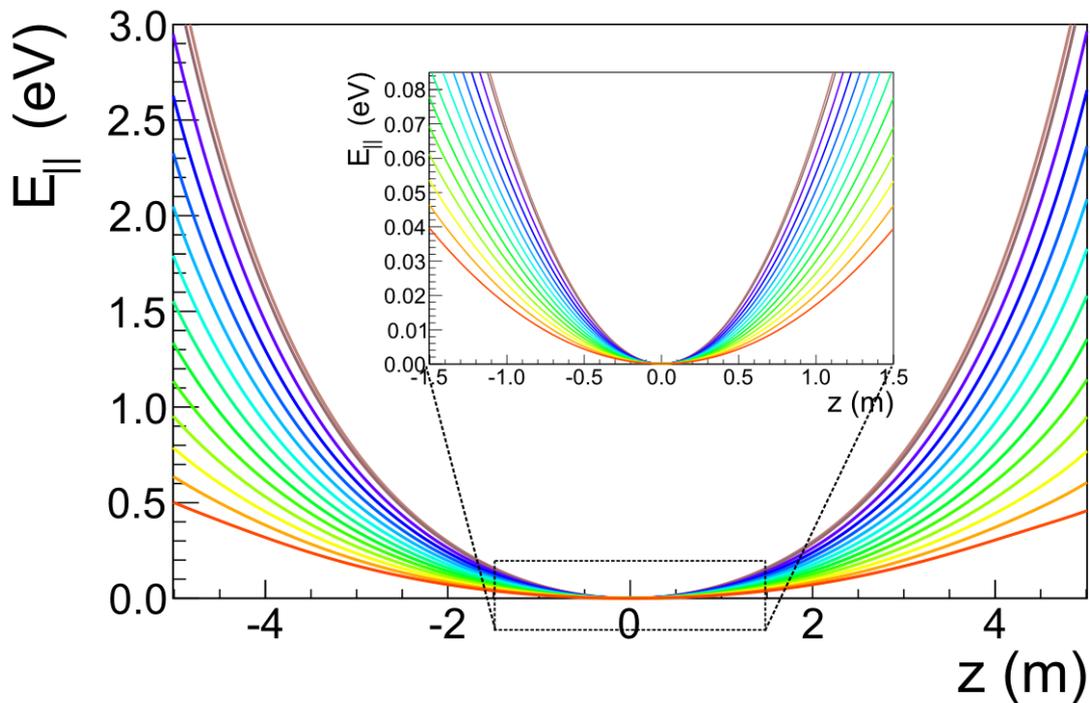


Abbildung 4.32.: Longitudinalenergie $E_{||}$ entlang der Feldlinien für die MCMC. Auch hier ist kein Abfall in den negativen Bereich erkennbar.

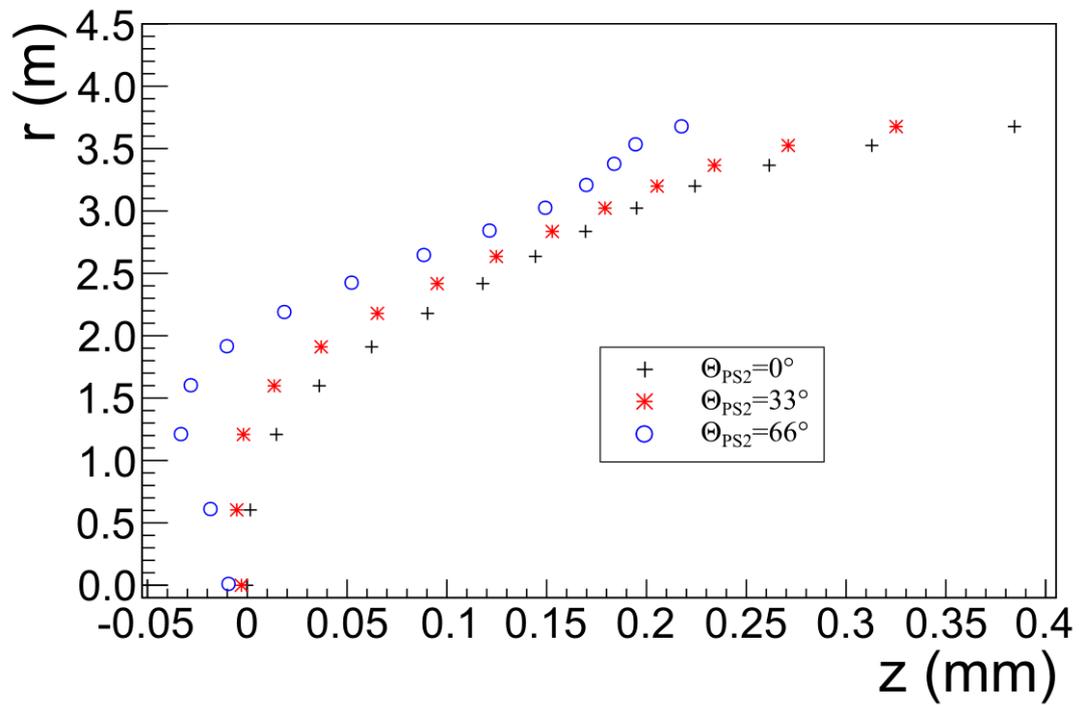


Abbildung 4.33.: Analysierpunkte der einzelnen Feldlinien für drei unterschiedliche Startwinkel θ_{PS2} bei Verwendung des Simplex-Algorithmus.

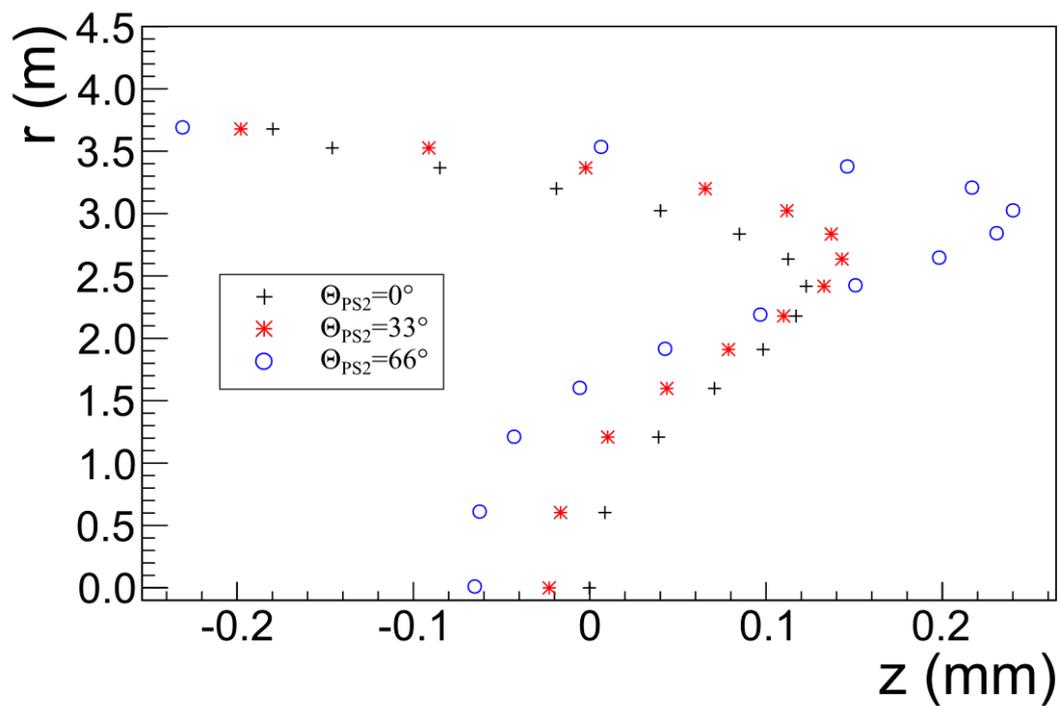


Abbildung 4.34.: Analysierpunkte der einzelnen Feldlinien für drei unterschiedliche Startwinkel θ_{PS2} bei Verwendung der MCMC.

4.5. Zusammenfassung der Optimierung

Im Verlauf dieses Kapitels wurde die Notwendigkeit einer optimierten elektromagnetischen Konfiguration des Hauptspektrometers im Hinblick auf die Bestimmung der Neutrinomasse gezeigt. Den Luftspulensystemen LFCS und EMCS kommt dabei eine entscheidende Rolle zu, da sie für die Feinformung des Magnetfeldes verantwortlich sind. Eine Erfüllung der Transmissionsbedingungen, sowie eine möglichst niedrige Untergrundrate, erfordern ein automatisiertes Verfahren zur Bestimmung der Spulenströme. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und verbesserten Programme zur Optimierung auf Basis definierter Parameter, sowie die Darstellung der resultierenden Felder ermöglichen es beliebige Feldkonfigurationen, die im Rahmen der Betriebsparameter der Luftspulen liegen, einfach und schnell zu erstellen. Es wurden zwei Methoden zur Optimierung vorgestellt und ihre Funktionalität sowie die erhaltenen Resultate diskutiert. Es hat sich gezeigt, dass die Ergebnisse nur geringfügig von der verwendeten Methode abhängen. Gleichwohl besitzen beide Verfahren ihre Vor- und Nachteile. So ist die Rechenzeit der Simplex-Routine kürzer, sie bleibt aber unter Umständen in lokalen Minima "hängen". Die MCMC wiederum benötigt mehr Zeit, ist jedoch in der Lage lokale Minima zu durchschreiten und dadurch die Problematik des Simplex zu umgehen. Neben den hier präsentierten Magnetfeldkonfigurationen wurden im Rahmen der Messphase weitere Konfigurationen mit Hilfe des in dieser Arbeit entwickelten Programms erstellt, deren Spezifikationen im Anhang in Tabelle A.2 und A.3 nachgelesen werden können.

5. Erste Transmissionsmessungen am KATRIN-Hauptspektrometer

Das SDS Commissioning stellt den ersten gemeinsamen Betrieb des Hauptspektrometers und der Detektorsektion dar und dient als Testlauf der Hardware-Komponenten, der Datenaufnahmesysteme sowie parallel dazu der Überprüfung der Simulationssoftware. Die optimierten Stromwerte des LFCS aus dem vorherigen Kapitel 4 wurden in Hinblick auf diesen ersten Messbetrieb erstellt und kommen dort zur Anwendung. Des Weiteren lässt sich die Inbetriebnahme in zwei Bereiche aufteilen. In den ersten Messungen wurde keine Hochspannung eingesetzt, so dass die übrigen Komponenten unabhängig getestet werden konnten. In der zweiten Phase mit Hochspannung werden die Einstellungen des Elektroden systems verwendet, die auch später im nominellen Tritiumbetrieb eingesetzt werden. Der Inhalt dieses Kapitels ist in der ersten Phase ohne Hochspannung angesiedelt, während die zweite Phase derzeit durchgeführt wird. Um die Funktionsweise des Spektrometers und Detektors ohne Tritium testen zu können ist eine dedizierte Elektronenquelle nötig. Zum Einsatz kommt eine winkelselektive Elektronenkanone, deren Aufbau und Funktionsweise in Abschnitt 5.1 erläutert werden. Im Anschluss daran wird zunächst die praktische Anwendbarkeit der optimierten LFCS Spulenströme im Hinblick auf die Transmission im Hauptspektrometer getestet (Abschnitt 5.2). In Abschnitt 5.3 wird der Einfluss unterschiedlicher EMCS-Spulenströme auf den magnetischen Fluss schlauch mit Hilfe von Messungen und Simulationen untersucht. Abschließend befasst sich Abschnitt 5.4 mit Messungen und Simulationen zum Verhalten des Detektors bei hohen Elektronenraten.

5.1. Die winkelselektive Elektronenkanone

Zur Bestimmung der Spektrometer- und insbesondere der Transmissionseigenschaften wird eine quasi-monoenergetische winkelselektive Elektronenkanone, im Folgenden kurz E-gun genannt, eingesetzt. Entwickelt und gebaut wurde sie an der Universität Münster, einem Kollaborationspartner des KATRIN-Experiments. Ziel der Quelle ist es, Elektronen mit wohldefinierter Energie und Winkelemission relativ zu den Magnetfeldlinien des Hauptspektrometers zu erzeugen [HBJ⁺13].

Das Prinzip der Elektronenerzeugung basiert auf dem photoelektrischen Effekt nach A. Einstein [Ein05], bei dem durch die Einstrahlung von Photonen einer bestimmten Wellenlänge Elektronen aus der Oberfläche einer Kathode herausgelöst werden.

Der Aufbau besteht aus zwei hintereinander liegenden Elektroden (Bild 5.1 (rechts)) auf negativer Hochspannung, die innerhalb eines rotierbaren geerdeten Gehäuses befestigt sind.

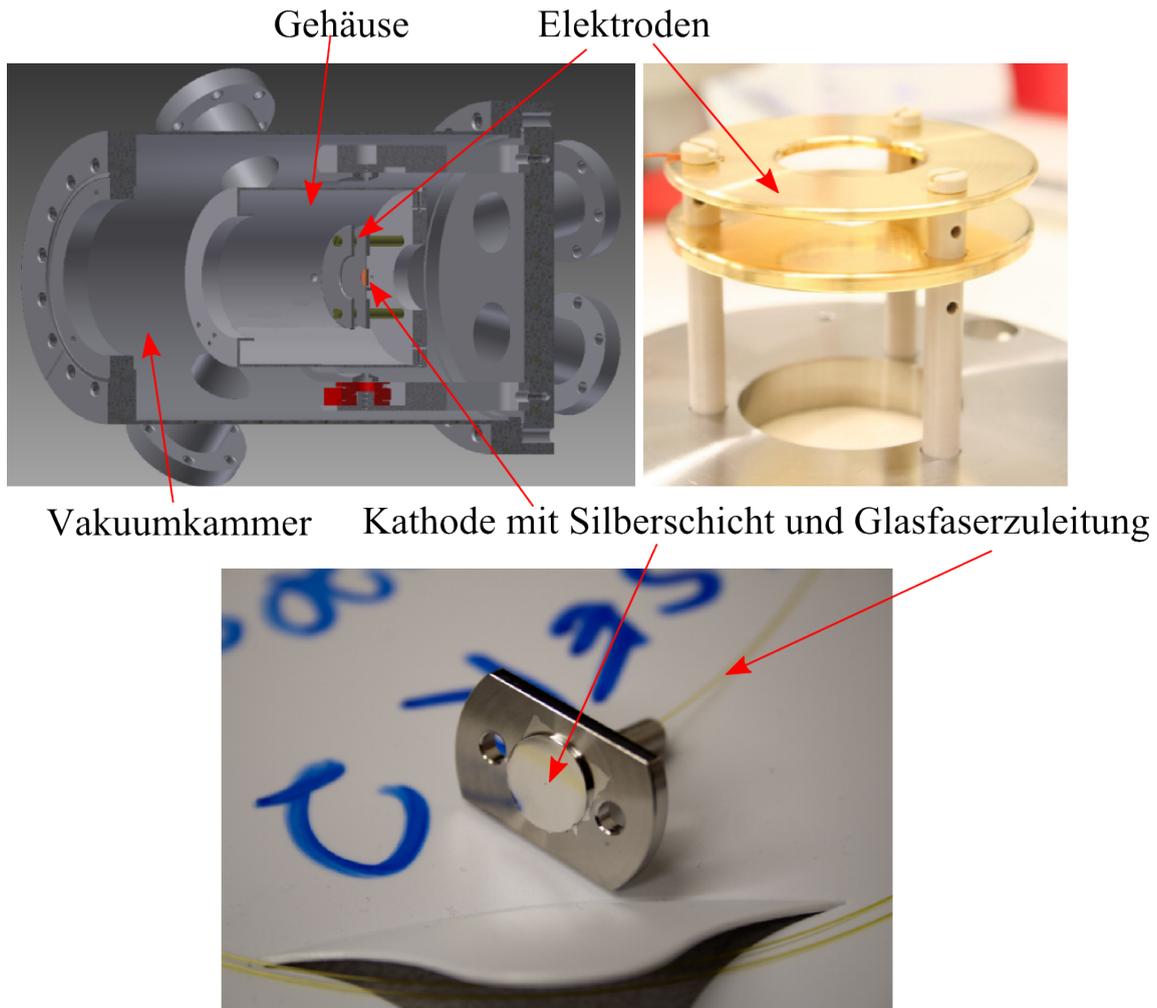


Abbildung 5.1.: CAD-Zeichnung des E-gun Aufbaus. Zu sehen sind die beiden Elektroden innerhalb des drehbaren E-gun-Gehäuses mit der in der Mitte angebrachten, mit Silber beschichteten, Kathode aus der die Elektronen herausgelöst werden. Umschlossen wird das gesamte System von einer Vakuumkammer, die das erforderliche Vakuum zum Anschluss an das Hauptspektrometer zur Verfügung stellt (**links**). Die beiden Elektroden wurden vergoldet, um die Erzeugung von Elektronen durch eventuelles Streulicht zu verhindern (**rechts**). Vergrößerte Aufnahme der Edelstahlkathode mit dem in der Mitte befindlichen Lichtleiter, an dessen Ende die Silberschicht aufgedampft wurde (**unten**). Aus [HBJ⁺13] (mod.) entnommen.

Abbildung 5.1 (links) zeigt den schematischen Aufbau anhand einer CAD-Zeichnung. Innerhalb der ersten Elektrode ist eine Edelmetallkathode angebracht, in deren Zentrum ein Lichtleiter (Glasfaserleitung) befestigt ist, siehe Bild 5.1 (unten). Die durch den Leiter transportierten Photonen treffen an dessen Ende auf eine etwa 40 nm dicke aufgedampfte Silberschicht, aus der sie Elektronen herauslösen. Die Beschleunigung der Elektronen geschieht in einem zweistufigen Prozess. Zunächst werden die Elektronen durch die Potentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden $U_{\text{Beschl.}} = U_K + \Delta U$ nicht-adiabatisch beschleunigt, wodurch ihr Winkel relativ zur Magnetfeldlinie eingestellt wird. Der verbleibende Potentialunterschied zwischen Gehäuse und zweiter Elektrode beschleunigt sie dann adiabatisch weiter auf die gewünschte kinetische Energie. Durch die Drehbarkeit der Elektroden ist es möglich den Winkel der erzeugten Elektronen relativ zu den Magnetfeldlinien zu verändern und so eine Winkelselektion vorzunehmen. Gleichzeitig erhält man aufgrund der endlichen Öffnung in der vorderen Elektrode eine Winkelverteilung statt eines festen Winkels.

Neben der Winkelverteilung weisen die Elektronen auch eine Energieverteilung auf. Zum einen sorgt Spannungsrauschen der Netzgeräte für eine Änderung der Beschleunigungsspannung. Zum anderen ist der Energieübertrag der Photonen auf die Elektronen nicht konstant, bedingt durch Variation der Austrittsarbeit aufgrund von Oberflächeneinflüssen der Silberschicht (Abnutzungserscheinungen durch Ioneneinschläge) einerseits und die natürliche Breite der Photonlinie andererseits. Insgesamt führen diese Effekte zu unterschiedlichen Überschussenergien bei ansonsten gleichen Bedingungen.

Bei der Auswahl der Lichtquelle kann zwischen einem UV-Laser sowie mehreren UV-LEDs gewählt werden. Die Daten und Betriebsmodi werden im Folgenden kurz dargestellt.

Laser

- Zweifach frequenzverdoppelter gepulster Nd:YVO₄ Festkörper-Laser mit $\lambda = 266$ nm
- Pulsfrequenz zwischen 20 kHz und 100 kHz bei einer Pulslänge von 20 ns einstellbar
- Intensität ist abhängig von angelegter Stromstärke und Pulsfrequenz. Maximum bei $\approx 6,5$ mW mit 8 A und 40 kHz.

LED

- UV-LEDs mit Wellenlängen von $\lambda = 265 - 315$ nm in 10 nm-Schritten, die mit Hilfe eines Monochromators weiter selektiert werden können.
- Je nach Betriebsmodus der Diode lässt sich die Pulslänge durch einen Pulsgenerator im Bereich von Nanosekunden bis Mikrosekunden verändern.

Je nach verwendeter Quelle und Beschaffenheit der Silberoberfläche können unterschiedliche Elektronraten produziert werden. So lässt sich beispielsweise durch Anpassung der Stromstärke oder Pulslänge die Ausbeute an Elektronen pro Puls verändern. Die Silberschicht erodiert im Lauf der Zeit aufgrund eines ständigen Beschusses mit Ionen, welche durch Streuung der E-gun Elektronen mit Restgasmolekülen erzeugt werden. Dadurch nimmt die Schichtdicke kontinuierlich ab und die Elektronenrate sinkt, bis schlussendlich ein Austausch vorgenommen werden muss, um die geforderte Statistik zu gewährleisten.

Die Vakuumkammer inklusive enthaltener E-gun ist auf einem UHV¹- Manipulator montiert, der es ermöglicht die Position der E-gun sowohl in horizontaler wie auch in vertikaler Richtung um bis zu $\pm 20^\circ$ zu verändern. Auf diese Weise lässt sich der gesamte magnetische Flusschlauch von KATRIN anfahren und es können Elektronen auch auf den äußeren Feldlinien gestartet werden.

¹Ultra-Hoch-Vakuum

5.2. Die Transmissionsfunktion

In diesem Abschnitt werden die optimierten Stromwerte des LFCS für die $B = 0,36$ mT und $B = 0,88$ mT Konfiguration auf ihre praktische Anwendbarkeit im Hinblick auf die Erfüllung der Transmissionsbedingung untersucht. Dazu wird mit Hilfe der E-gun jeweils eine Transmissionsfunktion für die beiden Spulenkonfigurationen gemessen. In Abbildung 5.2 sind die Ergebnisse für $B = 0,36$ mT in schwarz sowie $B = 0,88$ mT in blau dargestellt. Aufgrund des stärkeren Magnetfeldes im Zentrum für die $B = 8,8$ G Einstellung erwartet man aufgrund des geringeren Verhältnisses zwischen maximalem und minimalem Magnetfeld eine Verschiebung der Transmissionsfunktion zu höheren Energien (im Bild nach rechts). Die erwartete Verschiebung kann durch

$$\Delta E_{Ver.} = \frac{(B_{A1} - B_{A2})}{B_{start}} \cdot E \cdot \sin^2\theta \quad (5.1)$$

berechnet werden. Dabei bezeichnen B_{A1} und B_{A2} das Magnetfeld in der Analysierebene des Spektrometers für die beiden Konfigurationen. B_{start} steht für das Magnetfeld am Entstehungsort der Elektronen, E für deren Energie und θ für den Winkel. Aufgrund fehlender Hochspannung zu diesem Zeitpunkt der Messung besitzen die Elektronen nur eine geringe Energie von $E = 200$ eV, was eine sichtbare Verschiebung gegenüber dem Hochspannungsfall von $E = 18600$ eV erschwert. Des Weiteren wird ein fester Winkel ohne Winkelverteilung angenommen, da diese auch erst im Hochspannungsbetrieb bestimmt werden kann. Für einen Winkel von beispielsweise $\theta = 30^\circ$ erhalten wir schließlich als Verschiebung einen Wert von $\Delta E_{Ver.} = 6$ meV, der nicht aufgelöst werden kann.

Nichtsdestotrotz kann aus der Position der Transmissionsfunktion das Analysierpotential im Spektrometer bestimmt werden. Für eine Elektronenenergie von 200 eV ergibt sich aus der Messung ein Analysierpotential von etwa $-198,3$ V, was dem simulierten Potentialwert im Spektrometerzentrum entspricht. Somit konnte gezeigt werden, dass die optimierten Spulenströme tatsächlich die Transmissionsbedingung erfüllen.

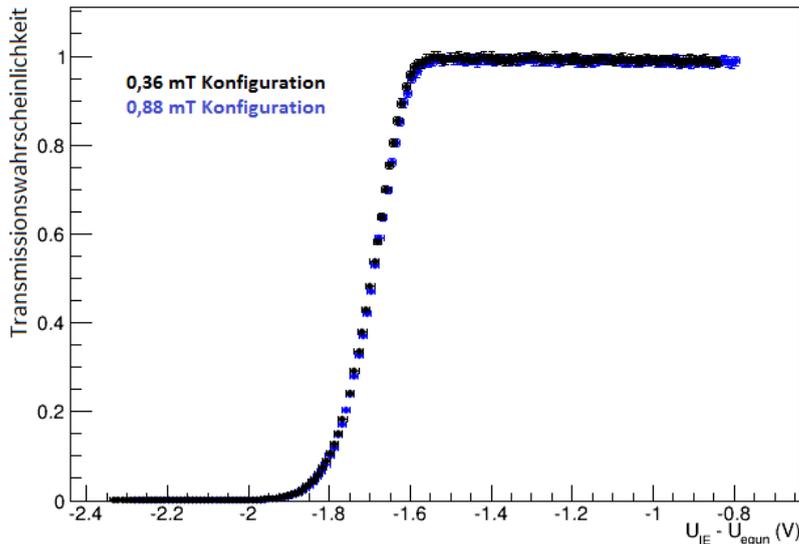


Abbildung 5.2.: Gemessene Transmissionsfunktionen für unterschiedliche Spulenkonfigurationen mit $B = 0,36$ mT und $B = 0,88$ mT.

5.3. Einfluss des EMCS auf den magnetischen Fluss Schlauch

In diesem Abschnitt wird die Verteilung der Elektronen auf dem Detektor unter dem Einfluss verschiedener Ströme für das EMCS untersucht. Wie in Abschnitt 4.1 des vorangegangenen Kapitels gezeigt, ist die Erfüllung der Transmissionsbedingungen entscheidend von den Einstellungen der Spulenströme des LFCS/EMCS abhängig. Mit den Optimierungsroutinen aus 4.3 ist es möglich, das LFCS dahingehend anzupassen. Die Parameter des EMCS müssen so gewählt werden, dass die am Ort des Spektrometers herrschenden Erdmagnetfeldkomponenten kompensiert werden, siehe Abschnitt 4.1.2. Bei Abweichungen von diesen optimalen Parametern wird eine Verschiebung des gesamten Fluss schlauches in horizontaler bzw. vertikaler Richtung erwartet, wie in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt.

5.3.1. Messungen

Der Messablauf gliedert sich in sechs Messreihen mit jeweils verschiedenen Einstellungen für die horizontale und vertikale EMCS-Komponente. Die restlichen Parameter bleiben unangetastet und entsprechen den folgenden Einstellungen.

- Gesamtes Elektrodensystem (innere + äußere Drahtlage) sowie Spektrometertank entsprechend Tabelle 4.3 auf Nullpotential. Elektronen werden folglich nur vom Magnetfeld beeinflusst. Nachbeschleunigungselektrode im Detektor liegt auf $U = +10$ kV.
- LFCS Einstellungen entsprechen den $B = 0,48$ mT-Werten des Simplex aus Tabelle 4.5. Ströme der supraleitenden Solenoide sind in Tabelle 4.2 ersichtlich.
- E-gun wird mit der Laserdiode bei 7 A und einer Pulsfrequenz von 100 kHz betrieben. Zur Ratenjustage wird ein 0.1% Transmissionsfilter und ein 30° Polarisationsfilter verwendet.
Dies führt zu einer mittleren Elektronrate von $N = 2$ kHz. Die Energie der Elektronen beträgt $E = 85$ eV und wird durch eine Batterie zur Verfügung gestellt.

Um die Verschiebung des Fluss schlauches feststellen zu können, wird mit Hilfe des E-gun Manipulators zunächst eine senkrechte Linie von $+20^\circ$ bis -20° abgefahren, bevor im Anschluss eine waagerechte Linie ebenfalls von $+20^\circ$ bis -20° abgedeckt wird. Der resultierende Schnittpunkt dient als Referenzpunkt, der den durch das EMCS verursachten Versatz charakterisiert. Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die durchgeführten Messungen und die entsprechenden Resultate, die im Folgenden näher erläutert werden.

Tabelle 5.1.: Zusammenfassung der EMCS-Einstellungen der sechs Messreihen, den entsprechenden Messergebnissen der Schnittpunktberechnung und zugehörigen Abbildungen.

Messphase	EMCS-horz./vert. (A)	Δx (mm)	Δy (mm)	Abbildung
1	9/50	-3,28	-3,34	5.3
2	9/25	-3,24	5,39	5.4
3	9/0	-3,17	13,63	5.5
4	9/70	-3,34	-9,93	5.6
5	50/50	5,40	-3,41	5.7
6	100/50	15,16	-3,44	5.8

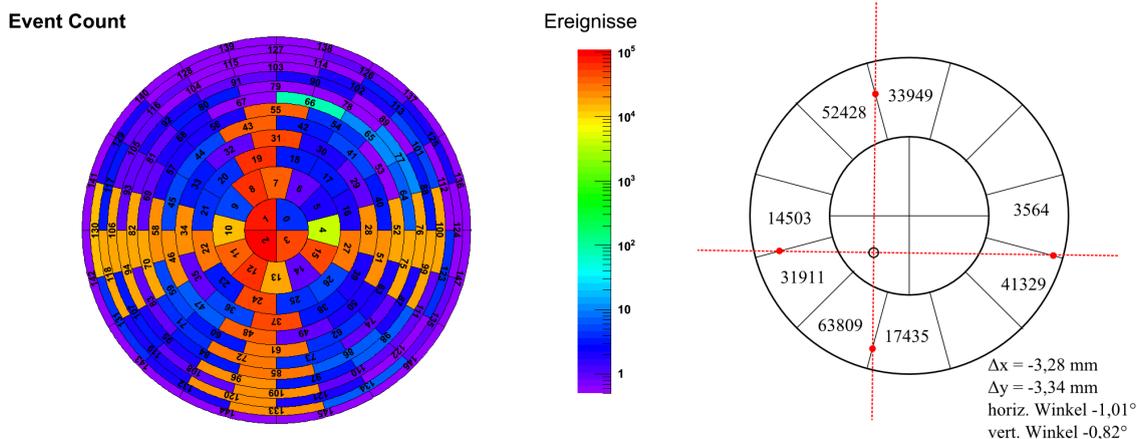


Abbildung 5.3.: Ratenverteilung auf dem Detektor nach einem Kreuzscan der E-gun bei nomineller Erdmagnetfeldkompensation (EMCS-horz.: 9 A; EMCS-vert.: 50 A). Die Abschattung des oberen Bereichs des Detektors kommt durch ein nicht ganz geschlossenes Ventil zustande (**links**). Über das Verhältnis der Raten in benachbarten Pixeln lässt sich der Schnittpunkt von Pixelgrenze und Egun-Scan bestimmen. Führt man dies an vier Stellen durch, so erhält man zwei Geraden, deren Schnittpunkt das Zentrum des Kreuzes repräsentiert (**rechts**). Exemplarisch wurden hier das "bull's-eye" sowie der erste Ring mit den für die Berechnung nötigen Raten dargestellt. Die angegebenen Δx und Δy Werte entsprechen dem Versatz des Kreuzmittelpunktes vom Detektorzentrum. Die Winkel entsprechen den Verkippungen der horizontalen bzw. vertikalen Scanlinien relativ zur x- bzw. y-Achse des Detektor-Koordinatensystems.

Erste Messreihe

EMCS-horizontale: 9 A

EMCS-vertikal: 50 A

Diese Einstellungen entsprechen der nominellen Erdmagnetfeldkompensation. Das resultierende Detektorbild 5.3 (**links**) zeigt den Schnittpunkt der beiden Geraden in Pixel 2. Um den EMCS-Einfluss abschätzen zu können, ist jedoch eine höhere Auflösung als dies die Pixel hergeben erforderlich. Dazu wird das Verhältnis der Zählraten in benachbarten Pixeln, durch welche die E-gun gefahren ist, verwendet. Mit diesem Verhältnis lässt sich der Schnittpunkt von Pixelgrenze und tatsächlicher Elektronspur berechnen. Führt man diesen Vorgang an zwei Punkten entlang der senkrechten und zwei Punkten entlang der waagerechten Linie durch, so erhält man zwei Geraden, aus deren Schnittpunkt sich der Mittelpunkt des Kreuz-Scans ergibt. In Abbildung 5.3 (**rechts**) ist das Ergebnis dieser Methode zu sehen. Eine genaue Berechnung sowie die detaillierte Darstellung der Vorgehensweise lassen sich in Anhang B finden. Es ergibt sich eine Abweichung in x-Richtung von $\Delta x = -3,28$ mm und in y-Richtung von $\Delta y = -3,34$ mm. Da in dieser Messreihe die vermeintlich optimale EMCS-Konfiguration benutzt wurde, lässt sich hieraus ableiten, dass es einen signifikanten Versatz der Ausrichtung zwischen E-gun, Spektrometer und Detektor gibt.

In den folgenden Messreihen wird die Berechnung des Kreuzmittelpunktes auf die gleiche Art und Weise durchgeführt.

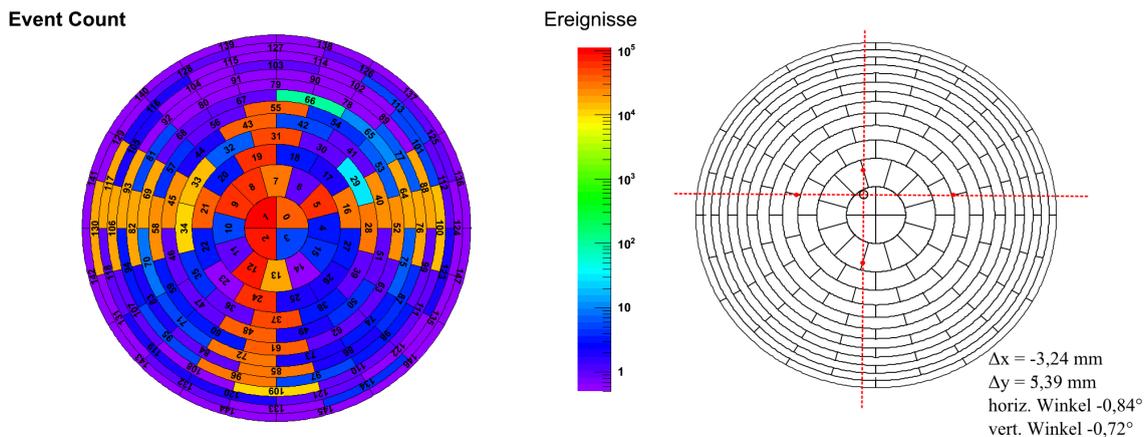


Abbildung 5.4.: Ratenverteilung auf dem Detektor nach einem Kreuzscan der E-gun mit verringerter Kompensation in vertikaler Richtung (EMCS-horz.: 9 A; EMCS-vert.: 25 A) (**links**). Übersichtsdarstellung der resultierenden Schnittpunkte sowie des Kreuzmittelpunktes (**rechts**). Die zur Bestimmung der angegebenen Werte verwendeten Raten und Pixel können in Tabelle B.4 in Anhang B nachgelesen werden. Der obere Teil des Detektors wird durch ein Ventil abgeschattet, wodurch das Fehlen von Detektorereignissen in diesem Bereich erklärt werden kann.

Zweite Messreihe

EMCS-horizontale: 9 A

EMCS-vertikal: 25 A

In der zweiten Messung wurde die Stromstärke der vertikalen EMCS-Komponente auf 25 A halbiert, siehe Abbildung 5.4. Das Erdmagnetfeld kann nun nicht mehr komplett kompensiert werden und man erwartet eine Verformung des Fluss Schlauchs in vertikaler Richtung (positive y-Richtung), während sich die horizontale Komponente nicht verändern sollte. Der Schnittpunkt des Kreuzscans ergibt sich zu $\Delta x = 5,40$ mm und $\Delta y = -3,41$ mm. In guter Übereinstimmung mit der Erwartung bleibt die horizontale Abweichung konstant, während die vertikale Position des Kreuzmittelpunkts um etwa 8 mm verschoben wird.

Dritte Messreihe

EMCS-horizontale: 9 A

EMCS-vertikal: 0 A

In der dritten Phase sollte sich der Trend in positiver y-Richtung fortsetzen, da nun der Kompensationsstrom der vertikalen EMCS-Komponente auf 0 A gesetzt wird. Die horizontale Komponente bleibt erneut unangetastet. Das Ergebnis des Schnittpunkts lautet $\Delta x = 13,63$ mm sowie $\Delta y = -3,17$ mm. Erneut lässt sich ein Versatz in positiver y-Richtung um etwa 8 mm feststellen, siehe dazu Bild 5.5, was aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Stromstärke und resultierendem Magnetfeld zu erwarten war.

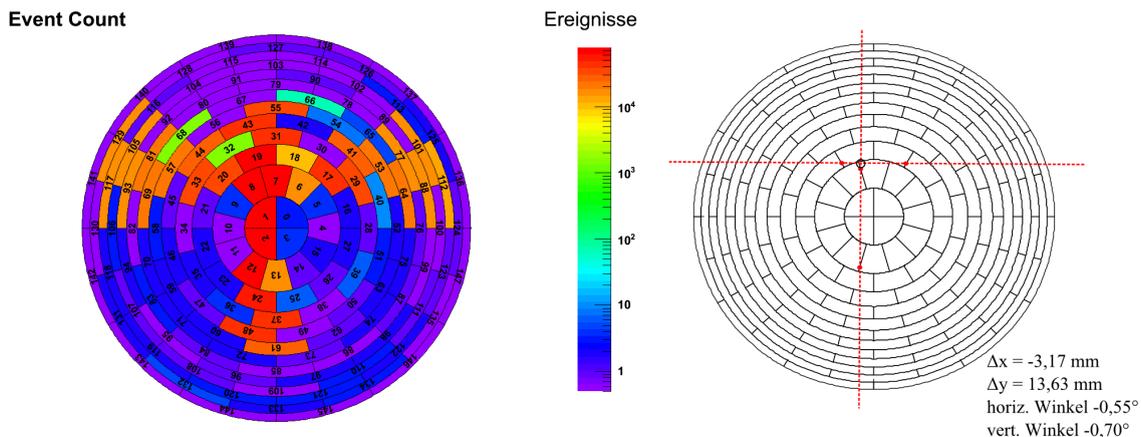


Abbildung 5.5.: Ratenverteilung auf dem Detektor nach einem Kreuzscan der E-gun mit ausgeschalteter Kompensation in vertikaler Richtung (EMCS-horz.: 9 A; EMCS-vert.: 0 A) (**links**). Auch hier gibt die Übersichtsdarstellung die Schnittpunkte und den Kreuzungspunkt an (**rechts**). Die zugehörigen Werte können in Tabelle B.4 nachgelesen werden.

Vierte Messreihe

EMCS-horizontale: 9 A

EMCS-vertikal: 70 A

Stellt man die Stromstärke des vertikalen EMCS auf 70 A, so wird das Erdmagnetfeld überkompensiert und es müsste statt der bisher beobachteten Abweichung in positiver y -Richtung, eine Abweichung in negativer y -Richtung zu sehen sein. Aufgrund des geringeren Unterschieds zwischen 50 A und 70 A sollte der Versatz dem Verhältnis entsprechend abnehmen, siehe Abbildung 5.6. Die Ergebnisse liefern eine Abweichung von $\Delta x = -3,34$ mm und $\Delta y = -9,93$ mm was einer Verschiebung von etwa ≈ 6 mm im Vergleich zum nominellen Setting entspricht. Es muss angemerkt werden, dass die berechnete Verkippung der waagerechten Scanlinie positiv ist. Dies deckt sich auf den ersten Blick nicht mit den in Pixel 11 und 15 gemessenen Raten, wonach sich eine negative Steigung ergeben sollte. Der Grund hierfür liegt darin begründet, dass bei der Bestimmung der Schnittpunkte für die waagerechte Gerade das Verhältnis der Raten mehrerer Pixel verwendet werden musste, was eine andere Berechnungsmethode erfordert (siehe Anhang).

Fünfte Messreihe

EMCS-horizontale: 50 A

EMCS-vertikal: 50 A

Ausgehend von den nominellen Einstellungen bei 9 A und 50 A wird nun die horizontale EMCS-Komponente auf 50 A erhöht. Dadurch wird die horizontale Erdmagnetfeldkomponente überkompensiert und ein Versatz des Flussschlauchs in westlicher Richtung (im Detektorbild nach rechts) wird erwartet. Genau dieses Verhalten spiegelt sich bei der Bestimmung des Schnittpunktes wider. Es ergeben sich für $\Delta x = 5,40$ mm und für $\Delta y = -3,41$ mm. In diesem Fall bleibt nun die y -Komponente nahezu konstant, während sich die x -Komponente ändert. Das gemessene Verhalten ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Während bei den Messungen mit unterschiedlichen vertikalen EMCS Strömen eine Stromveränderung von 25 A zu einem relativen vertikalen Versatz von 8 mm führt, wird für eine Verschiebung dieser Größe im Falle des horizontalen EMCS ein Strom von 41 A benötigt.

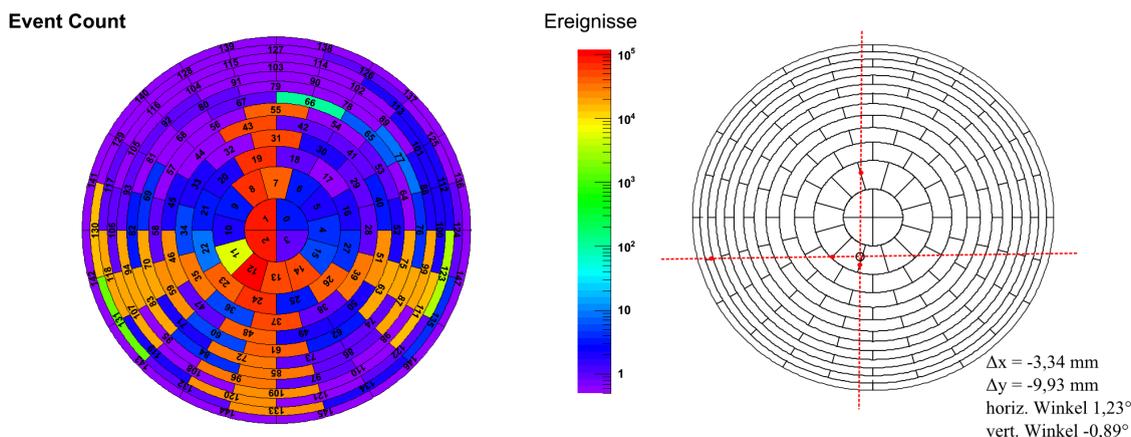


Abbildung 5.6.: Ratenverteilung auf dem Detektor nach einem Kreuzscan der E-gun mit Überkompensation in vertikaler Richtung (EMCS-horz.: 9 A; EMCS-vert.: 70 A) (**links**). Resultierende Übersichtsdarstellung mit zugehörigen Abweichungen des Kreuzzentrum vom Detektormittelpunkt (**rechts**). Raten und Pixel sind in Tabelle B.5 ersichtlich.

Diese vermeintliche Diskrepanz kann durch die unterschiedliche Windungszahl der beiden EMCS Systeme erklärt werden. Während das vertikale EMCS aus 16 Windungen besteht, weist das horizontale EMCS lediglich 10 Windungen auf. Das Verhältnis aus der für eine bestimmte Verschiebung benötigten Stromstärke und der Windungszahl ist wie erwartet konstant.

Sechste Messreihe

EMCS-horizontale: 100 A

EMCS-vertikal: 50 A

In einem letzten Schritt wird die horizontale Komponente auf die maximal mögliche Stromstärke von 100 A eingestellt, was einer Verdopplung gegenüber der fünften Messphase entspricht. Für die Verschiebung ergibt sich $\Delta x = 15,16$ mm sowie $\Delta y = -3,44$ mm. Die vertikale Komponente bleibt wie erwartet konstant, während sich der Versatz in x-Richtung entsprechend des größeren Stromes erhöht. Bild 5.8 zeigt das gemessene Verhalten.

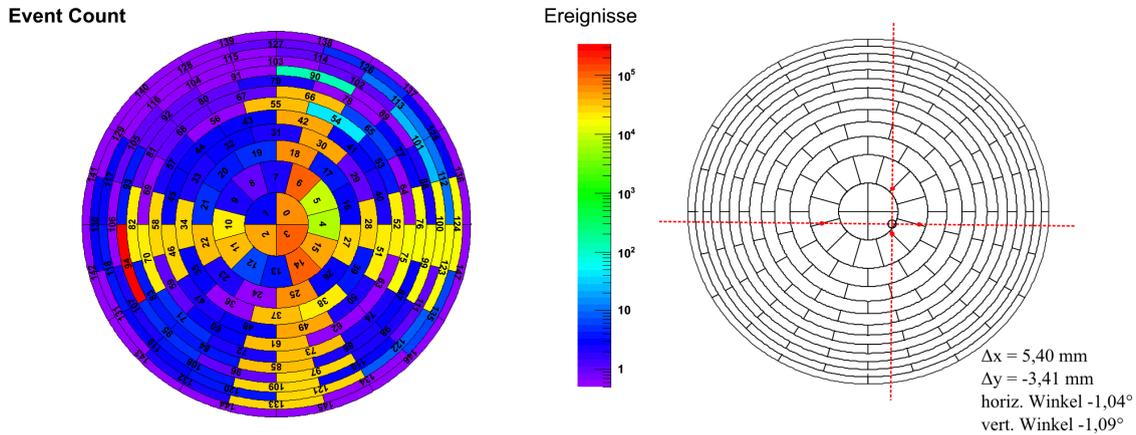


Abbildung 5.7.: Ratenverteilung auf dem Detektor nach einem Kreuzscan der E-gun mit Überkompensation in horizontaler Richtung (EMCS-horz.: 50 A; EMCS-vert.: 50 A) (**links**). Die Übersichtsdarstellung gibt die Position des resultierenden Kreuzmittelpunktes an (**rechts**). In Tabelle B.5 sind die verwendeten Pixel und Raten dargestellt.

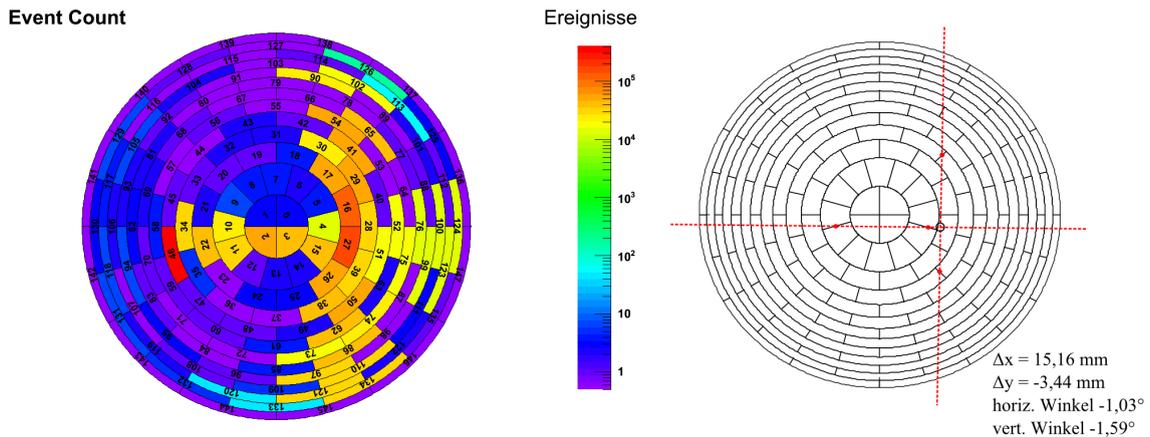


Abbildung 5.8.: Ratenverteilung auf dem Detektor nach einem Kreuzscan der E-gun mit maximal möglicher Überkompensation in horizontaler Richtung (EMCS-horz.: 100 A; EMCS-vert.: 50 A) (**links**). Die Übersichtsdarstellung gibt erneut den resultierenden Kreuzmittelpunkt an (**rechts**). Die angegebenen Abweichungen vom Zentrum wurden mit Hilfe der Pixel und Raten in Tabelle B.5 berechnet.

5.3.2. Simulationen

Mit Hilfe von Simulationen sollen einerseits die Funktionalität der Software getestet, und andererseits die Messergebnisse überprüft werden. Die Parameter des Elektrodensystems, sowie die Ströme der Magnete wurden den Messungen entsprechend (Abschnitt 5.3.1) in Kassiopeia eingestellt.

Vorangegangene Messungen ohne E-gun ergaben einen Versatz des Detektorsystems gegenüber dem Hauptspektrometer von $\Delta x = -1,75$ mm und $\Delta y = -3,25$ mm. Vergleicht man diesen Wert mit dem Ergebnis der ersten Messung aus Abschnitt 5.4.2, so zeigt sich ein zusätzlicher Versatz in x-Richtung von $\approx -1,5$ mm und in y-Richtung von $\approx -0,1$ mm. Dieser kommt durch eine zusätzliche Fehlstellung der E-gun gegenüber dem Spektrometer/Detektor zustande.

Da sich die E-gun in einem circa 100-fach schwächeren Magnetfeld als der Detektor befindet, ist der Versatz auf dieser Seite entsprechend der Erhaltung des magnetischen Flusses etwa 10-fach größer. Um den genauen Wert der E-gun Position herauszufinden, wurden in einer ersten Simulation Elektronen auf einer Scheibe mit Zentrum bei $x = y = 0$ an der z-Position der E-gun gestartet und ihre Auftreffpunkte auf dem Detektor registriert. Trifft nun ein Teilchen den Punkt, der dem gemessenen Versatz von $\Delta x = -3,28$ mm und $\Delta y = -3,34$ mm entspricht, so wird dessen Startpunkt aus der Simulation extrahiert. Diese Koordinaten im Vergleich zum Zentrum der Scheibe entsprechen dem zusätzlichen Versatz auf der E-gun-Seite des Spektrometers.

Es ergibt sich eine x-Abweichung von 15,7 mm sowie eine y-Abweichung von 1,2 mm, was dem aus der Fluss erhaltung berechneten Wert entspricht. Die tatsächlichen Startpunkte der E-gun-Elektronen ergeben sich somit aus der Position des Manipulators und den an ihm eingestellten horizontalen bzw. vertikalen Winkeln über die Transformation

$$x = -r_{Man.} \cos(\alpha_{vert.}) \sin(\alpha_{horz.}) + x_{Man.} \quad (5.2)$$

$$y = r_{Man.} \sin(\alpha_{vert.}) + y_{Man.} \quad (5.3)$$

$$z = -r_{Man.} \cos(\alpha_{vert.}) \cos(\alpha_{horz.}) + z_{Man.} \quad (5.4)$$

mit $r_{Man.} = 1,206$ m, $z_{Man.} = -12,416$ m, $x_{Man.} = -0,0157$ m sowie $y_{Man.} = -0,0012$ m. Aus diesen Angaben werden nun die Koordinaten der E-gun-Position für die maximale Manipulator-Auslenkung von $\pm 20^\circ$ sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung berechnet. Mit Hilfe eines "Linien-Positions-Generators" wurden entlang einer horizontalen bzw. vertikalen Linie zwischen den zuvor berechneten maximalen Auslenkungspunkten insgesamt 40000 Elektronen gestartet. Gestoppt wird die Simulation mit Hilfe eines Terminators an der Stelle des Detektorwafers bei $z = 13,934$ m. Anschließend wird die finale Position (x- und y-Koordinate) dem jeweiligen Pixel entsprechend grafisch dargestellt. Der Versatz des Detektorsystems gegenüber dem Hauptspektrometer von $\Delta x = -1,75$ mm und $\Delta y = -3,25$ mm wird bei der Darstellung berücksichtigt und korrigiert.

In den Abbildungen 5.10 - 5.15 sind die Ergebnisse der Simulationen mit den jeweiligen Resultaten der Messungen grafisch gegenübergestellt. Die simulierten Abweichungen der Schnittpunkte vom Zentrum finden sich in Tabelle 5.2. Die Abbildung 5.9 zeigt noch einmal die Abhängigkeit des horizontalen (Δx) bzw. vertikalen (Δy) Versatzes der Kreuzungsmittelpunkte in Abhängigkeit der EMCS Spulenströme. Sowohl der erwartete lineare Zusammenhang, als auch die Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen für Kreuzungspunkte nahe dem Spektrometerzentrum sind zu erkennen. Für größere Abweichungen der Stromstärken und eines entsprechend stärkeren Versatzes vom Zentrum des Spektrometers werden die Differenzen zwischen Messungen und Simulationen größer.

Tabelle 5.2.: Ergebnisse der Simulationen

Phase	EMCS-horz./vert. (A)	Δx (mm)	Δy (mm)	Abbildung
1	9/50	-3,28	-3,34	5.10
2	9/25	-3,20	5,61	5.11
3	9/0	-3,11	14,61	5.12
4	9/70	-3,32	-10,51	5.13
5	50/50	6,07	-3,44	5.14
6	100/50	17,55	-3,53	5.15

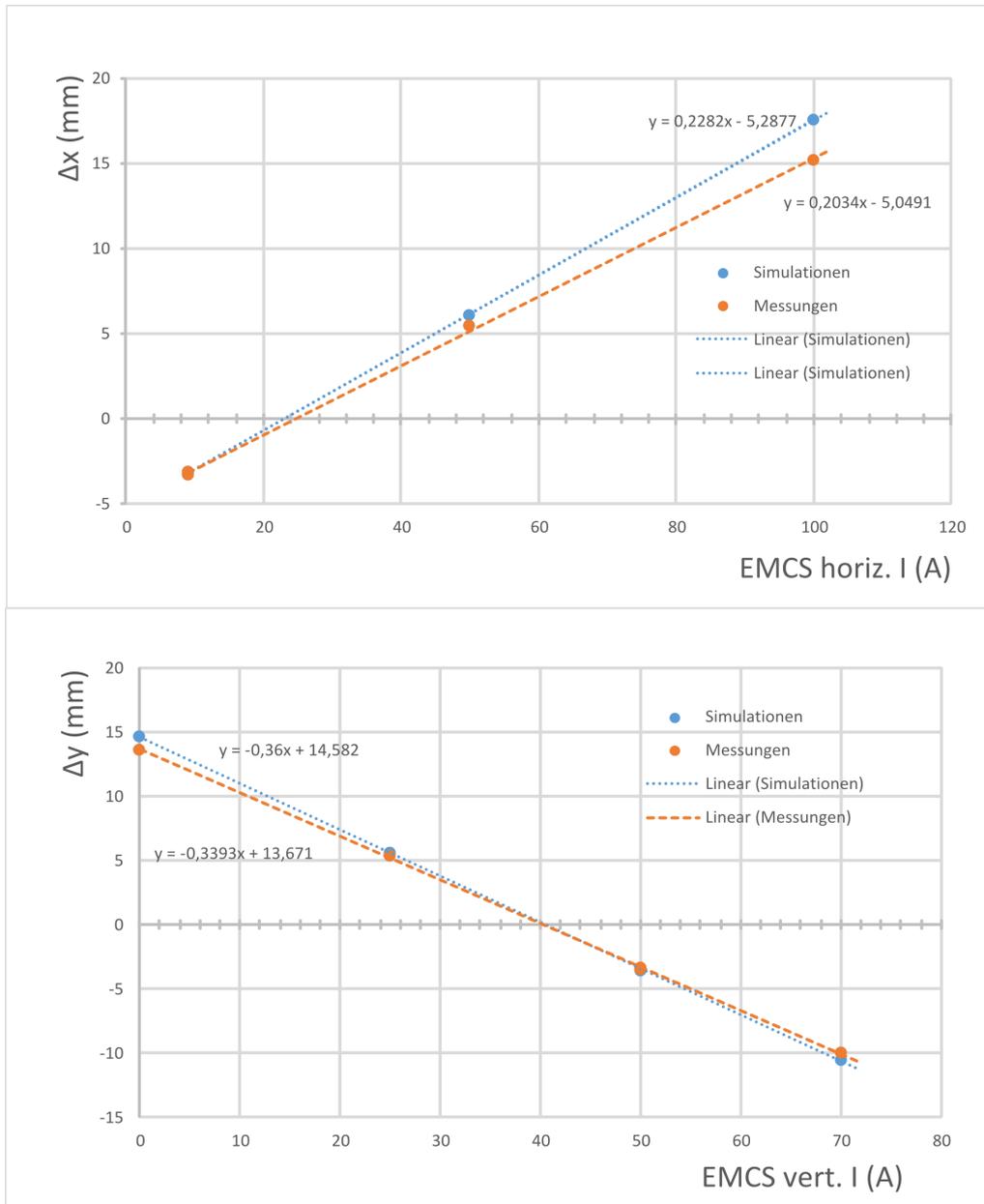


Abbildung 5.9.: Δx -Versatz in Abhängigkeit der horiz. EMCS Stromstärke für die Messungen und Simulationen (**oben**). Δx -Versatz in Abhängigkeit der vert. EMCS Stromstärke für Messungen und Simulationen (**unten**). Die nominelle Erdmagnetfeldkompensation entspricht den Punkten, an denen sich die Geraden schneiden (9 A EMCS horz. und 50 A EMCS vert.).

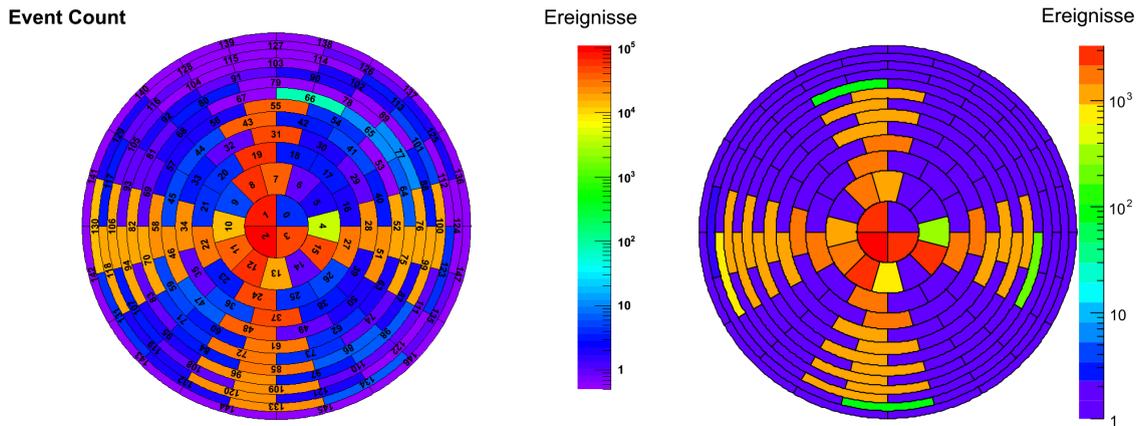


Abbildung 5.10.: Gemessene Ratenverteilung auf dem Detektor für EMCS-horz.: 9A und EMCS-vert.: 50A (**links**), sowie simulierte Ratenverteilung (**rechts**).

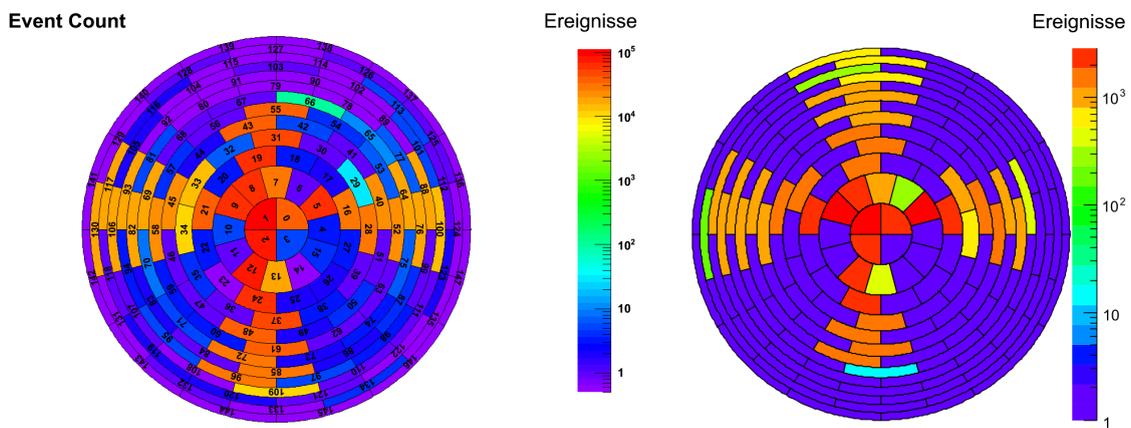


Abbildung 5.11.: Gemessene Ratenverteilung auf dem Detektor für EMCS-horz.: 9A und EMCS-vert.: 25A mit Abschattung im oberen Bereich (**links**), sowie simulierte Ratenverteilung (**rechts**).

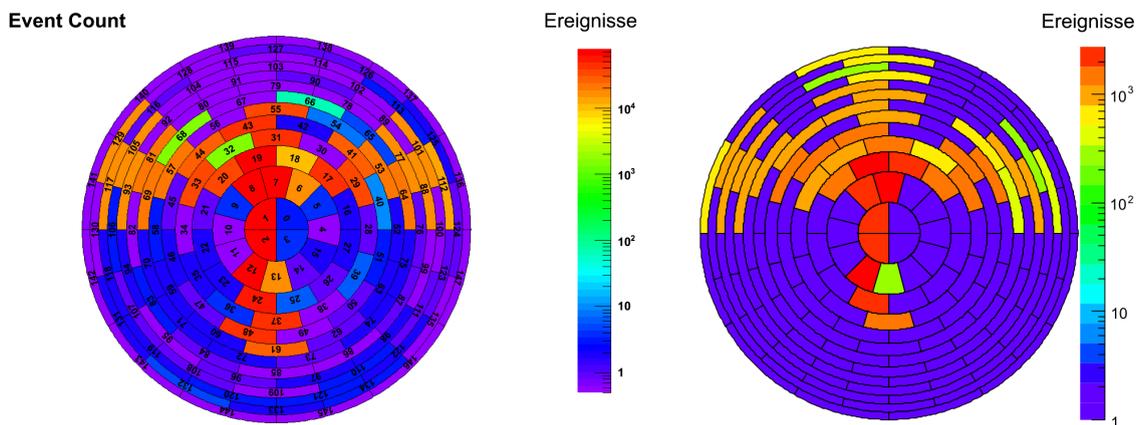


Abbildung 5.12.: Gemessene Ratenverteilung auf dem Detektor für EMCS-horz.: 9A und EMCS-vert.: 0A mit Abschattung im oberen Bereich (**links**), sowie simulierte Ratenverteilung (**rechts**).

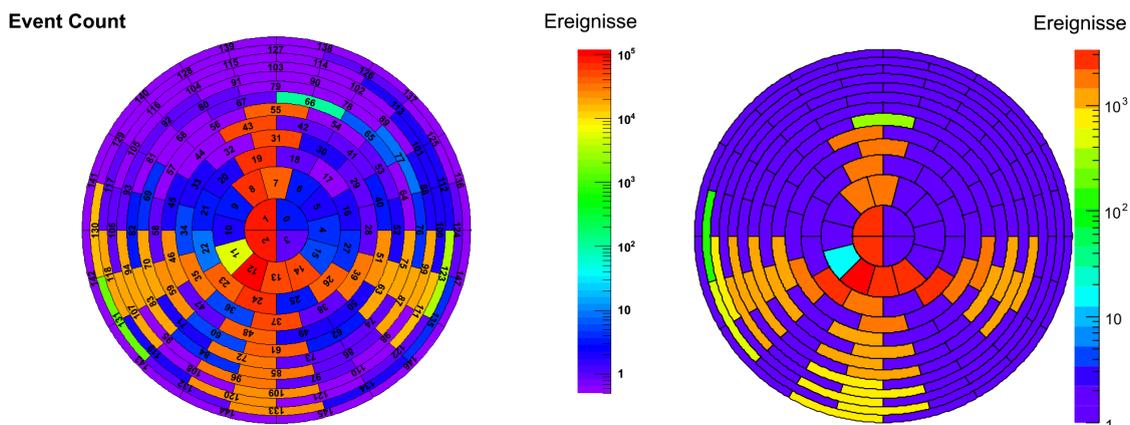


Abbildung 5.13.: Gemessene Ratenverteilung auf dem Detektor für EMCS-horz.: 9A und EMCS-vert.: 70A (**links**), sowie simulierte Ratenverteilung (**links**).

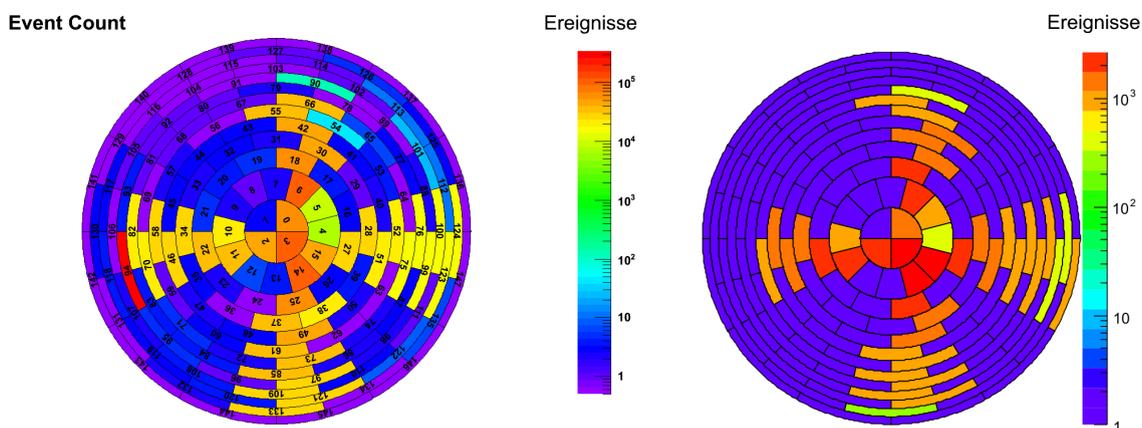


Abbildung 5.14.: Gemessene Ratenverteilung auf dem Detektor für EMCS-horz.: 50A und EMCS-vert.: 50A (**links**), sowie simulierte Ratenverteilung (**rechts**).

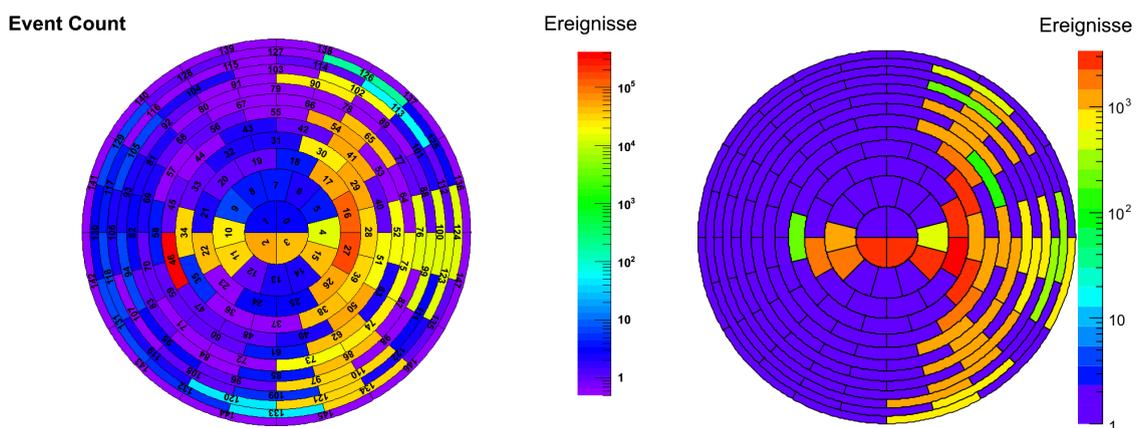


Abbildung 5.15.: Gemessene Ratenverteilung auf dem Detektor für EMCS-horz.: 100A und EMCS-vert.: 50A (**links**), sowie gemessene Ratenverteilung (**rechts**).

5.3.3. Schlussfolgerung

Durch Änderungen der Stromstärke für die Spulen des EMCS sollte deren Auswirkung auf den magnetischen Flusschlauch untersucht werden. Verschiebungen in senkrechter und waagerechter Richtung bei entsprechenden Veränderungen der vertikalen und horizontalen Spulenströme wurden beobachtet und konnten in ihrer Ausprägung relativ zueinander mit den Erwartungen in Einklang gebracht werden.

Der Vergleich mit den Simulationen liefert auf der Ebene der Pixelauflösung eine sehr gute Übereinstimmung, zeigte jedoch Abweichungen von bis zu 15% bei der genauen Schnittpunktberechnung. Gleichwohl musste für die Simulation zunächst aus der Abweichung des Schnittpunktes der ersten Messung bei nomineller Erdmagnetfeldkompensation der Versatz der E-gun mit Hilfe einer weiteren Simulation bestimmt werden, wodurch die exakte Übereinstimmung der Schnittpunkte zwischen der ersten Messung sowie der zugehörigen Simulation zu erklären ist, siehe Tabelle 5.3. Auffällig ist eine erhöhte Diskrepanz zwischen Messung und Simulation für die Achse, deren EMCS-Komponente verändert wird (Δy für EMCS-vert. und Δx für EMCS-horz.). Verantwortlich könnte hierfür die Approximation des EMCS-Feldes durch einen konstanten Wert im Spektrometer sein, was in räumlicher Nähe zu den Spulen und entsprechenden Abweichungen vom Nominalwert fehlerbehaftet ist. Dies bedarf weitergehender Untersuchungen sowie Anpassungen der Simulationen. Des Weiteren ist es für diese Fälle möglich, dass die Annahme einer senkrechten und waagerechten Gerade, aus der die Schnittpunkte berechnet werden, nicht mehr getroffen werden kann. Schlussendlich muss auch die Kassiopeia-Software dahingehend angepasst werden die exakte E-gun-Geometrie sowie deren Position zu enthalten. Eine Verkippung der Solenoide, sowohl auf Detektorseite sowie auf E-gun-Seite muss ebenfalls berücksichtigt werden.

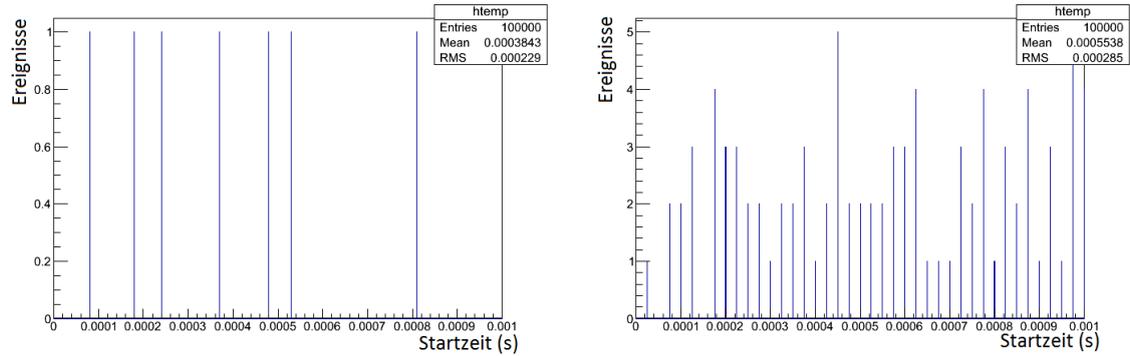
Tabelle 5.3.: Vergleich zwischen Mess- und Simulationsergebnissen

Phase	EMCS-horz./vert. (A)	$\Delta x_{\text{Sim.}-\text{Mess.}}$		$\Delta y_{\text{Sim.}-\text{Mess.}}$	
		(mm)	(%)	(mm)	(%)
1	9/50	0,0	0,0	0,0	0,0
2	9/25	0,04	1,2	0,22	4,1
3	9/0	0,06	1,9	0,98	7,2
4	9/70	0,02	0,6	-0,58	5,8
5	50/50	0,67	12,4	-0,03	0,9
6	100/50	2,39	15,8	-0,09	2,6

5.4. Untersuchung des Detektorverhaltens bei hohen Raten

Im letzten Teil dieses Kapitels wird das Verhalten des Detektors bei hohen Elektronenraten untersucht. Die Einflüsse des Detektors auf Messungen wie beispielsweise von Transmissionsfunktionen zu verstehen ist essentiell um wichtige Kenngrößen des Spektrometers, wie Potential und Magnetfeld, korrekt ableiten zu können. Obwohl in der finalen Tritium-Phase keine hohen Ereignisraten erwartet werden, wird sowohl bei der Charakterisierung des Hauptspektrometers als auch bei späteren Kalibrations- und Überwachungsmessungen, z.B. der Quellsäulendichte, eine Elektronenkanone (E-gun) eingesetzt, die optimalerweise Raten von mehreren 10 kHz erzeugen kann, um so die für eine bestimmte Sensitivität benötigte Statistik in möglichst kurzer Zeit zu erhalten, siehe dazu Abschnitt 5.1.

Dieses Kapitel dient dazu, die bisherigen Simulationen, welche mit Hilfe von Kassiopeia und DRIPS (siehe Abschnitt 3.1.4) erstellt wurden, mit ersten Messergebnissen zu vergleichen.



(a) Startzeitverteilung bei 10 kHz Elektronenrate

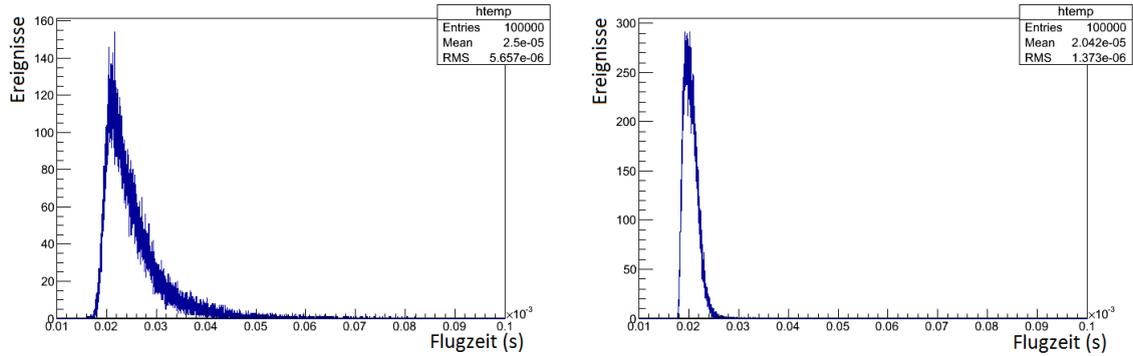
(b) Startzeitverteilung bei 80 kHz Elektronenrate

Abbildung 5.16.: (a) Startzeitverteilung der Elektronen bei einer Rate von 10 kHz. Die Effizienz, pro Puls Elektronen aus der Silberoberfläche zu lösen, ist gering. Pro Puls wird maximal ein Elektron erzeugt. (b) Erhöht man die Intensität, so steigt sowohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Laser-Puls Elektronen erzeugt, als auch die Ausbeute an Elektronen pro Puls. Die Gesamtelektronenrate wird dadurch erhöht.

5.4.1. Problematik

Die Verwendung einer E-gun als Elektronenquelle bietet den Vorteil, durch eine Erhöhung der Rate die Messzeit einer Transmissionsfunktion zu reduzieren und gleichzeitig die notwendige statistische Genauigkeit zu erreichen. Die Effizienz des Detektors ist jedoch andererseits stark von der Elektronenrate sowie deren Ankunftszeitverteilung abhängig. Beim Einsatz der Laserdiode mit einer Pulsfrequenz von 100 kHz und reduzierter Stromstärke, d.h. geringerer Intensität, ist die Effizienz pro Laser-Puls Elektronen zu erzeugen so gering, dass höchstens ein Elektron erzeugt wird, siehe Abbildung 5.16 (a). Erhöht man die Laserintensität, wird sowohl die Ausbeute an Elektronen pro Puls, und somit die Wahrscheinlichkeit überhaupt Elektronen in einem Puls zu erzeugen, erhöht. In Abbildung 5.16 (b) ist diese Situation gezeigt.

Hinzu kommt eine je nach Beschleunigungsspannung und entsprechender Überschussenergie unterschiedliche Flugzeit der Teilchen im Hauptspektrometer, wie in Bild 5.17 dargestellt. Konsequenzen hat dies insbesondere für Messungen der Transmissionsfunktion. Im oberen Bereich der Transmissionskante, dem Übergangsbereich von voller Transmission in Teiltransmission, ist die Flugzeitverteilung der Elektronen besonders breit. Einige Elektronen besitzen kaum Überschussenergie und brauchen entsprechend lange zum Detektor, während andere mit mehr Energie schneller ankommen. Dadurch ist deren Ankunftszeit trotz identischer Startzeit verschieden. Der Detektor kann die Elektronen entsprechend zeitlich voneinander trennen und ist in der Lage eine höhere Rate zu registrieren. Wird die Überschussenergie weiter erhöht, so reduziert sich die Breite der Flugzeitverteilung wie in Abbildung 5.17 (b) dargestellt und die Elektronen aus einem Puls kommen zeitnah am Detektor an. Dieser kann die Elektronen nicht mehr voneinander unterscheiden und das dort erzeugte Ladungssignal kann mit weiteren Signalen interferieren, wodurch es zu sogenannten "pile-up"-Effekten kommen kann. Eine Folge davon wäre ein Rateneinbruch der Transmissionsfunktion in voller Transmission bei höheren Überschussenergien. Bei "pile-up" muss zwischen zwei Arten, dem "peak pile-up" und "tail pile-up", wie in Bild 5.18 dargestellt, unterschieden werden [Kno10]. Im Falle des "peak pile-up" kommen zwei Signale in so kurzem zeitlichem Abstand hintereinander, dass sie von der Detektorelektronik als ein Ereignis mit doppelter Amplitude, also doppelter Energie, charakterisiert werden. Ist der Abstand zwischen den Signalen größer, so wird die Amplitude des zwei-



(a) Flugzeitverteilung bei geringer Überschussenergie (b) Flugzeitverteilung bei hoher Überschussenergie

Abbildung 5.17.: (a) Der Anteil an "schnellen" Elektronen ist aufgrund ihrer Energieverteilung bei geringen Überschussenergien relativ klein. Die Flugzeit ist entsprechend länger. (b) Bei höheren Überschussenergien steigt ihr Anteil an und die Flugzeit verkürzt sich.

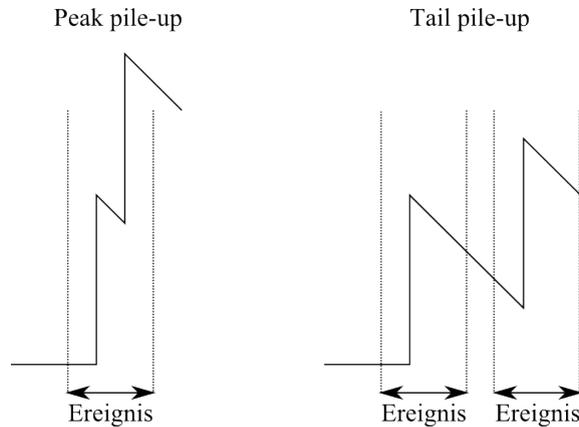


Abbildung 5.18.: Peak pile-up (**links**). Tail pile-up (**rechts**).

ten Signals auf den bereits abfallenden Teil des ersten addiert. Der Detektor kann zwar zwischen beiden Ereignissen unterscheiden, die Summation der Amplituden liefert jedoch einen falschen Wert, wodurch der Energiebetrag nicht korrekt wiedergegeben werden kann. Die Effekte sind direkt abhängig von den Zeitparametern der Signalverarbeitung, maßgeblich bestimmt durch den verwendeten trapezförmigen Filter. Der Name leitet sich aus der trapezartigen Form des verarbeiteten Signals ab, siehe Abbildung 5.19. Ausgangspunkt ist ein Puls im Detektor, wie im Bild links durch die blaue Kurve dargestellt ist. Die Filterstufe besitzt zwei zeitliche Kenngrößen, zum einen die sogenannte "shaping length" welche durch Δt_L beschrieben wird, sowie die "gap length" Δt_G . Die "shaping length" tritt zweimal, durch die "gap length" getrennt, auf. Die Signale S_1 und S_0 während der Dauer der "shaping length" werden aufsummiert und über Δt_L gemittelt, bevor sie im Anschluss voneinander abgezogen werden. Die Differenz ergibt das trapezförmige Signal und entspricht gleichzeitig der Energie des Teilchens, welches im Bild rechts durch die rote Kurve dargestellt ist. "Tail pile-up"-Effekte führen nun dazu, dass Signal S_1 im Mittel kleiner, S_0 hingegen größer wird, wodurch sich die Differenz und damit die Energie verkleinert wie in Abbildung 5.20 (rechts) dargestellt. Das gesamte Energiespektrum wird entsprechend zu niedrigeren Energien hin verschoben, siehe Bild 5.22.

Der "Peak pile-up" hingegen tritt in unterschiedlichen Formen in Erscheinung. Ist die

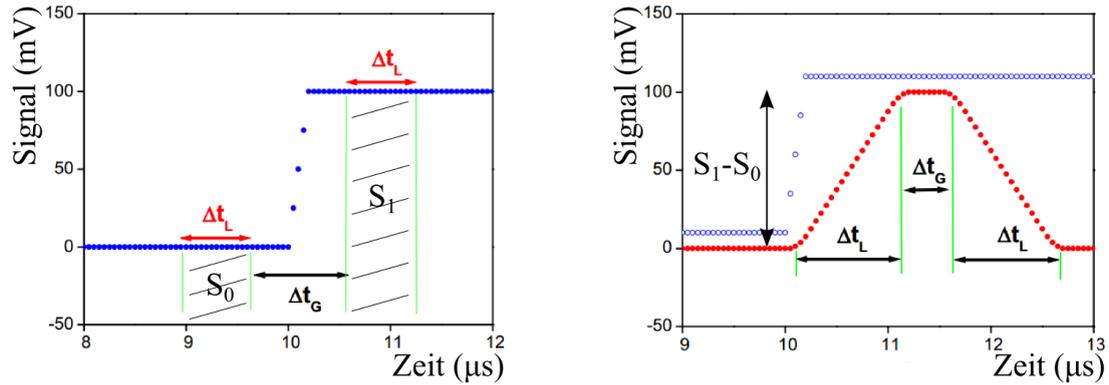


Abbildung 5.19.: Signalpuls mit zugehörigen Zeitparametern des trapezförmigen Filters (**links**). Resultierendes Signal nach der Verarbeitung durch den Filter, in rot dargestellt (**rechts**). Die Amplitude ergibt sich aus der Differenz der Signale S_1 und S_0 und entspricht der Energie des Impulses. Aus [Sci] (mod.) entnommen.

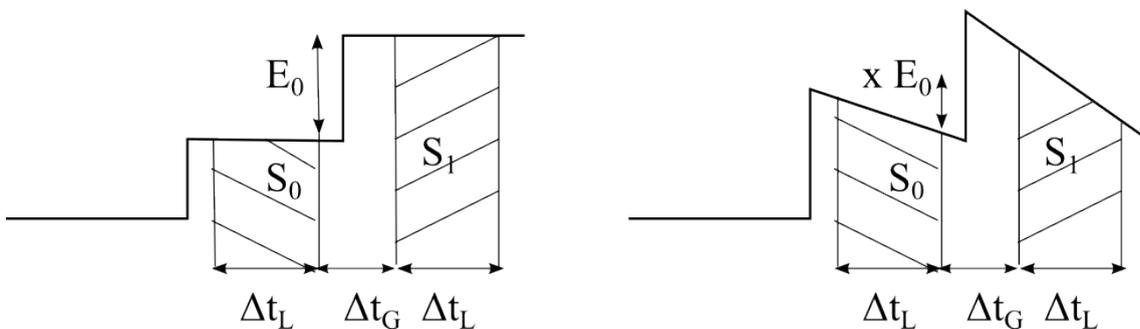


Abbildung 5.20.: Idealisierte Signalform mit $E = \frac{S_1 - S_0}{\Delta t_L} = E_0$ (**links**). Durch Verschiebung der "baseline" fällt das Signal unterschiedlich stark ab und $E = x \cdot E_0 < E_0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (**rechts**). Die detektierte Energie ist durch den "tail pile-up" kleiner. Nach [Eno13b] (mod.).

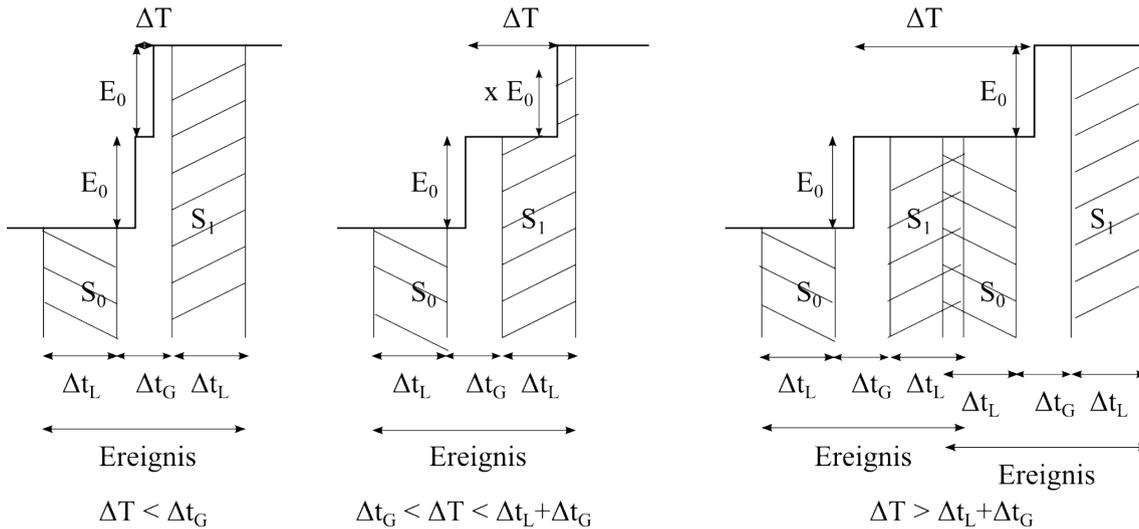


Abbildung 5.21.: Idealisierte Signalform für die verschiedenen Situationen des "peak-pile-up". Ist die Signalfolge schneller als Δt_G , so registriert der Trapezfilter ein Signal mit $E = \frac{S_1 - S_0}{\Delta t_L} = 2E_0$ (**links**). Für $\Delta T > \Delta t_L + \Delta t_G$ werden zwei Signale mit $E = \frac{S_1 - S_0}{\Delta t_L} = E_0$ erkannt (**rechts**). Ansonsten wird ein Signal mit einer Energie von $E = \frac{S_1 - S_0}{\Delta t_L} = E_0 + x \cdot E_0$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ detektiert (**Mitte**). Der "peak pile-up" verhindert eine klare Trennung der Signale im Energiespektrum, siehe Abbildung 5.22. Nach [Eno13b] (mod.).

Zeitdifferenz ΔT zwischen zwei Ereignissen kleiner als die "gap length" Δt_G , so wird das Signal als ein einziges mit doppelter Amplitude detektiert, siehe dazu Bild 5.21 (links). Dies würde einem Elektron mit doppelter Energie $2E_0$ entsprechen, anstatt zwei getrennten Ereignissen mit E_0 . Liegt ΔT zwischen Δt_G und der Summe $\Delta t_G + \Delta t_L$, so erhält man einen Energiewert zwischen E_0 und $2E_0$. Abbildung 5.21 (Mitte) entspricht dieser Situation. Ab einem Zeitintervall größer als $\Delta t_G + \Delta t_L$ gelingt die Unterscheidung zwischen zwei Signalen und der Energiewert beträgt jeweils E_0 . Dies ist in Abbildung 5.21 (rechts) zu sehen.

Das resultierende Energiespektrum ist beispielhaft in Abbildung 5.22 gezeigt. Die Verschiebung des Spektrums lässt sich sehr gut am Hauptpeak erkennen, dessen Maximum bei $\approx 18,6$ keV liegen sollte, aber aufgrund des "tail pile-up" zu niedrigeren Energien verschoben wurde. Die folgende "Schulter" zeigt den mittleren Fall des Bildes 5.21, bei dem je nach Zeitintervall zwischen zwei Signalen nur ein Signal mit einer Energie im Bereich von E_0 und $2E_0$ gemessen wird. Der zweite Peak repräsentiert den linken Fall aus Bild 5.21. Die Signale kommen dabei so schnell hintereinander, dass die volle Energie $2E_0$ als ein Signal wahrgenommen wird. Je nach Rate können auch dreifach oder vierfach Ereignisse auftreten.

Aufgrund der Kombination aus hohen Elektronenraten einerseits und deren unterschiedlichen Flugzeitverteilungen andererseits kommt es zu den eben beschriebenen "pile-up"-Effekten. Für Messungen der Transmissionsfunktion, bei denen es darauf ankommt die Anzahl der Elektronen präzise zählen zu können, ist es schwer, aus dem "verschmierten" Energiespektrum mit "Doppel- und Dreifachpeaks", die korrekte Anzahl zu extrahieren. Ein Ansatz zur Behebung der Problematik wird im Rahmen der Messungen 5.4.2 und Simulationen 5.4.3 gezeigt.

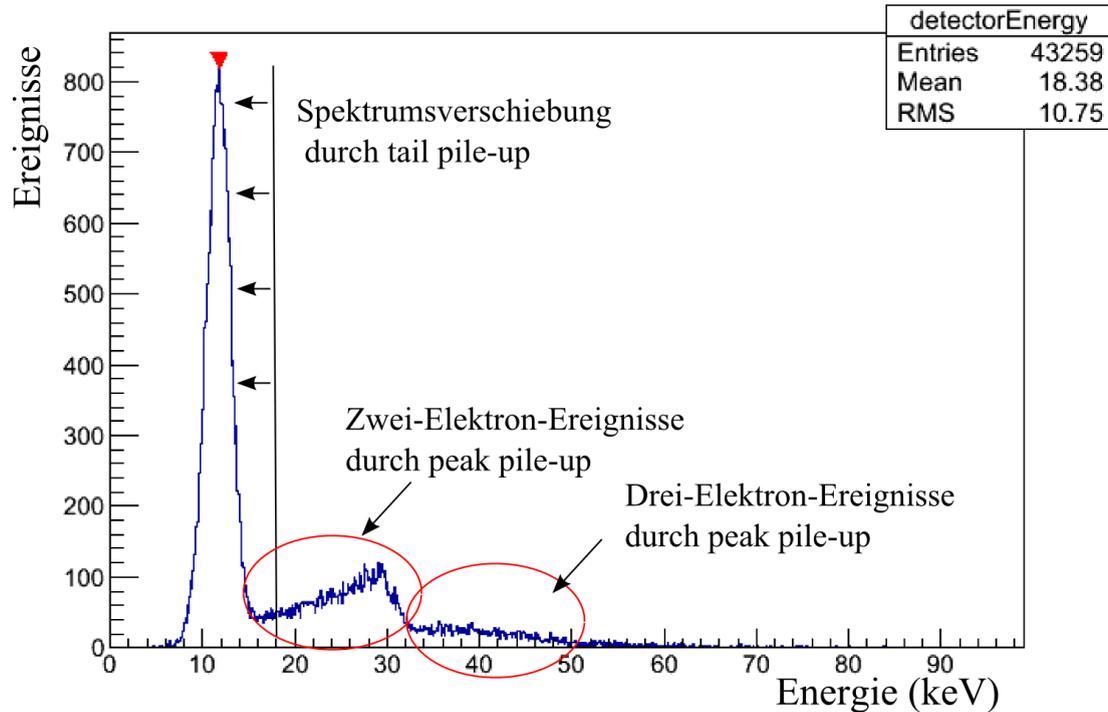


Abbildung 5.22.: Energiespektrum, durch "pile-up"-Effekte verändert. "Tail pile-up" verschiebt das Spektrum zu niedrigeren Energien, während "peak-pile-up" das Signal "ausschmiert".

5.4.2. Messungen

Die Untersuchung des Detektorverhaltens besteht aus der Messung von vier Transmissionsfunktionen mit unterschiedlichen Elektronenraten, wie in Tabelle 5.4 gezeigt. Dazu wird ein Polarisationsfilter verwendet, so dass alle weiteren Parameter, deren Einstellungen im Folgenden beschrieben werden, bei den einzelnen Messungen nicht verändert werden müssen.

- Elektrodensystem (innere + äußere Drahtlage) liegen auf einem Potential von $U = -200$ V. Spektrometertank ist geerdet und liegt entsprechend auf Nullpotential. Nachbeschleunigungselektrode des Detektors liegt auf $U = +10$ kV.
- Spulenströme des LFCS entsprechend den $B = 0,36$ mT-Werten des Simplex-Algorithmus aus Tabelle 4.4. Das EMCS ist auf nominellen Spulenströmen von 9 A (EMCS-horz.) und 50 A (EMCS-vert.) eingestellt, was einer vollständigen Erdmagnetfeldkompensation entspricht.
- Die E-gun wird mit der Laserdiode auf 7 A betrieben und die Pulsfrequenz beträgt 100 kHz. Die Beschleunigungselektrode ist +50 V positiver gegenüber der Kathode. Zur Ratenanpassung wird ein Polarisationsfilter zwischen 20° und 38° eingesetzt.
- Der Trapezfilter des Detektors wird mit einer "shaping length" von $1,6 \mu\text{s}$ und einer "gap length" von 200 ns betrieben.

Im Folgenden stellt die linke Abbildung jeweils die resultierende Transmissionsfunktion dar, während die rechte Abbildung das zugehörige Energiespektrum zeigt, welches vom Detektor aufgenommen wurde. Anders als von einer idealen Transmissionsfunktion zu erwarten, fällt die Elektronenrate in voller Transmission wieder ab, obwohl alle Elektronen genügend Energie haben, das Retardierungspotential zu überwinden, siehe jeweils

Tabelle 5.4.: Übersicht Messparameter

Abbildung	Filter (°)	Rate (kHz)
5.23	38	≈ 5
5.24	35	≈ 10
5.25	30	≈ 30
5.26	20	≈ 45

schwarze Kurven im linken Bild. Dieses aus dem vorangegangenen Kapitel erwartete und dort beschriebene Verhalten, welches durch "pile-up"-Effekte verursacht wird, ist abhängig von der verwendeten Elektronenrate und fällt entsprechend unterschiedlich stark aus. Der Rückgang an Rate lässt sich durch eine kleinere Flugzeitverteilung der Elektronen bei höheren Überschussenergien erklären. Die Ankunft mehrerer Teilchen am Detektor erfolgt zeitnah, wodurch sie nicht oder nur schwer voneinander zu unterscheiden sind. Entsprechend registriert der Detektor eine geringere Zählrate und die Kurve fällt ab. Für Transmissionsfunktionsmessungen ergibt sich das Problem, nicht mehr abschätzen zu können, an welchem Punkt volle Transmission erreicht ist. An dieser Stelle setzt die verbesserte Zählmethode ein, deren Ergebnisse durch die rote Transmissionsfunktion in den linken Abbildungen dargestellt ist. Mit ihr soll eine möglichst vollständige Wiederherstellung der Transmissionsfunktion mit korrekter Elektronenrate erfolgen. Dazu müssen die aufgrund des "pile-up"-Effekts "einfach" gewerteten Mehrfach-Elektronenereignisse im Detektor entsprechend gewichtet aufsummiert werden. Aufgrund der "Ausschmierung" des Spektrums ist es jedoch sehr schwierig, geeignete Integrationsgrenzen zu definieren, in denen doppelt, dreifach usw. gezählt wird. Eine Möglichkeit besteht darin, den Hauptpeak des Spektrums und das anschließende Minimum zu suchen. Dieser Peak liegt bei etwa 10 keV, was der Energie eines einzelnen Elektrons entspricht, welches durch die Nachbeschleunigungselektrode mit $U = 10$ kV beschleunigt wurde. Alle Ereignisse im Intervall bis zum ersten Minimum werden im Folgenden einfach gezählt. Die zweite Grenze ergibt sich durch Addition des Energiebetrages, der für zwei Elektronen erwartet wird. Im vorliegenden Fall liegt die Grenze somit bei $2 \cdot 10$ keV. Die dritte Grenze ergibt sich entsprechend zu $3 \cdot 10$ keV. Auf diese Weise wird das komplette Spektrum unterteilt und die Ereignisse ihrem jeweiligen Intervall entsprechend aufsummiert, wie es exemplarisch für die blau umrandeten Punkte in den rechten Abbildungen dargestellt ist. Die so erhaltene rekonstruierte Transmissionsfunktion weist dabei einen höheren Maximalwert und gleichzeitig einen viel geringeren Rateneinbruch bei hohen Überschussenergien auf, was durch die differenziertere Zählmethode erreicht wurde. Die vorliegenden Messresultate sind aufsteigend nach ihrer Elektronenrate sortiert und zeigen die Fälle für 5 – 45 kHz Elektronenrate. Dabei lässt sich ein immer größerer Einfluss der "pile-up"-Effekte auf die Transmissionsfunktion feststellen und das zugehörige Energiespektrum weist eine erhöhte Anzahl an Mehrfachereignissen auf, die eine Rekonstruktion der Zählrate erschweren. Für den Fall einer Elektronenrate von ≈ 45 kHz gibt es Probleme mit der Aufnahmefähigkeit des DAQ²-Systems, was sich im Plateau der Transmissionsfunktion zeigt. Eine entsprechende Ratenwiederherstellung lässt sich für diesen Fall nicht durchführen, was die Resultate anhand der roten Kurve belegen.

²Data Acquisition

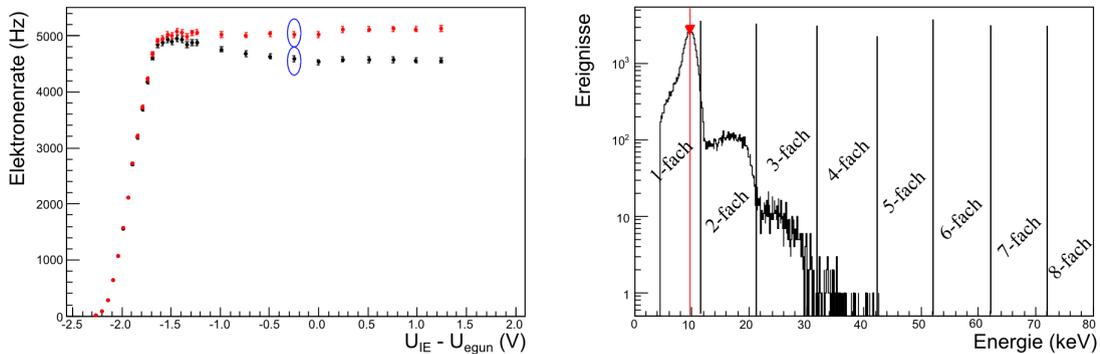


Abbildung 5.23.: Polarisator bei 38° . Gemessene Transmissionsfunktion ohne Berücksichtigung mehrfacher Ereignisse in schwarz, sowie mit Hilfe der modifizierten Zählmethode, welche dies berücksichtigt in rot. (**links**). Resultierendes Energiespektrum exemplarisch für die blau markierten Punkte der Transmissionsfunktion. Die rote Markierung gibt die Position des Hauptpeaks an, der zusammen mit dem folgenden Minimum die Position der Integrationsgrenze festlegt. Die rote Linie beschreibt die eigentlich erwartete Position des ersten Peaks, der sich aber aufgrund des "tail pile-up" zu niedrigeren Energien verschoben hat. Die Ausschmierung des restlichen Spektrums kommt durch "peak pile-up"-Effekte zustande (**rechts**).

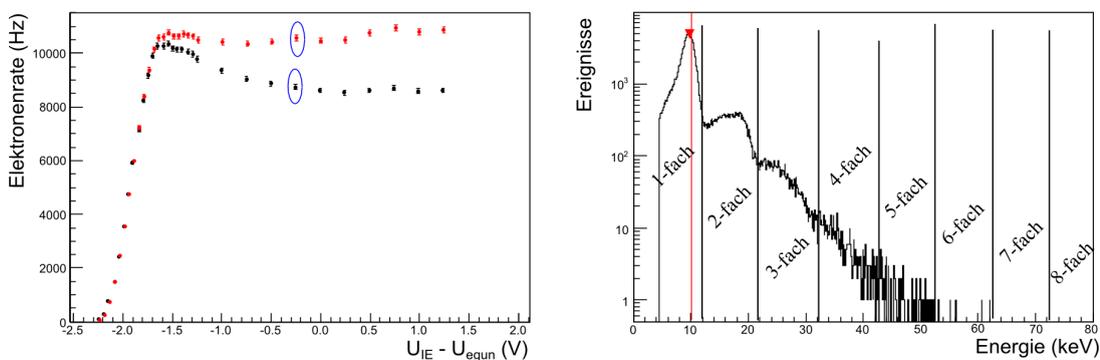


Abbildung 5.24.: Polarisator bei 35° . Gemessene Transmissionsfunktion mit normaler und modifizierter Zählmethode (**links**). Resultierendes Energiespektrum für die blau markierten Punkte (**rechts**). Der Rateneinbruch bei voller Transmission ist etwas stärker als bei der 38° Einstellung aufgrund höherer "pile-up"-Einflüsse.

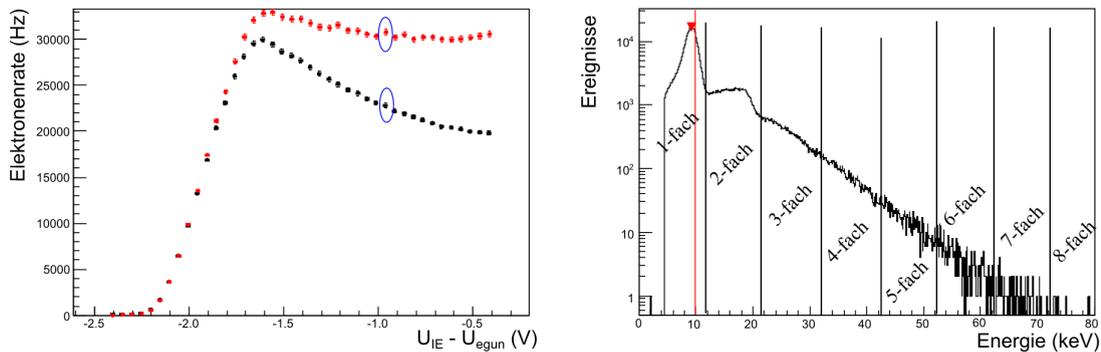


Abbildung 5.25.: Polarisator bei 30°. Gemessene Transmissionsfunktion mit normaler und modifizierter Zählmethode (**links**). Resultierendes Energiespektrum für die blau markierten Punkte (**rechts**). Der Rateneinbruch bei voller Transmission ist deutlich stärker als bei der 35° Einstellung aufgrund höherer "pile-up"-Einflüsse und kann auch durch die Korrektur nicht vollständig wiederhergestellt werden.

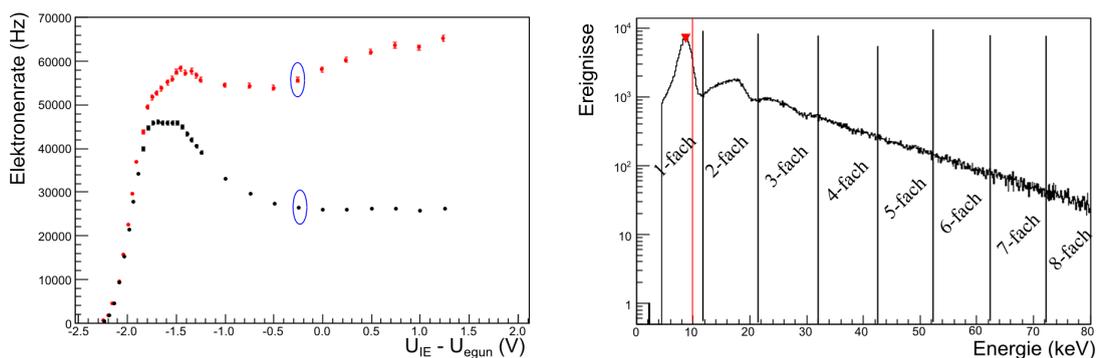


Abbildung 5.26.: Polarisator bei 20°. Gemessene Transmissionsfunktion mit normaler und modifizierter Zählmethode (**links**). Resultierendes Energiespektrum für die blau markierten Punkte (**rechts**). Probleme beim DAQ-System zeigen sich unter anderem im Plateau-Bereich der Transmissionsfunktion. Aufgrund der höchsten Elektronenrate zeigen sich auch die größten "pile-up"-Einflüsse im Energiespektrum.

5.4.3. Simulationen

Den Messungen entsprechend wurden Simulationen der Transmissionsfunktion mit Hilfe von Kassiopeia, sowie die dazugehörige Detektorsimulation mit DRIPS (Abschnitt 3.1.4) durchgeführt. Tabelle 5.5 weist die Abbildungen der Simulationen den entsprechenden Messeinstellungen zu. Die übrigen Simulationsparameter sind dabei folgende:

- Potential bei $U = -200$ V für die innere und äußere Drahtlage, Tank auf Nullpotential.
- Magnetfeld entsprechend den $B = 0,36$ mT-Werten des Simplex-Algorithmus aus Tabelle 4.4.
- Transmissionsfunktion besteht aus 60 Punkten mit jeweils 20000 in Kassiopeia simulierten Elektronen.
- Mit Hilfe des Programms "ModifyStartTime" aus KTrAP, siehe Abschnitt 3.2.3 wird die Startzeitverteilung der Elektronen angepasst, um die jeweils benötigte, aus den Messungen erhaltene Elektronenrate zu erstellen.
- Die "Shaping length" des Trapezfilters in DRIPS beträgt $1,6 \mu\text{s}$, sowie die "gap length" 200 ns, analog zu den Messungen.

Die Ergebnisse der Simulationen sind im Folgenden dargestellt. Wie auch schon bei den Messungen stellt das linke Bild die Transmissionsfunktion mit den beiden verschiedenen Zählmethoden dar. Die schwarze Kurve repräsentiert den Fall, dass alle Ereignisse des Histogramms "einfach" gezählt werden, unabhängig davon ob es sich durch "pile-up"-Effekte erzeugte Mehrfachereignisse handelt. Für die rote Kurve hingegen wurde die gleiche verbesserte Zählmethode wie bei den Messungen verwendet, die entsprechenden Bereiche des Energiespektrums mehrfach gewichtet. Das rechte Bild zeigt exemplarisch für den blau umrandeten Punkt der Transmissionsfunktion das zugehörige Energiespektrum. Die rote Markierung gibt die Position des Hauptpeaks an, während die rote Linie die Verschiebung dieses Peaks aufgrund des "tail pile-up" zeigt. Die Bereiche der Mehrfachzählungen sind durch die schwarzen Linien voneinander getrennt.

Tabelle 5.5.: Übersicht Simulationsparameter

Abbildung	entspricht Filter ($^\circ$)	Rate (kHz)
5.27	38	≈ 5
5.28	35	≈ 10
5.29	30	≈ 30
5.30	20	≈ 45

5.4.4. Schlussfolgerung

Die Messungen von Transmissionsfunktionen bei hohen Elektronenraten haben gezeigt, dass das Detektorverhalten und dessen Nachweiseffizienz stark von der Impulsfolge aus ein-treffenden Elektronen abhängt. Verantwortlich sind "pile-up"-Effekte, die maßgeblich durch die Ankunftszeitverteilung der Elektronen am Detektor verursacht werden. So sorgt eine hohe Überschussenergie für eine schmale Zeitverteilung und entsprechend großen "pile-up", was sich im Rateneinbruch der Transmissionsfunktionen äußert. Dieses Verhalten konnte in den Messungen bestätigt und durch Simulationen reproduziert werden. Eine geringere Überschussenergie im Bereich der Transmissionskante verbreitert die Zeitverteilung, der Detektor kann die Ereignisse einfacher unterscheiden und ist in der Lage eine höhere Rate

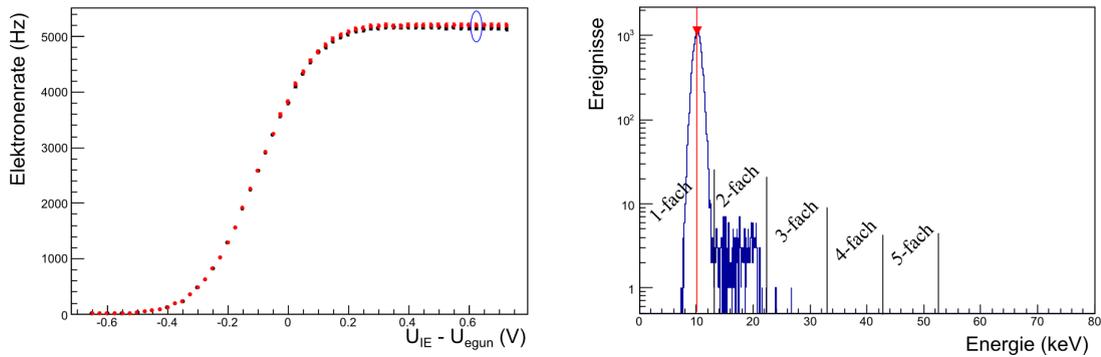


Abbildung 5.27.: Simulierte Ratenverteilung, die einer Polarisatorstellung von 38° entspricht.

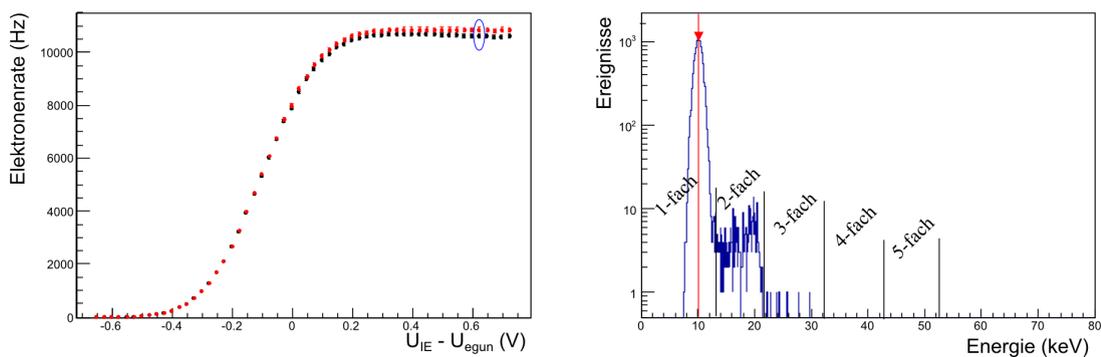


Abbildung 5.28.: Simulierte Ratenverteilung, die einer Polarisatorstellung von 35° entspricht.

zu detektieren. Auch dieses Auftreten konnte in den Messungen beobachtet werden. Mit Hilfe von Kassiopeia und DRIPS wurden Simulationen mit den zu den Messungen entsprechenden Einstellungen durchgeführt. Das Verhalten des Detektors konnte qualitativ wiedergegeben werden. So zeigten sich ein Ratenmaximum an der Transmissionskante, sowie ein darauffolgender Einbruch aufgrund höherer "pile-up"-Effekte, die durch die Ankunftszeitverteilung der Elektronen verursacht wurden. Die Stärke der Effekte konnte hingegen nicht reproduziert werden, wie anhand der Abbildungen in Kapitel 5.5 ersichtlich wird. So beträgt der Rateneinbruch exemplarisch für die 30° Einstellung des Polarisationsfilters in der Simulation $\approx 3\%$ gegenüber dem Maximum, während die Messung unter gleichen Bedingungen einen Einbruch von $\approx 30\%$ zeigt. Das Energiehistogramm der Simulation weist entsprechend einen viel geringeren Anteil an Mehrfachereignissen auf.

Ein möglicher Grund für die Diskrepanz ist die fehlende vollständige Simulation der Nachbeschleunigungselektrode. In den bisherigen Simulationen wurde die Gesamtenergie aller Elektronen gleichermaßen um einen Betrag von 10 keV erhöht. Tatsächlich führt die Nachbeschleunigung jedoch zu einer gerichteten Energieerhöhung, nämlich der Longitudinalkomponente. Folglich konnte deren Einfluss, der eine mögliche Reduktion der Wahrscheinlichkeit für Rückstreuung am Detektor nach sich zieht, nicht einbezogen werden. Weiterhin fehlt eine gemeinsame Verwendung der beiden Detektorsimulationen KESS und DRIPS um sowohl das Verhalten der Elektronen im Silizium (KESS), wie auch die anschließende Signalverarbeitung (DRIPS) im Zusammenhang beschreiben zu können. Weitergehende Simulationen sollten dies berücksichtigen.

Konsequenzen aus den Messungen ergeben sich dahingehend, dass der Einfluss von "pile-

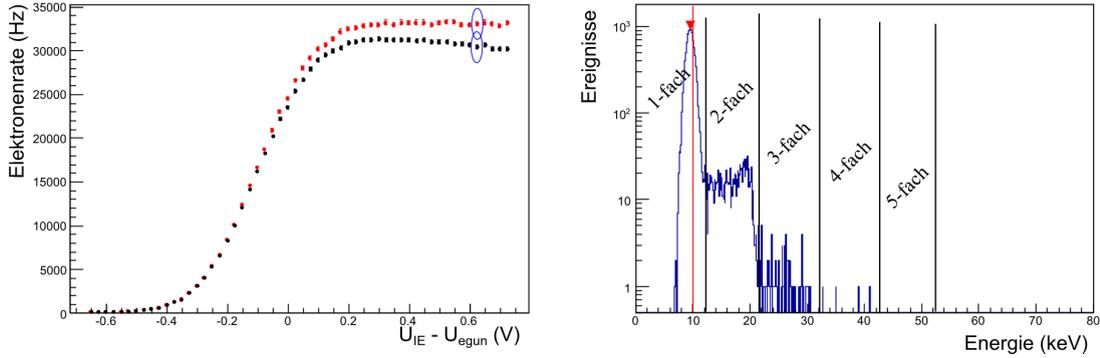


Abbildung 5.29.: Simulierte Ratenverteilung, die einer Polarisatoreinstellung von 30° entspricht.

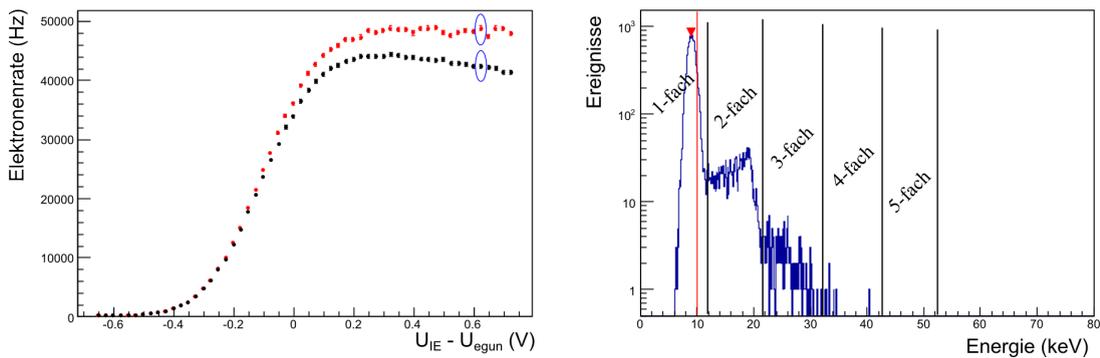


Abbildung 5.30.: Simulierte Ratenverteilung, die einer Polarisatoreinstellung von 20° entspricht.

up"-Effekten ab einer Elektronenrate von ≈ 5 kHz nicht mehr zu vernachlässigen ist, wodurch sich hieraus eine obere Grenze für die bei Messungen von Transmissionsfunktionen zu verwendende Rate ergibt. Im finalen Aufbau von KATRIN soll eine Elektronenkanone an der "rear section" mit einer Rate von ≈ 5 kHz betrieben werden [KAT05]. Um dies zu realisieren, bedarf es sowohl hardware- wie auch softwaretechnischer Verbesserungen, um die zu erwartende Rate verarbeiten zu können.

Detektorseitig sind bereits für die Zeit nach dem SDS Commissioning erste Verbesserungen geplant, wie die Implementierung weiterer Filterstufen für den Trapezfilter, die ohne großen Aufwand am System vorgenommen werden können. So lässt sich beispielsweise durch eine bipolare Stufe, die Verschiebung der "baseline" aus dem Signal herausfiltern, wodurch der "tail pile-up" vermieden werden kann. Durch eine weitere dritte Stufe, welche die Länge des Ereignisintervalls aufzeichnet, lassen sich "peak pile-up" Ereignisse voneinander separieren, wodurch eine genauere Zählung der Ereignisse möglich ist. Auch eine Verbesserung der Auslesegeschwindigkeit würde zu einem verbesserten Verhalten bei hohen Raten führen und könnte so die Möglichkeit bieten, in kürzerer Zeit Ergebnisse mit größerer statistischer Genauigkeit zu erhalten [Eno13a].

6. Zusammenfassung und Ausblick

Seit der Postulierung durch W. Pauli und E. Fermis Theorie des β -Zerfalls sind Neutrinos Gegenstand intensiver, weltweiter Forschung. Durch den Nachweis von Neutrinooszillationen konnte gezeigt werden, dass sie eine von Null verschiedene Ruhemasse besitzen müssen. Die Bestimmung der Masse ist von entscheidender Bedeutung, ist sie doch beispielsweise ein wichtiger Parameter in der Kosmologie, um die Entstehung und Entwicklung des Universums verstehen zu können. Allerdings liefern sowohl Oszillationsexperimente, als auch kosmologische Beobachtungsmethoden nur indirekte Hinweise auf die tatsächliche Massenskala. Zudem sind kosmologische Ansätze stark vom verwendeten kosmologischen Modell abhängig, wodurch eine Bestimmung zusätzlich erschwert wird. Entsprechend sind modellunabhängige Methoden der Neutrinomassenmessung von großem Interesse.

Das KATRIN-Experiment hat dabei die direkte und modellunabhängige Bestimmung der Neutrinomasse zum Ziel, indem es den Endpunkt des Tritium- β -Spektrums mit hoher Präzision untersucht. Die Sensitivität der Vorläuferexperimente in Mainz und Troitsk wird dabei um eine Größenordnung übertroffen und liegt bei 0,2 eV (90% CL). Das dafür zum Einsatz kommende MAC-E-Filterssystem des Hauptspektrometers bedarf präziser elektromagnetischer Feldeinstellungen, um Signalelektronen von Untergrundelektronen selektieren und sie dem Detektor zuführen zu können.

Im Verlauf dieser Arbeit wurden Programme zur Optimierung dieser Feldkonfigurationen entwickelt und erweitert. Hauptbestandteil ist dabei Die KTrAP Software, welche die Luftspulenströme zur Feinformung und Justierung des magnetischen Flusschlauches den Transmissionsbedingungen entsprechend optimiert. Der Benutzer kann dazu verschiedene Kriterien und ihre Gewichtung seinen Anforderungen entsprechend festlegen, sowie die Wahl der Optimierungsroutine treffen. Die implementierten Routinen wurden miteinander verglichen und ihre Ergebnisse kamen im Rahmen der ersten gemeinsamen Inbetriebnahme aus Spektrometer und Detektor zum Einsatz. Dort hat sich gezeigt, dass sie die in der Theorie (Simulation) an sie gestellten Anforderungen auch in der Anwendung (Experiment) leisten können.

Im Laufe der Inbetriebnahmemessungen wurden unter Verwendung einer Elektronenkanone (E-gun) als Quelle zum einen der Einfluss unterschiedlicher Spulenströme des Erdmagnetfeldkompensationssystems (EMCS) auf das Verhalten des magnetischen Flusschlauches untersucht und mit Simulationen verglichen. Die Resultate zeigten eine zusätzliche Abweichung der E-gun im Vergleich zum Spektrometer- Detektorsystem, was auf einen Ver-

satz bei der Positionierung schließen lässt. Durchgeführte Simulationen kamen bei Betrachtung der Pixelauflösung auf eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen, wiesen jedoch bei höheren Auflösungen (Sub-Pixel-Bereich) und starken Änderungen der EMCS-Einstellungen größere Abweichung auf. Dahingehend bedarf es weiterer Untersuchungen des Magnetfeldes in diesen Bereichen, sowie weiterer Anpassungen der Kassiopeia-Software was Implementierung der E-gun-Geometrie und Verkippung der Solenoide betrifft.

Des Weiteren war man in der Lage unter Verwendung der E-gun eine große Elektronenrate zu produzieren, um so das entsprechende Verhalten des Detektors zu untersuchen. Der Vorteil von Messungen bei hohen Raten ist die Reduktion der Messzeit bei gleichzeitig steigender statistischer Genauigkeit, die insbesondere bei Transmissionsfunktionsmessungen, aus denen die Eigenschaften des Spektrometers bestimmt werden, von entscheidender Bedeutung sind. Die auftretende Problematik des Detektors bei der Handhabung dieser Raten wurde dargelegt und das Verhalten bei Durchführung der Messungen konnte reproduziert werden. Auch diese Resultate wurden softwareseitig mit Hilfe von Simulationen mit Kassiopeia und DRIPS untersucht. Sie konnten die Ergebnisse jedoch nur qualitativ reproduzieren. Mögliche Gründe sowie Verbesserungen der Software wurden ebenso genannt wie geplante Hardware-Upgrades des Detektors, um dessen Effizienz bei hohen Raten zu verbessern.

Die zurzeit laufende zweite Phase des SDS Commissioning mit Hochspannung wird weitergehende Erkenntnisse über das Zusammenspiel aus Hauptspektrometer und Detektor liefern. Gleichzeitig wird man nähere Angaben bzgl. der Transmissions- und Untergrundeigenschaften treffen können. Die im Anschluss stattfindende "Wiederbelüftung" des Systems wird Zeit geben, notwendige Verbesserungen an der Hardware vorzunehmen und die gewonnenen Erkenntnisse in weitere Simulationen einfließen zu lassen.

Literaturverzeichnis

- [A⁺13] P.A.R. Ade *et al.*: *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*. 2013.
- [All96] A. Allisy: *Henri Becquerel: The Discovery of Radioactivity*. Radiation Protection Dosimetry, 68(1-2):3–10, 1996. <http://rpd.oxfordjournals.org/content/68/1-2/3.abstract>.
- [Bar10] J. Barrett: *Embedded Runge-Kutta Steppers for KMath*. Internes KATRIN-Dokument, 2010. fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/216568/EmbeddedRungeKutta-JBarrett.pdf.
- [Bar12] J. Barrett: *Status of the Fast Fourier Transform on multipoles (FFTM) field calculation method*. 23. KATRIN Kollaborationsmeeting, Oktober 2012. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d751478/95-TRP-5356-E2-JBarrettj.pdf>.
- [BBC⁺10] M. Babutzka, J. Barrett, T.J. Corona, J. Formaggio, D. Furse, F. Glück, M. Hötzel, W. Käfer, B. Leiber, S. Mertens, N.S. Oblath, P. Renschler, S. Vöcking, N. Wandkowsky und M. Zacher: *The Comprehensive Guide to Kassiopeia*, 2010. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d671456/Kassiopeia%20User%20Guide.pdf>.
- [BBC⁺13] J. Barrett, J. Behrens, T.J. Corona, S. Enomoto, D. Furse, S. Groh, M. Haag und N. Wandkowsky: *Simulation and Analysis Software Package Kasper - Status Report*. 24. KATRIN Kollaborationsmeeting, März 2013. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d775012/95-TRP-5455-S7-Kasper-Team.pdf>.
- [Bor13] Borexino Collaboration: *Measurement of geo-neutrinos from 1353 days of Borexino*. Physics Letters B, 722(4 - 5):295 – 300, 2013, ISSN 0370-2693. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313003092>.
- [BPT80] G. Beamson, H. Q. Porter und D. W. Turner: *The collimating and magnifying properties of a superconducting field photoelectron spectrometer*. Journal of Physics E: Scientific Instruments, 13(1):64, 1980. <http://stacks.iop.org/0022-3735/13/i=1/a=018>.
- [CDRD⁺98] Bruce T. Cleveland, Timothy Daily, Jr. Raymond Davis, James R. Distel, Kenneth Lande, C. K. Lee, Paul S. Wildenhain und Jack Ullman: *Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector*. The Astrophysical Journal, 496(1):505, 1998. <http://stacks.iop.org/0004-637X/496/i=1/a=505>.
- [Cha32] J. Chadwick: *The Existence of a Neutron*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 136(830):692–708, 1932. <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/136/830/692.short>.

- [Cod65] W.J. Cody: *Chebyshev approximations for the complete elliptic integrals K and E*. Mathematics of Computations, 19:105–112, 1965. <http://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-089/S0025-5718-1965-0171370-4/>.
- [Cor09] T.J. Corona: *Tool for Electromagnetic Field Simulation in the KATRIN Experiment*. Diplomarbeit, MIT, 2009. <http://www.katrin.kit.edu/publikationen/mth-corona.pdf>.
- [Cor13] T.J. Corona: *Fully Three-Dimensional Electrostatic Simulations of the Main Spectrometer*. 24. KATRIN Kollaborationsmeeting, März 2013. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/774166/95-TRP-5453-S5-TJCorona.pdf>.
- [CRH⁺56] C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse und A. D. McGuire: *Detection of the Free Neutrino: a Confirmation*. Science, 124(3212):103–104, 1956. <http://www.sciencemag.org/content/124/3212/103.short>.
- [Day12] Daya Bay Collaboration: *Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay*. Phys. Rev. Lett., 108:171803, Apr 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.171803>.
- [DES] Deutsches Elektronen Synchrotron DESY. http://www.weltmaschine.de/physik/hintergrundinformationen_das_higgs_teilchen/.
- [DGG⁺62] G. Danby, J M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz und J. Steinberger: *Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos*. Phys. Rev. Lett., 9:36–44, Jul 1962. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.9.36>.
- [DGL⁺13] Guido Drexlin, Ferenc Glück, Benjamin Leiber, Susanne Mertens, Alexander Osipowicz, Jan Reich und Nancy Wandkowsky: *Electromagnetic design of the large-volume air coil system of the KATRIN experiment*. New Journal of Physics, 15(8):083025, 2013. <http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=8/a=083025>.
- [DON01] DONUT Collaboration: *Observation of tau neutrino interactions*. Physics Letters B, 504(3):218 – 224, 2001, ISSN 0370-2693. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301003070>.
- [Dou12] Double Chooz Collaboration: *Reactor $\bar{\nu}_e$ disappearance in the Double Chooz experiment*. Phys. Rev. D, 86:052008, Sep 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.052008>.
- [Dre13] G. Drexlin: *Astroteilchenphysik II*. Vorlesung, 2013. https://neutrino.ikp.kit.edu/personal/drexlin/data/_uploaded/file/ATP2/AT16.pdf.
- [Ein05] A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt [AdP 17, 132 (1905)]*. Annalen der Physik, 14(S1):164–181, 2005, ISSN 1521-3889. <http://dx.doi.org/10.1002/andp.200590004>.
- [Eno13a] S. Enomoto: *Detector DAQ FPGA Upgrade for High - Rate Measurements*. 24. KATRIN Kollaborationsmeeting, März 2013. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d774818/95-TRP-5448-D2-SEnomoto.pdf>.
- [Eno13b] S. Enomoto: *DRIPS - Detetctor Electronics Simulation Tool for High-Rate Measurement*. 24. KATRIN Kollaborationsmeeting, März 2013. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d774619/95-TRP-5439-C1-SEnomoto.pdf> eintragen.

- [EO66] J.E. Everett und J.E. Osemeikhian: *Spherical coils for uniform magnetic fields*. Journal of Scientific Instruments, 43(7):470, 1966. <http://stacks.iop.org/0950-7671/43/i=7/a=311>.
- [Fau12] J. Faust: *Predictor Corrector Methods*. Interenes KATRIN-Dokument, 2012. fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/216568/Predictor%20Corrector%20Methods.doc.
- [Fer34] E. Fermi: *Versuch einer Theorie der β -Strahlen. I*. Zeitschrift für Physik, 88(3-4):161–177, 1934, ISSN 0044-3328. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01351864>.
- [FG⁺13] D. Furse, S. Groh *et al.*: *Kassiopeia: A Modern, Extensible C++ Particle Tracking Package*. in Vorbereitung, 2013.
- [FLC⁺12] J.A. Formaggio, P. Lazic, T.J. Corona, H. Stefancic, H. Abraham und F. Glück: *Solving For Micro- And Macro-Scale Electrostatic Configurations Using The Robin Hood Algorithm*. Progress in Electromagnetics Research B, 39:1–37, 2012. <http://www.jpier.org/PIERB/pier.php?paper=11112106>.
- [FLM⁺12] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo und A. M. Rotunno: *Global analysis of neutrino masses, mixings, and phases: Entering the era of leptonic CP violation searches*. Phys. Rev. D, 86:013012, Jul 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.013012>.
- [Fuj88] M. Fujita: *The coil design of the superconducting MRI magnet*. Magnetics, IEEE Transactions on, 24(6):2907–2909, 1988, ISSN 0018-9464.
- [GER13a] GERDA Collaboration: *The Gerda experiment for the search of $0\nu\beta\beta$ decay in 76Ge* . The European Physical Journal C, 73(3):1–29, 2013, ISSN 1434-6044. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2330-0>.
- [GER13b] GERDA Collaboration: *Results on neutrinoless double beta decay of 76Ge from Gerda Phase I*. 2013. http://www.mpi-hd.mpg.de/gerda/public/2013/draft_0nbb.pdf.
- [GGS58] M. Goldhaber, L. Grodzins und A. W. Sunyar: *Helicity of Neutrinos*. Phys. Rev., 109:1015–1017, Feb 1958. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1015>.
- [Glü06a] F. Glück: *Code-Sammlung zur Berechnung elektrischer Felder*, 2006. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/216563>.
- [Glü06b] F. Glück: *Code-Sammlung zur Berechnung magnetischer Felder*, 2006. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/216558>.
- [Glü08] F. Glück: *Runge-Kutta method for numerical solution of differential equation system*, 2008. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d479152/rungekutta.pdf>.
- [Glü11a] F. Glück: *Axisymmetric Electric Field Calculation with Zonal Harmonic Expansion*. Progress in Electromagnetics Research B, 32:319–350, 2011. <http://www.jpier.org/PIERB/pier.php?paper=11042106>.
- [Glü11b] F. Glück: *Axisymmetric Magnetic Field Calculation with Zonal Harmonic Expansion*. Progress in Electromagnetics Research B, 32:351–388, 2011. <http://www.jpier.org/PIERB/pier.php?paper=11042108>.
- [Glü12] F. Glück: *LFCS air coil current set computations by mathematical optimization*. 23. KATRIN Kollaborationsmeeting, Oktober 2012. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/751346/95-TRP-5357-E2-FGlueck.pptx>.

- [GMO⁺09] F. Glück, S. Mertens, A. Osipowicz, P. Plischke, J. Reich und N. Wandkowsky: *Air Coil System & Magnetic Field Sensor System*. Technischer Bericht, KIT, März 2009. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d530439/Air%20Coil%20System%20and%20Magnetic%20Field%20Sensor%20System.pdf>.
- [Gol95] D. Goldmann: *Untersuchung systematischer Streueffekte auf das Beta-Spektrum im Mainzer Neutrino Ruhemassenerperiment*. Diplomarbeit, Universität Mainz, 1995.
- [Gre05] P. Gregory: *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica Support*. Cambridge University Press, 2005.
- [Gro10] S. Groh: *Untersuchung von UV-Laser induziertem Untergrund am KATRIN Vorspektrometer*. Diplomarbeit, KIT, 2010. <http://www.katrin.kit.edu/publikationen/dth-groh.pdf>.
- [Har12] F. Harms: *Assembly and First Results of the KATRIN Focal-Plane Detector System at KIT*. Diplomarbeit, KIT, 2012. http://www.katrin.kit.edu/publikationen/dth_Fabian_Harms.pdf.
- [HBJ⁺13] V. Hannen, S. Bauer, L. Josten, H. W. Ortjohann, C. Weinheimer und M. Zboril Winzen, D. M. Zacher: *Main Spectrometer Electron-Gun Specification*. Internes Dokument, Universität Münster, 2013. https://nuserv.uni-muenster.de/websvn/filedetails.php?repname=KATRIN&path=%2FSDS_commissioning%2FComponentDocumentation%2FEgun%2Fegun_documentation.pdf.
- [HK10] Francis Halzen und Spencer R. Klein: *Invited Review Article: IceCube: An instrument for neutrino astronomy*. Review of Scientific Instruments, 81(8):081101, 2010. <http://link.aip.org/link/?RSI/81/081101/1>.
- [Höt12] M. Hötzel: *Simulation and analysis of source-related effects for KATRIN*. Dissertation, KIT, 2012. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d775390/phd-hoetzel.pdf>.
- [Hug08] K. Hugenberg: *Design of the electrode system of the KATRIN main spectrometer*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2008. http://www.uni-muenster.de/Physik.KP/AGWeinheimer/theses/Diplom_Karen_Hugenberg.pdf.
- [Jam00] F James: *MINUIT - Function Minimization and Error Analysis*. CERN, 2000. <http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/minmain.html>.
- [KAT] KATRIN Collaboration: *KATRIN Homepage*. <http://www.katrin.kit.edu/79.php>.
- [KAT05] KATRIN Collaboration: *KATRIN Design Report 2004*. Technischer Bericht, 2005. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d132786/DesignReport2004-12Jan2005.pdf>.
- [KBB⁺05] Ch. Kraus, B. Bornschein, L. Bornschein, J. Bonn, B. Flatt, A. Kovalik, B. Ostrick, E.W. Otten, J.P. Schall, Th. Thümmeler und Ch. Weinheimer: *Final results from phase II of the Mainz neutrino mass search in tritium β -decay*. The European Physical Journal C - Particles and Fields, 40(4):447–468, 2005, ISSN 1434-6044. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2005-02139-7>.
- [KHKKD01] I. V. Krivosheina, H. L. Harney, H. V. Klapdor-Kleingrothaus und A. Dietz: *Evidence for Neutrinoless Double Beta Decay*. Modern Physics Letters A,

- 16(37):2409–2420, 2001. <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732301005825>.
- [Kir92] Joseph L. Kirschvink: *Uniform magnetic fields and double-wrapped coil systems: Improved techniques for the design of bioelectromagnetic experiments*. *Bioelectromagnetics*, 13(5):401–411, 1992, ISSN 1521-186X. <http://dx.doi.org/10.1002/bem.2250130507>.
- [Kno10] G.F. Knoll: *Radiation Detection and Measurement*. John Wiley & Sons, 4. Auflage, 2010.
- [Lam09] M. Lammers: *Untersuchung der Untergrundrate des KATRIN Vorspektrometers im Bereich hoher Feldstärken*. Diplomarbeit, KIT, 2009. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d578755/dth-lammers.pdf>.
- [Lob02] V.M. Lobashev: *Study of the tritium beta-spectrum in experiment "Troitsk ν -mass"*. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 48(1):123 – 131, 2002, ISSN 0146-6410. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641002001187>.
- [Mei23] Lise Meitner: *Über eine mögliche Deutung des kontinuierlichen β -Strahlenspektrums*. *Zeitschrift für Physik*, 19(1):307–312, 1923, ISSN 0044-3328. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01327566>.
- [Mer12] S. Mertens: *Study of Background Processes in the Electrostatic Spectrometers of the KATRIN Experiment*. Dissertation, KIT, 2012. <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000027058>.
- [Mül02] B. Müller: *Umbau des Mainzer Neutrinomassensexperiments und Untergrunduntersuchungen im Hinblick auf KATRIN*. Diplomarbeit, Universität Mainz, 2002. <http://www-ik.fzk.de/~katrin/publications/documents/dth-mueller.pdf>.
- [NM65] J. A. Nelder und R. Mead: *A Simplex Method for Function Minimization*. *The Computer Journal*, 7(4):308–313, 1965. <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/7/4/308.abstract>.
- [Nuc12] A. Nucciotti: *Neutrino mass calorimetric searches in the {MARE} experiment*. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 229 - 232(0):155 – 159, 2012, ISSN 0920-5632. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563212002423>, <ce:title>Neutrino 2010</ce:title>.
- [OPE10] OPERA Collaboration: *Observation of a first ν -Tau candidate event in the OPERA experiment in the CNGS beam*. *Physics Letters B*, 691:138–145, Juli 2010.
- [Pau30] W. Pauli: *Offener Brief an die Gruppe der Radioaktiven*. Gauvereinstagung in Tübingen, Dezember 1930.
- [Pot13] Geoforschungszentrum Potsdam: *IGRF-Deklinationsrechner*, August 2013. <http://www.gfz-potsdam.de/portal/gfz/Struktur/Departments/Department+2/sec23/service/declinationcalculator>.
- [PTVF07] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling und B.P. Flannery: *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3. Edition 2007.
- [Ren11] P. Renschler: *KESS - A new Monte Carlo simulation code for low-energy electron interactions in silicon detectors*. Dissertation, KIT, 2011. <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000024959>.

- [REN12] RENO Collaboration: *Observation of Reactor Electron Antineutrinos Disappearance in the RENO Experiment*. Phys. Rev. Lett., 108:191802, May 2012. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.191802>.
- [SA+04] M Sisti, C Arnaboldi *et al.*: *New limits from the Milano neutrino mass experiment with thermal microcalorimeters*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 520(1 - 3):125 – 131, 2004, ISSN 0168-9002. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900203031814>, Proceedings of the 10th International Workshop on Low Temperature Detectors.
- [Sch97] N. Schmitz: *Neutrino Physik*. Teubner Verlag, 1997.
- [Sch13] S. Schams: *Data Analysis Tools and Sterile Neutrino Investigations for the KATRIN Experiment*. Diplomarbeit, KIT, 2013.
- [Sci] Department Medical Physics & Applied Radiation Sciences: *Radioisotopes and Radiation Methodology*. Technischer Bericht, McMaster Universität, Ontario, Kanada. <http://www.science.mcmaster.ca/medphys/images/files/courses/4R06/note6.pdf>.
- [SDS12] SDSS Collaboration: *The SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Quasar Target Selection for Data Release Nine*. The Astrophysical Journal Supplement Series, 199(1):3, 2012. <http://stacks.iop.org/0067-0049/199/i=1/a=3>.
- [SN06] I. Sasada und Y. Nakashima: *Planar coil system consisting of three coil pairs for producing a uniform magnetic field*. Journal of Applied Physics, 99(8):08D904, 2006. <http://link.aip.org/link/?JAP/99/08D904/1>.
- [SNO02] SNO Collaboration: *Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*. Phys. Rev. Lett., 89:011301, Jun 2002. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.011301>.
- [Spi05] H. Spieler: *Semiconductor Detector Systems*. Series on Semiconductor Science and Technology. OUP Oxford, 2005, ISBN 9780191523656. http://books.google.de/books?id=yy_ymbccPL8C.
- [Ste07] M. Steidl: *Technical Description of the Focal Plane Detector V1.4*. Technischer Bericht, KIT, 2007. <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d417895/Focal%20plane%20detector%20design%20document.pdf>.
- [Sup98] Super-Kamiokande Collaboration: *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*. Phys. Rev. Lett., 81:1562–1567, Aug 1998. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.1562>.
- [Wan13] N. Wandkowsky: *Study of background and transmission properties of the KATRIN spectrometers*. Dissertation, KIT, 2013.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Standardmodell der Teilchenphysik	3
1.2. Energiespektrum der Neutrinos	5
1.3. Doppelter β -Zerfall	10
2.1. KATRIN Übersicht	12
2.2. Energiespektrum β -Zerfall	13
2.3. MAC-E Filter	15
2.4. Schematische Darstellung WGTS	16
2.5. DPS	17
2.6. CPS	17
2.7. Vor- und Hauptspektrometer	18
2.8. Schematische Darstellung FPD	19
3.1. Modulübersicht Kasper	22
3.2. Magnetische Konvergenzbereiche	25
3.3. Elektrische Konvergenzbereiche	28
3.4. Bahnrechnungsmethoden	31
3.5. Signalverarbeitung DRIPS	33
3.6. Beispiel einer Feldliniensimulation	35
3.7. Beispiel einer Transmissionfunktion	36
4.1. Luftspulensysteme	38
4.2. Flussschlauch ohne Korrektur	38
4.3. Flussschlauch mit Korrektur	38
4.4. Schematische Darstellung EMCS	40
4.5. Transmissionsbedingung - Erste Möglichkeit	44
4.6. Transmissionsbedingung - Zweite Möglichkeit	45
4.7. Transmissionsbedingung - Dritte Möglichkeit	46
4.8. Erstes Optimierungskriterium	47
4.9. Zweites Optimierungskriterium	48
4.10. Drittes Optimierungskriterium	48
4.11. Aufbau eines Simplex	49
4.12. Start des Simplex sowie möglicher Reflexionsschritt	50
4.13. Weitere mögliche Schrittfolgen (Expansion, Kontraktion)	50
4.14. Auftreffpunkte der Feldlinien auf dem FPD-Wafer	55
4.15. Feldlinien im Spektrometer 0,36 mT - Simplex	57
4.16. Feldlinien im Spektrometer 0,36 mT - MCMC	57
4.17. Potentialverlauf - Simplex	58
4.18. Potentialverlauf - MCMC	58
4.19. Magnetfeldstärke - Simplex	59
4.20. Magnetfeldstärke - MCMC	59
4.21. Longitudinalenergie - Simplex	60

4.22. Longitudinalenergie - MCMC	60
4.23. Analysierpunkte - Simplex	61
4.24. Analysierpunkte - MCMC	61
4.25. Feldlinien im Spektrometer 0,48 mT - Simplex	63
4.26. Feldlinien im Spektrometer 0,48 mT - MCMC	63
4.27. Potentialverlauf - Simplex	64
4.28. Potentialverlauf - MCMC	64
4.29. Magnetfeldstärke - Simplex	65
4.30. Magnetfeldstärke - MCMC	65
4.31. Longitudinalenergie - Simplex	66
4.32. Longitudinalenergie - MCMC	66
4.33. Analysierpunkte - Simplex	67
4.34. Analysierpunkte - MCMC	67
5.1. E-gun Aufbau	70
5.2. Transmissionsfunktionen für unterschiedliche Spulenkonfigurationen	72
5.3. Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 50A	74
5.4. Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 25A	75
5.5. Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 0A	76
5.6. Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 70A	77
5.7. Ratenverteilung: EMCS-horz.: 50A ; EMCS-vert.: 50A	78
5.8. Ratenverteilung: EMCS-horz.: 100A ; EMCS-vert.: 50A	78
5.9. Versatz in Abhängigkeit der EMCS Stromstärke	80
5.10. Simulierte Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 50A	81
5.11. Simulierte Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 25A	81
5.12. Simulierte Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 0A	81
5.13. Simulierte Ratenverteilung: EMCS-horz.: 9A ; EMCS-vert.: 70A	82
5.14. Simulierte Ratenverteilung: EMCS-horz.: 50A ; EMCS-vert.: 50A	82
5.15. Simulierte Ratenverteilung: EMCS-horz.: 100A ; EMCS-vert.: 50A	82
5.16. Startzeitverteilung der Elektronen bei unterschiedlichen Raten	84
5.17. Flugzeitverteilung der Elektronen für unterschiedliche Überschussenergien	85
5.18. Pile-up	85
5.19. Trapezförmiger Filter	86
5.20. Tail pile-up	86
5.21. Peak pile-up	87
5.22. Energiespektrum Pile-up	88
5.23. Messungen mit 38° Polarisator	90
5.24. Messungen mit 35° Polarisator	90
5.25. Messungen mit 30° Polarisator	91
5.26. Messungen mit 20° Polarisator	91
5.27. Simulierte Ratenverteilung der 38° Polarisatoreinstellung entsprechend	93
5.28. Simulierte Ratenverteilung der 35° Polarisatoreinstellung entsprechend	93
5.29. Simulierte Ratenverteilung der 30° Polarisatoreinstellung entsprechend	94
5.30. Simulierte Ratenverteilung der 20° Polarisatoreinstellung entsprechend	94
B.1. Schnittpunktsberechnung	109

Tabellenverzeichnis

4.1. LFCS Spulendaten	39
4.2. Einstellungen Solenoide	53
4.3. Einstellungen Elektroden	53
4.4. Stromwerte 0,36 mT	54
4.5. Stromwerte 0,48 mT	54
5.1. Zusammenfassung der Messergebnisse	73
5.2. Zusammenfassung der Simulationsergebnisse	80
5.3. Vergleich zwischen Mess- und Simulationsergebnissen	83
5.4. Übersicht Messparameter	89
5.5. Übersicht Simulationsparameter	92
A.1. Induktivität Luftspulensysteme	107
A.2. Stromwerte 0,69 mT	108
A.3. Stromwerte 0,88 mT	108
B.4. Messphase 1-3	111
B.5. Messphase 4-6	111

Anhang

A. Weitere LFCS Spulenkonfigurationen

Tabelle A.1.: Gemessene Induktivität des LFCS sowie des EMCS. Der Messfehler liegt bei $\pm 0,5$ in letzter signifikanter Stelle.

Luftspule	Induktivität mit Netzteil (μH)		Induktivität ohne Netzteil (μH)	
	100 Hz	1kHz	100Hz	1kHz
LFCS 1	440	1,7	930	790
LFCS 2	440	1,7	1045	902
LFCS 3	153	0,6	330	287
LFCS 4	143	0,7	319	272
LFCS 5	152	0,6	332	283
LFCS 6	144	0,7	337	289
LFCS 7	144	0,6	332	284
LFCS 8	147	0,6	292	242
LFCS 9	154	0,6	331	282
LFCS 10	156	0,6	341	292
LFCS 11	153	0,6	328	278
LFCS 12	438	1,7	927	786
LFCS 13	447	1,8	1064	920
LFCS 14	1503	9,8	1930	1650
EMCS-x (horz.)	383	1,7	500	384
EMCS-y (vert.)	786	10	800	636

Die Induktivität der Luftspulen beider Systeme (LFCS+EMCS) wurde mit Hilfe eines digitalen Multimeters gemessen. Jede Spule wurde bei den Frequenzen 100 Hz und 1 kHz je einmal verbunden mit dem Netzteil und einmal getrennt vom Netzteil gemessen. Die resultierenden Werte sind in Tabelle A.1 aufgelistet. Testweise wurde untersucht ob die Induktivität einer Spule vom Zustand der Nachbarspule (offen/geschlossen) abhängt, was nicht der Fall war.

Tabelle A.2.: Startparameter und resultierende Ströme der Optimierung für den Simplex-Algorithmus (**links**), sowie die Markov Chain Monte Carlo (**rechts**). Die Werte entsprechen der $B = 0,69$ mT Konfiguration. Zu beachten ist die umgekehrte Polung der 14. Luftspule.

Luftspule	I_{start} (A)	$I_{\text{opt.,Simplex}}$ (A)	$I_{\text{opt.,MCMC}}$ (A)
1	59	56.7	60.4
2	57	68.0	62.0
3	55	73.2	57.6
4	57	65.1	53.4
5	72	55.0	78.8
6	75	72.5	75.0
7	75	82.5	76.2
8	73	64.1	73.6
9	72	74.6	69.8
10	71	57.0	67.0
11	69	72.5	71.9
12	67	59.6	70.3
13	66	90.2	73.7
14a+b	-55	-52.7	-59.4

Tabelle A.3.: Startparameter und resultierende Ströme der Optimierung für den Simplex-Algorithmus (**links**), sowie die Markov Chain Monte Carlo (**rechts**). Die Werte entsprechen der $B = 0,88$ mT Konfiguration. Zu beachten ist die umgekehrte Polung der 14. Luftspule.

Luftspule	I_{start} (A)	$I_{\text{opt.,Simplex}}$ (A)	$I_{\text{opt.,MCMC}}$ (A)
1	76	95.2	86.2
2	74	99.8	78.6
3	72	48.9	81.7
4	74	98.8	79.4
5	89	100.0	99.8
6	92	74.0	96.4
7	92	98.2	92.3
8	95	96.6	96.9
9	88	80.9	89.9
10	88	90.4	83.1
11	86	61.3	96.6
12	84	99.0	90.4
13	83	97.6	91.9
14a+b	-65	-36.2	-50.8

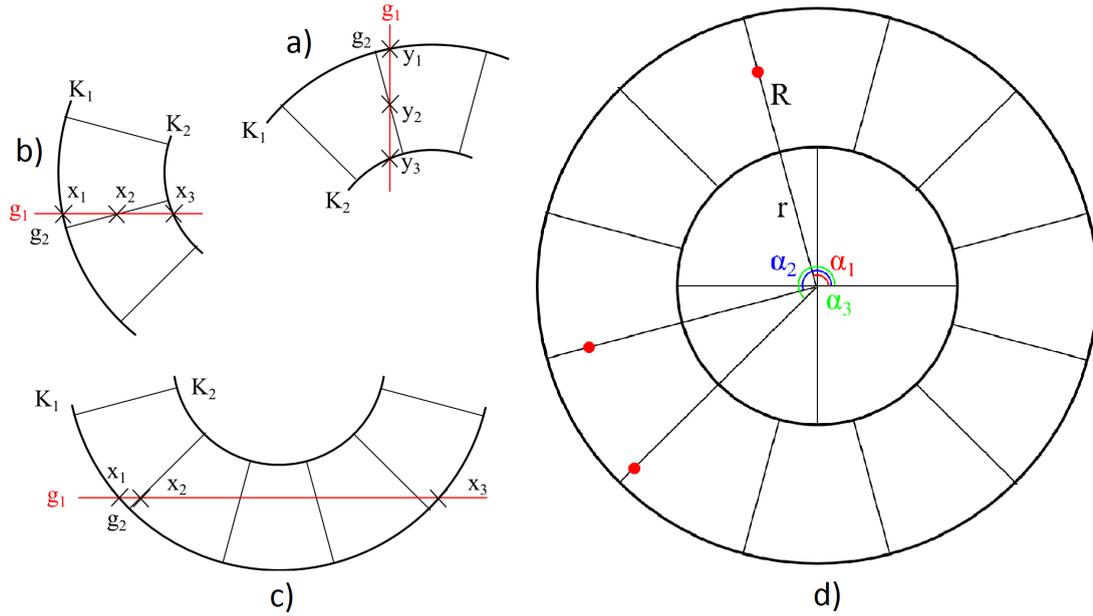


Abbildung B.1.: Berechnung der Schnittpunkte im Fall einer senkrechten Fahrt der E-gun (a) sowie für den Fall einer waagerechten Fahrt (b). Abbildung (c) zeigt den Spezialfall, sofern kein zweiter Kreis K_2 durch die Gerade g_1 geschnitten wird. In Abbildung (d) ist das "bullseye" sowie der erste Ring als Übersicht mit den Radien und Winkeln dargestellt.

B. Schnittpunktberechnung auf Basis des Ratenverhältnisses benachbarter Pixel

Ziel dieser Methode ist es den Schnittpunkt der Pixelgrenze und der E-Gun-Achse mit Hilfe des Ratenverhältnisses der angesprochenen benachbarten Pixel zu bestimmen. Dieses Vorgehen führt man für die senkrechte und waagerechte E-gun-Achse durch und erhält als Ergebnis den Schnittpunkt des Kreuzes, welches als Referenzpunkt für die Verschiebung dient.

Zunächst muss angenommen werden, dass die Elektronenrate sowie die Geschwindigkeit der E-gun während des Scan-Vorgangs konstant ist. Des Weiteren ist es erforderlich, dass die E-gun eine Gerade abfährt, was mit Hilfe eines Theodoliten bestätigt wurde. Abbildung B.1(d) dient als Übersicht und zeigt des "bullseye" sowie den ersten Ring mit den jeweiligen Radien und Winkeln. Anhand dessen werden die verschiedenen Fälle der Berechnung dargestellt.

Senkrechter Fall

Gestartet wird mit dem senkrechten Fall, was Bild B.1(a) entspricht. Gegeben sind die beiden Kreise K_1 mit Radius R , sowie K_2 mit Radius r . Sie können durch die Kreisgleichungen

$$K_1 : x^2 + y^2 = R^2, \quad (6.1)$$

$$K_2 : x^2 + y^2 = r^2 \quad (6.2)$$

beschrieben werden. Die Pixelgrenze wird durch die Ursprungsgerade mit der Gleichung

$$g_2 : y = \tan(\alpha_1), \quad (6.3)$$

die E-gun Strahlachse durch die konstante Gerade

$$g_1 : x = c \quad (6.4)$$

definiert.

Das bekannte Verhältnis der Raten zwischen zwei Pixeln gibt die zurückgelegte Strecke des E-gun-Strahls innerhalb der Pixel an. Demzufolge verhalten sich die Raten wie das Verhältnis der jeweiligen Strecken

$$V = \frac{N_1}{N_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3}, \quad (6.5)$$

wobei N_1 die Elektronenrate in einem Pixel und N_2 die Rate im anderen Pixel beschreibt. In den Tabellen B.4 und B.5 sind die Pixel sowie ihre Raten angegeben. y_1 erhält man aus dem Schnittpunkt des äußeren Kreises K_1 mit der Geraden g_1

$$y_1 = \pm \sqrt{R^2 - c^2}. \quad (6.6)$$

Es wird nur die "+"-Lösung der Wurzel verwendet da sich der Punkt im positiven y-Bereich befindet. Die "-"-Lösung wird für die Bestimmung des entgegengesetzten Punktes im negativen y-Bereich benötigt. y_2 erhalten wir auf die gleiche Art und Weise aus dem Schnittpunkt des inneren Kreises K_2 mit der Geraden g_1

$$y_2 = \pm \sqrt{r^2 - c^2}. \quad (6.7)$$

y_3 erhalten wir schließlich aus dem Schnitt der Geraden g_1 und g_2

$$y_3 = \tan(\alpha_1)c. \quad (6.8)$$

Eingesetzt in Gleichung 6.5 erhält man

$$V = \frac{\sqrt{R^2 - c^2} - \tan(\alpha_1)c}{\tan(\alpha_1) - \sqrt{r^2 - c^2}}. \quad (6.9)$$

Das Verhältnis ist ebenso wie die beiden Radien und der Winkel bekannt, wodurch sich c berechnen lässt.

Waagerechter Fall

In Abbildung B.1(b) ist der waagerechte Fall dargestellt. Der Unterschied zum senkrechten Fall beschränkt sich auf die Verwendung der x-Koordinaten anstelle der y-Koordinaten. Die Kreisgleichungen ändern sich nicht, während die Abhängigkeit der beiden Geraden

$$g_2 : x = \frac{1}{\tan(\alpha_2)} = \cot(\alpha_2) \quad (6.10)$$

und

$$g_1 : y = c. \quad (6.11)$$

angepasst werden. Das Verhältnis ergibt sich entsprechend zu

$$V = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{-\sqrt{R^2 - c^2} - \cot(\alpha_2)c}{\cot(\alpha_2)c + \sqrt{r^2 - c^2}}. \quad (6.12)$$

Hier musste die "-"-Lösung der Kreisgleichung angewendet werden, da sich dieser Schnittpunkt im negativen x-Bereich befindet.

In Messphase 4 tritt eine abweichende Situation im waagerechten Fall auf, die in Abbildung B.1(c) dargestellt ist. Aufgrund der Verschiebung des Flussschlauches schneidet die Gerade g_1 nicht mehr den inneren Kreis K_2 wodurch die eben beschriebene Bestimmung von c nicht erfolgen kann.

Tabelle B.4.: Verwendete Pixel sowie ihre Rate für die Schnittpunktberechnung der ersten drei Messphasen

Messphase 1			Messphase 2			Messphase 3		
Achse	Pixel-Nr.	Rate	Achse	Pixel-Nr.	Rate	Achse	Pixel-Nr.	Rate
vert.	7	33949	vert.	7	30558	vert.	7	29112
vert.	8	52428	vert.	8	58864	vert.	8	61335
vert.	12	63809	vert.	12	72420	vert.	12	77400
vert.	13	17435	vert.	13	16252	vert.	13	15057
horz.	10	14503	horz.	33	15280	horz.	19	13798
horz.	11	31911	horz.	34	10251	horz.	20	37455
horz.	4	3564	horz.	28	25606	horz.	17	39183
horz.	15	41329	horz.	29	29	horz.	18	11183

Tabelle B.5.: Verwendete Pixel sowie ihre Rate für die Schnittpunktberechnung der letzten drei Messphasen

Messphase 4			Messphase 5			Messphase 6		
Achse	Pixel-Nr.	Rate	Achse	Pixel-Nr.	Rate	Achse	Pixel-Nr.	Rate
vert.	7	41168	vert.	5	8809	vert.	29	51642
vert.	8	57055	vert.	6	103386	vert.	30	21494
vert.	12	72776	vert.	14	105849	vert.	38	43081
vert.	13	21630	vert.	15	3282	vert.	39	27607
horz.	130	13117	horz.	10	19032	horz.	10	25493
horz.	131	1722	horz.	11	32153	horz.	11	31921
horz.	11	4757	horz.	4	6959	horz.	4	10741
horz.	12	45653	horz.	15	43214	horz.	15	37257
horz.	13	33765	horz.			horz.		
horz.	14	50671	horz.			horz.		

Stattdessen werden beide Schnittpunkte x_1 und x_3 des Kreises K_1 mit der Geraden g_1 verwendet. Der Schnittpunkt x_2 zwischen g_1 und g_2 kann wie im normalen waagerechten Fall berechnet werden. Als Ratenverhältnis ergibt sich damit

$$V = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{-\sqrt{R^2 - c^2} - \cot(\alpha_3)c}{\cot(\alpha_3) - \sqrt{R^2 - c^2}}. \quad (6.13)$$

Aufgrund der Verwendung mehrerer Pixel für die Strecke $x_2 - x_3$ führt die Annahme einer Geraden zu einer größeren Fehleranfälligkeit, die sich im Ergebnis der vierten Messphase, durch eine Gerade mit positiver Steigung, äußert.

Bis auf die abweichende Methode der vierten Messphase, erfolgte die Bestimmung der restlichen Schnittpunkte auf die gleiche Art. Die verwendeten Pixel und ihre jeweiligen Raten, sind in den Tabellen B.4 und B.5 protokolliert.

Danksagung

Zum Schluss möchte ich meinen Dank gegenüber denjenigen ausdrücken, die ihren Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere

- Prof. Dr. Guido Drexlin für die gute Betreuung und die Möglichkeit die Diplomarbeit im Rahmen von KATRIN durchzuführen zu können,
- Prof. Dr. Ulrich Husemann für die Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats,
- Dr. Ferenc Glück für die Beantwortung meiner zahllosen Fragen und die Unterstützung bei der Magnetfeldoptimierung,
- Dr. Nancy Wandkowsky und Stefan Groh für die tolle Betreuung der Arbeit und die geduldige Hilfestellung bei unzähligen Fragen insbesondere zu Kassiopia, KTrAP und sonstigen physikalischen und programmiertechnischen Problemen,
- meinen Diplomanden-Kollegen Philipp Rovedo, Nikolaus Trost und Sebastian Schams für das tolle und freundschaftliche Miteinander,
- Marco Antoni und Andreas Müller für das super Büroklima, die gegenseitige Unterstützung und die unzähligen Diskussionen und Geschichten auch abseits der Physik,
- Johannes Schwarz und Fabian Harms für die Beantwortung aller Fragen rund um das Detektorsystem,
- Moritz Erhard, Marcel Kraus, Alexander Jansen und Daniel Hilke für den netten Umgang mit Diplomanden;-),
- Marco Haag für die Unterstützung bei allen Fragen rund um Kasper,
- Benjamin Leiber für die Hilfestellung in Bezug auf Kalinka und die großzügige Erhöhung meiner Quota:-),
- Frau Pawlowski für die Hilfe bei allen organisatorischen Angelegenheiten,
- Thomas Csabo für die Bereitstellung der Computerhardware und die zügige Hilfestellung bei Problemen,
- sowie allen namentlich und nicht-namentlich genannten Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern, nicht nur von KATRIN, für die tolle und angenehme Arbeitsatmosphäre die dieses Jahr geprägt hat.

Der größte Dank gilt jedoch meiner ganzen Familie, die mich immer bestmöglich unterstützt hat! Ohne Sie wäre mir mein Studium nicht möglich gewesen!