

Optimierung der Feld- und Potentialberechnungen für das Drahtelektrodensystem des KATRIN-Hauptspektrometers

Diplomarbeit
von

Sarah Schnetzer

An der Fakultät für Physik
Institut für experimentelle Kernphysik IEKP
Karlsruher Institut für Technologie

Erstgutachter:	Prof. Dr. Guido Drexlin
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Wim de Boer
Betreuender Mitarbeiter:	Dr. Ferenc Glück

Bearbeitungszeit: 01. August 2010 – 30. August 2011

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, den 29. August 2011
Sarah Schnetzer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Neutrinos im Standardmodell	3
1.1.1. Neutrinoreaktionen	3
1.1.2. Entstehung von Neutrinos in der Sonne	4
1.2. Hinweise für eine Neutrino-Masse ungleich Null	4
1.2.1. Anomalie der atmosphärischen Neutrinos	5
1.2.2. Das solare Neutrino Problem	5
1.3. Neutrino-Oszillationen	5
1.3.1. Lösung des solaren Neutrino-Problems	6
1.3.2. Bestimmung der Oszillationsparameter	6
1.4. Messung der Neutrino-Masse	8
1.4.1. Indirekte Bestimmung der Neutrino-Masse	8
1.4.2. Direkte Bestimmung der Neutrino-Masse	10
2. KATRIN: Das KARlsruhe TRItium Neutrino Experiment	13
2.1. Die Quelle	13
2.1.1. Das Rear-System	14
2.2. Die Transportsektion	14
2.3. Der Detektor	15
2.4. Die Spektrometer	16
2.4.1. Das Prinzip eines MAC-E-Filter	16
2.4.2. Das Hauptspektrometer	18
2.4.3. Das Vorspektrometer	18
2.4.4. Das Monitorspektrometer	19
2.5. Untergrund in MAC-E-Filtern	19
2.5.1. Untergrund durch natürliche Radioaktivität und kosmische Strahlung	20
2.5.2. Tritiumzerfälle im Spektrometer	20
2.5.3. Untergrund durch gefangene Elektronen	20
2.5.4. Untergrund von Wand und Drahtelektroden	21
2.5.5. Die Penning-Falle zwischen Vor- und Hauptspektrometer	21
2.5.6. Penning-Plasma	21
2.6. Die Drahtelektroden	22
3. KASSIOPEIA	25
3.1. Die einzelnen Teile von KASSIOPEIA	25
3.1.1. Teilchen-Generierung	25
3.1.2. Transport	26
3.1.3. Feldberechnungen	27
3.1.4. Detektion	27
3.2. Organisation einer Simulation	27
3.2.1. Benutzer-Eingaben	27
3.2.2. Datenstruktur	29

3.3.	Geometrie	29
3.3.1.	Regionen	30
3.3.2.	Navigation	30
3.3.3.	Erweiterung der Geometrie	32
3.4.	Die Managerstruktur	34
3.5.	Output	35
4.	Berechnungen des elektrischen Potentials und Feldes	37
4.1.	Die Randelementmethode	37
4.2.	Legendre-Polynom-Entwicklung	39
5.	Testanordnung für vereinfachte Simulationen	41
5.1.	Die vereinfachte Geometrie	41
5.2.	Vergleich zwischen Elfield32Ferenc und ELCD33	41
5.2.1.	Punktladungs-Approximation in ELCD33	42
5.3.	Simulationen	42
5.3.1.	Legendre-Polynome und elliptische Integrale	42
5.3.2.	Berechnungen nahe der Drahnte	43
5.3.3.	Untersuchung der Winkelverteilung	45
5.3.4.	Simulation mit der Hauptspektrometer-Geometrie	45
6.	Methoden zur Beschleunigung der Feld- und Potentialberechnungen im Bereich der Drahnte	47
6.1.	die Grundidee	47
6.2.	Tests der elliptischen Integrale für einen Ring aus Punktladungen	48
6.2.1.	exakte Lösung	48
6.2.2.	Die Approximation	49
6.2.3.	Ergebnis	50
6.3.	Approximation für ein Drahtsegment	50
6.3.1.	Potential eines Drahtsegmentes: analytische Lösung	51
6.3.2.	einfache Näherung	51
6.3.3.	Newton-Cotes Näherung	52
6.3.4.	Gauss-Quadratur	52
6.3.5.	elektrisches Feld eines Drahtsegmentes	54
6.4.	Näherung für einen Konus aus Drahtsegmenten	57
6.4.1.	analytische Lösung	58
6.4.2.	Näherung mittels Gauss-Quadratur	58
6.5.	Rechenzeitvergleich	59
7.	Implementierung in KASSIOPEIA, erste Tests und weitere Ideen zur Optimierung der Rechenzeit	63
7.1.	Implementierung der Gauss-Quadratur in KASSIOPEIA	63
7.1.1.	eine neue Klasse: der ELCDRingContainer	64
7.2.	erste Tests mit dem original Drahtsystem	64
7.2.1.	Genauigkeit der implementierten Funktionen	65
7.2.2.	Zeitersparnis	65
7.3.	weitere Ideen zur Optimierung der Rechenzeit	65
7.3.1.	Nahbereich	66
7.3.2.	Fernbereich	66
7.4.	Optimierung für die Haltestruktur	68
8.	Entfernung gespeicherter Elektronen mittels Pin	71
8.1.	Speicherung von Elektronen im Hauptspektrometer	71

8.2. Die Idee zur Nutzung eines Pins	72
8.3. Simulationen	74
8.3.1. Verwendete Geometrien und Felder	74
8.3.2. Der Teilchen-Generator	74
8.3.3. Abbruch-Bedingungen	74
8.4. Auswertung und Ergebnisse	75
8.4.1. Untersuchung der Absorptionsrate	76
8.4.2. Endpositionen	77
8.4.3. Betrachtung der Speicherzeit	77
8.5. Technische Realisierbarkeit	78
8.5.1. Aufbau	79
8.5.2. Zeitverlust	79
8.6. Fazit	79
9. Zusammenfassung und Ausblick	81
Literaturverzeichnis	83
Anhang	87
A. Wertetabellen	87
A.1. Tabellen zu Kapitel 6 und kurzer Überblick zur entworfenen Näherung	87
A.2. Tabellen zu Kapitel 8	91
B. Programm-Code	94

1. Einleitung

Vor 1930 hielt man den radioaktiven Betazerfall für ein Zwei-Körper-Problem, da nur das ausgesandte Elektron beobachtet werden konnte. Nach der Energieerhaltung müsste dieses Elektron eine feste Energie besitzen, jedoch wurde ein kontinuierliches Energie-Spektrum gemessen. Aufgrund dieser Beobachtungen postulierte Wolfgang Pauli ein bis dahin unbekanntes, neutrales Elementarteilchen. Dieses Teilchen würde ebenfalls am Prozess teilnehmen und einen Teil der freiwerdenden Energie übertragen bekommen. Im Jahre 1956 konnte dieses Teilchen, mittlerweile Neutrino genannt, von C.L. Cowan und F.Reines im Poltergeist-Experiment¹ in einem der ersten großen Kernreaktoren, dem Savannah River-Reaktor, über den inversen Beta-Zerfall nachgewiesen werden [Co56]:



In späteren Experimenten wurde durch die beobachteten Neutrino-Oszillationen belegt, dass Neutrinos nicht, wie zuerst angenommen, masselos sind. Seither haben es sich viele Experimente, unter anderem KATRIN, zum Ziel gemacht, die Neutrino-Masse zu bestimmen.

Das KATRIN Experiment strebt eine experimentelle Empfindlichkeit von $<0,2$ eV an. Um mit einer so hohen Präzision messen zu können, ist es von großer Wichtigkeit, den Untergrund im KATRIN Hauptspektrometer zu kennen. Damit die Höhe des Untergrunds schon vor den ersten Messungen abgeschätzt werden kann und um gegebene Ideen zur Untergrundreduzierung schon vorab zu testen, ist die Durchführung von exakten Untergrund-Simulationen notwendig. Eine Untergrundquelle des KATRIN Hauptspektrometers ist die Tankwand des Spektrometers selbst. Durch Wechselwirkung mit kosmischen Myonen können hier Elektronen entstehen, welche, falls sie gespeichert werden sollten, den Untergrund stark erhöhen könnten. Um die Untergrunderhöhung durch diese Elektronen ausreichend genau abschätzen zu können, müssen ihre Teilchenbahnen von der Tankwand an bis ins Innere des Spektrometervolumens simuliert werden. Das Drahtelektrodensystem des Hauptspektrometers stellte bisher ein größeres Problem für diese Simulationen dar, da die Berechnung mittels vorhandener Näherungsmethoden bisher nahe der Elektroden keine ausreichend genauen Ergebnisse liefern konnte. Die analytische Berechnung der einzelnen Drahtelemente wäre hingegen viel zu zeitaufwendig, sodass es kaum möglich wäre eine ausreichend große Anzahl an Teilchen zu simulieren.

¹Da man das Neutrino früher nicht nachweisen konnte wurde es auch oft "Geister-Teilchen" genannt.

Ziel dieser Diplomarbeit war es, Methoden zu entwickeln und zu testen, um die Feld- und Potentialberechnungen für das Drahtelektrodensystem zu optimieren. Die Aufgabe war, eine Approximation zu finden mit welcher die Berechnungen brauchbare Ergebnisse in einer annehmbaren Rechenzeit liefern.

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung über die Geschichte der Neutrinos und verschiedene Möglichkeiten zu ihrer Massenbestimmung. Anschließend folgt in Kapitel 2 die Vorstellung des KATRIN Experiments und seiner verschiedenen Komponenten. Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem KATRIN-eigenen, auf C++- basierendem, Simulationsprogramm namens KASSIOPEIA. Im darauf folgenden Kapitel werden die, für die Simulationen dieser Arbeit, wichtigsten Berechnungsmethoden für das elektrische Feld und Potential präsentiert. Kapitel 4 stellt kurz erste durchgeführte Simulationen vor. Die Tests zur Rechenzeit-optimierung werden dann in Kapitel 5 vorgestellt und anschließend beschreibt Kapitel 6 die Implementierung in KASSIOPEIA. Kapitel 7 stellt Berechnungen zur Untergrundreduktion mittels mechanischen Pins vor. Diese wurden zur Vorbereitung auf die Simulationen dieser Arbeit durchgeführt. Abschließend folgen eine Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse und ein Ausblick.

1.1. Neutrinos im Standardmodell

Masse →	2,4 MeV	1,27 GeV	171,2 GeV	0	γ Photon	
	u up	c charm	t top			
Quarks	4,8 MeV	104 MeV	4,2 GeV		0	g Gluon
	d down	s strange	b bottom			
Leptonen	ν_e Elektron- Neutrino	ν_μ Myon- Neutrino	ν_τ Tau- Neutrino		91,2 GeV	Z^0 schwache Kraft
	0,511 MeV e^- Elektron	105,7 MeV μ^- Myon	1,777 GeV τ^- Tau			
				80,4 GeV	W^\pm schwache Kraft	
					Bosonen	

Abbildung 1.1.: die Elementarteilchen des Standardmodells und ihre Massen. Neutrinos gelten im Standardmodell als masselos, jedoch weisen die beobachtbaren Neutrino-Oszillationen auf eine Neutrinomasse ungleich Null hin. Bisher konnten für die Neutrinomasse jedoch nur Obergrenzen bestimmt werden.

Im Standardmodell der Teilchenphysik (SM) besitzen Neutrinos keine Masse. Sie gehören zu den Leptonen. Es existieren im SM 3 Lepton-Generationen. Diese bestehen aus den negativ geladenen Elektronen, Myonen und Tauonen und den zugehörigen, neutralen Neutrinos. Alle Leptonen besitzen eine schwache Ladung und sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Da Neutrinos keine elektrische Ladung besitzen nehmen sie nur an Prozessen der schwachen Wechselwirkung teil. Dadurch haben sie eine lange Reichweite und ihr Nachweis ist schwierig.

1.1.1. Neutrinoreaktionen

Neutrinos nehmen an drei Arten von Reaktionen teil:

- Elastische Streuung: Neutrino und Lepton tauschen Energie und Impuls aus
- Geladener Strom: Kopplung von Neutrino und seinem Partner über ein geladenes W-Boson. Dies führt zu einer Umwandlung der beteiligten Teilchen.
Bsp.: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
- Neutraler Strom: Kopplung über ein neutrales Z-Boson: Auch hier findet eine Umwandlung der beteiligten Teilchen statt.

Erzeugen lassen sich Neutrinos sehr leicht über den radioaktiven Beta-Zerfall. Dieser tritt bei instabilen Kernen auf und benötigt keine Anregung durch andere Teilchen. Bei Kernen mit einem Überschuss an Neutronen tritt häufig der sogenannte Beta-minus-Zerfall auf:



Hierbei wird ein Neutron in ein Proton umgewandelt. Gibt es einen Protonen-Überschuss im Kern kann, es zum Beta-plus-Zerfall kommen. Hierbei wird ein Proton in ein Neutron umgewandelt:

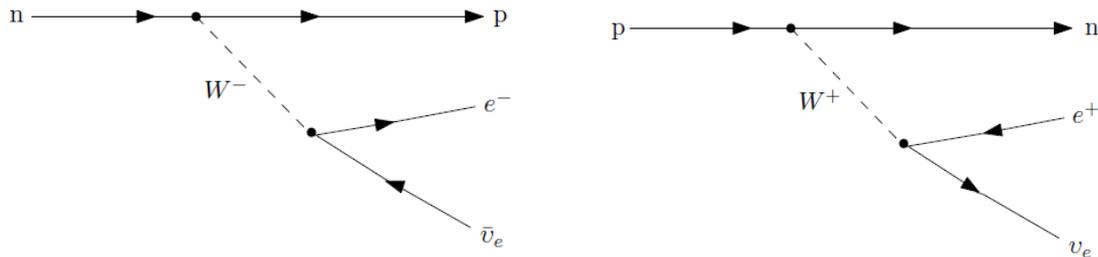
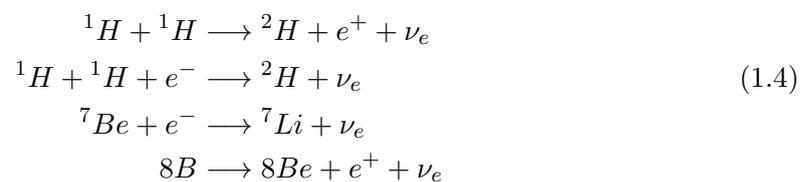


Abbildung 1.2.: Die Feynmann-Diagramme der β -Zerfälle: *links*: β^- -Zerfall *rechts*: β^+ -Zerfall.

Weitere Neutrino-Quellen sind Kernreaktionen, zum Beispiel in der Sonne oder in Reaktoren. Beobachtungen der solaren Neutrinos führten auch dazu, dass die Neutrino-Oszillationen und somit der Beweis für eine Neutrinomasse ungleich Null entdeckt wurden.

1.1.2. Entstehung von Neutrinos in der Sonne

Bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium im Inneren der Sonne entstehen Elektron-Neutrinos. Da sie ungeladen sind und nur an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen, besitzen sie einen kleinen Wirkungsquerschnitt und verlassen die Sonne quasi ungehindert. So benötigt ein im Inneren der Sonne entstehendes Photon ca. 1000 Jahre bis es die Sonnenoberfläche erreicht, während ein Neutrino nur wenige Sekunden benötigt. Es entstehen in der Sonne bei vier Reaktionen des pp-Zyklus Elektron-Neutrinos:



1.2. Hinweise für eine Neutrinomasse ungleich Null

Sowohl Experimente mit atmosphärischen, als auch mit solaren Neutrinos zeigten große Diskrepanzen zwischen erwarteter und gemessener Neutrinozahl. Eine mögliche Erklärung für diese Diskrepanzen war die sogenannte Neutrino-Oszillation. Diese wurde 1957 von Bruno Pontecorvo theoretisch vorhergesagt und beschreibt die Umwandlung zwischen Elektron-, Myon- und Tauoneutrinos aufgrund quantenmechanischer Prozesse. Ein Neutrino wird mit einem dieser drei Flavour erzeugt, kann aber bei einer späteren Quantenmessung einen anderen Flavour haben. Man spricht von Neutrino-Oszillation, weil sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Flavour periodisch mit der Ausbreitung des Neutrinos ändern. Voraussetzung für diese Oszillationen ist jedoch, dass Neutrinos eine von Null verschiedene Masse besitzen.

1.2.1. Anomalie der atmosphärischen Neutrinos

Wechselwirkt kosmische Strahlung mit Atomkernen in der Erdatmosphäre entstehen atmosphärische Neutrinos. Bisher haben mehrere Experimente Flussmessungen für Myon- und Elektron-Neutrinos mit Richtungsabhängigkeit durchgeführt: Kamiokande [H+88] benutzte für seine Messungen eine Wasser-Cherenkov-Detektor, Soudan2 [A+97], Frejus [B+89] und NUSEX [B+82] arbeiteten mit Kalorimetern. Bestimmt wurde die Rate $r = N(\nu_\mu)/N(\nu_e)$ in Abhängigkeit von Zenitwinkel. $N(\nu_\mu)$ ist die Anzahl der gemessenen Myon-Neutrinos, $N(\nu_e)$ die der gemessenen Elektron-Neutrinos. Gemessen wurden sowohl von oben, also direkt aus der Atmosphäre, als auch von unten kommende Neutrinos. Diese mussten bis zum Erreichen des Detektors einen wesentlich längeren Weg durch die Erde hindurch zurücklegen. Bei der Betrachtung der Raten r_b (below) und r_a (above) fiel auf, dass r_b wesentlich kleiner war, als r_a [SKG98]. Diese Beobachtung weist darauf hin, dass auf dem Weg durch die Erde Myon-Neutrinos zu Elektron-Neutrinos oszillieren.

1.2.2. Das solare Neutrino Problem

Aus den Gleichungen des Standard-Sonnenmodells (SSM) lässt sich die Leuchtkraft der Sonne in Abhängigkeit von der Anzahl der produzierten Neutrinos bzw. dem Neutrinofluss berechnen. Aus der beobachteten Leuchtkraft der Sonne können also im Gegenzug auch Rückschlüsse über den zu erwartenden Neutrinofluss gezogen werden.

Von 1970 bis 1994 untersuchte Raymond Davis Jr. in der Homestake Mine den solaren Neutrinofluss mittels eines Elektron-Neutrinodetektors [Dav94]. Weitere Experimente zur Messung des solaren Neutrinoflusses in verschiedenen Energiebereichen waren GALLEX [H+99], SAGE [A+02a], Kamiokande und Super-Kamiokande [F+98]. Es sollte überprüft werden, ob der vom Sonnenstandardmodell vorhergesagte Neutrinofluss korrekt ist. Im Experiment wurden nur 50% des erwarteten Signals gemessen. Auch alle weiteren Experimente bestätigten diese Abweichung. Da man annahm, dass das SSM korrekt sei, war die einzige mögliche Erklärung für das Verschwinden der Elektron-Neutrinos ihre Oszillation zu Myon- oder auch zu Tau-Neutrinos.

1.3. Neutrino-Oszillationen

Damit Neutrino-Oszillationen stattfinden können, müssen die drei Neutrinoarten verschiedene Massen besitzen. Außerdem müssen diese Masse-Eigenzustände ungleich der Wechselwirkungszustände, auch Flavour-Zustände genannt, sein. Man erhält die Massen-Eigenzustände durch Linearkombinationen der Flavour-Eigenzustände und umgekehrt:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (1.5)$$

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (1.6)$$

Die drei Flavour-Eigenzustände $|\alpha\rangle$ stehen für das Elektron-, das Myon- und das Tauon-Neutrino, die Masse-Eigenzustände $|i\rangle$ für Neutrinos mit einer festen, definierten Masse. U ist die Maki-Nakagawa-Sakata Matrix. Diese gibt das Mischungsverhältnis zwischen Massen- und Flavour-Eigenzuständen an. Sie ist das Analogon zur CKM-Matrix, welche die Mischungsmatrix der elektroschwachen Wechselwirkung ist.

1.3.1. Lösung des solaren Neutrino-Problems

Bei den Kernreaktionen im Inneren der Sonne entstehen nur Elektron-Neutrinos. Es liegt also zum Zeitpunkt $t=0$ ein reiner Flavourzustand vor. Dieser kann nun folgendermaßen in eine zeitabhängige Form propagieren:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* |\nu_\beta\rangle \quad (1.7)$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeit von Flavor alpha zu flavour beta erhält man im ultrarelativistischen Limes die folgende Übergangsamplitude: [GGN03],[Kay03]

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta(t) | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-\frac{im_i^2 L}{2E}} \right|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die Phase der Oszillation ist gegeben durch $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Weiter ist die Übergangswahrscheinlichkeit abhängig von der Energie E des Neutrinos und von der Oszillationslänge L . Über diese Übergangswahrscheinlichkeit kann man das Verschwinden von Neutrinos eines bestimmten Flavours und das Auftauchen von Neutrinos eines anderen Flavours erklären. So ist es möglich, dass in der Sonne entstandene Elektron-Neutrinos auf dem Weg zur Erde ihren Flavour ändern und daher auf der Erde ein Defizit an Elektron-Neutrinos gemessen werden kann.

1.3.2. Bestimmung der Oszillationsparameter

Eine Reihe von Experimenten beschäftigt sich mit der Beobachtung und Messung der Neutrino-Oszillationen. Durch diese Messungen können die Massendifferenzen zwischen den verschiedenen Neutrinentypen bestimmt werden. Gemessen werden die Massen-Abstands-Quadrate. Die existierenden Experimente arbeiten mit verschiedenen Neutrinos. Super-Kamiokande arbeitet, wie schon das Vorgängerexperiment Kamiokande, mit atmosphärischen Neutrinos. Andere Experimente wie GALLEX, Homestake oder SNO [A+02b] untersuchen die Oszillationen solarer Neutrinos, Double-Chooz [Las06] benutzt Reaktor-neutrinos für seine Messungen. Auch Neutrinos aus Teilchen-Beschleunigern können zur Parameter-Bestimmung untersucht werden. So arbeitet beispielsweise das K2K Experiment [A+06] mit Beschleunigerneutrinos. Bei diesen Experimenten ist keine Bestimmung der absoluten Neutrinomasse möglich, jedoch werden die Parameter der Neutrino-Oszillation bestimmt:

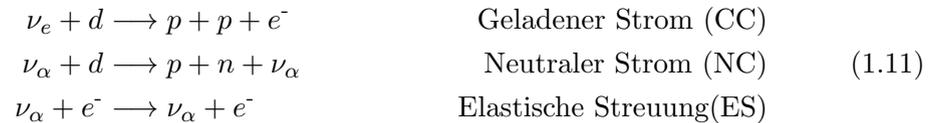
- **Atmosphärische Neutrinos:** Die Maki-Nakagawa-Sakata Matrix kann in mehrere Rotationsmatrizen zerlegt werden. Diese beschreiben die Mischung zwischen den einzelnen Zuständen ν_i . Die von Super-Kamiokande gewonnenen Daten zeigten, dass die Anzahl der vom Detektor gemessenen atmosphärischen Myon-Neutrinos abhängig von ihrem Einfallswinkel ist. Von unten kommende Myon-Neutrinos fliegen vor Erreichen des Detektors durch die Erde und haben aufgrund dieses längeren Weges eine größere Wahrscheinlichkeit zu Tau-Neutrinos zu oszillieren. Durch die gemessenen Werte konnte der Parameter Θ_{23} der Mischungsmatrix eingegrenzt werden auf:

$$\sin^2(2\Theta_{23}) > 0,92 \quad (1.9)$$

Des Weiteren konnte die Massendifferenz eingeschränkt werden auf [A+05a]:

$$1,5 \cdot 10^{-3} eV^2 < \Delta m_{23}^2 < 3,4 \cdot 10^{-3} eV^2 \quad (1.10)$$

- **Solare Neutrinos:** Im SNO-Experiment wurde neben dem Elektron-Neutrino-Fluss auch der Fluss aller Neutrinoarten gemessen. Hierfür wurden drei verschiedene Reaktionen verwendet:



Bei der Auswertung der Messdaten wurde festgestellt, dass der Fluss aller Neutrinoarten mit dem vom SSM vorhergesagten Neutrino-Fluss übereinstimmt. Die Sonne emittiert jedoch ausschließlich Elektron-Neutrinos. Somit legen diese Ergebnisse nahe, dass die verschiedenen Neutrino-Flavor ineinander oszillieren. Durch Berechnung von $\vartheta(\nu_e)/\vartheta(\nu_e,\mu,\tau)$ wurde herausgefunden, dass nur etwa ein Drittel der, von der Sonne emittierten, Neutrinos bei ihrer Ankunft auf der Erde noch ihren Ursprungs-Flavor besitzen. Ein globaler Fit über alle verfügbaren Daten zu solaren Neutrinos liefert die folgenden Parameter für die Oszillation:

$$\tan^2(\Theta_{12}) = 0,45_{-0,08}^{+0,09} \quad , \quad \Delta m_{12}^2 = 6,5_{-2,3}^{+4,4} \cdot 10^{-5} eV^2 \quad \text{Unsicherheit: } 1\sigma \quad (1.12)$$

- **Reaktor-Neutrinos:** Bei den β -Zerfällen Neutronen-reicher Kerne in Fissionsreaktoren entstehen viele Elektron-Anti-Neutrinos. Jede Spaltung produziert etwa eine Energie von 200 MeV, wodurch etwa sechs Elektron-Anti-Neutrinos freigesetzt werden. Der Anti-Neutrino-Fluss ist sehr hoch und isotropisch, verringert sich jedoch mit steigender Entfernung stark. Da die emittierten Anti-Neutrinos eine geringe Energie von einigen MeV besitzen, lässt sich vermuten, dass auch ihre Oszillationslänge recht gering ist. Somit sollten schon in einem kleinen Abstand zum Reaktor Neutrino-Oszillationen beobachtet werden können. Die Anti-Neutrinos werden, wie bereits im Poltergeist-Experiment, über den inversen β -Zerfall (Siehe Gleichung 1.1) nachgewiesen. Im KamLAND Experiment wurde mit dieser Reaktion der Anti-Elektron-Neutrino-Fluss von nahen Reaktoren bestimmt. Der durchschnittliche Abstand zu den Reaktoren betrug ca. 180 km. Für Abstände dieser Größenordnung hängt die Übergangswahrscheinlichkeit hauptsächlich von Θ_{12} und Δm_{12}^2 ab. Bei kleinen Abständen hingegen, im Bereich von ca. 5 km, können diese beiden Parameter vernachlässigt werden. Die Übergangswahrscheinlichkeit hängt hier nahezu nur von Θ_{13} und Δm_{13}^2 ab. Gemessen wurden die folgenden Werte:

$$\tan^2(\Theta_{12}) = 0,46 \quad , \quad \Delta m_{12}^2 = 7,9_{-0,5}^{+0,6} \cdot 10^{-5} eV^2 \quad (1.13)$$

Im Double CHOOZ Experiment sollen zwei Detektoren in kurzer Distanz² zu einem Kernreaktor aufgestellt werden, um $\sin^2(2\Theta_{13})$ zu bestimmen.

²Einer befindet sich 400m, der andere 1,05 km vom Reaktor entfernt

- **Beschleuniger-Neutrinos:** Im K2K-Experiment wurde ein nahezu reiner ν_μ -Strahl vom KEK Labor zum 250 km entfernten Super-Kamiokande Detector geschickt. Unter der Annahme $\sin^2(2\Theta_{12}) = 1$ passten die beim Experiment gewonnenen Daten am besten für $\Delta m^2_{23} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$. Ziel zukünftiger Experimente ist es, die Oszillation von Myon- zu Elektron-Neutrinos in diesen Strahlen zu entdecken.

Alle diese Experimente unterstützen mit ihren Ergebnissen die Theorie der Neutrino-Oszillation. Sie konnten die Parameter der Neutrino-Oszillation sowie die Quadrate der Massendifferenzen oder Mischungswinkel messen oder eingrenzen. Jedoch ist noch nicht bekannt, wie die absolute Massen-Skala und die zugehörige Massen-Hierarchie aussieht. Die Masseneigenzustände könnten hierarchisch ($m_1 < m_2 < m_3$), invers-hierarchisch ($m_3 < m_2 < m_1$) oder auch degeneriert ($m_1 \approx m_2 \approx m_3$) bzgl. der absoluten Masse angeordnet sein.

1.4. Messung der Neutrinomasse

Experimente zur Bestimmung der Neutrinomasse werden in zwei Kategorien unterteilt: direkte und indirekte Massenbestimmung.

1.4.1. Indirekte Bestimmung der Neutrinomasse

Die indirekte Bestimmung der Neutrinomasse ist möglich über die Suche des neutrinolosen doppelten β - Zerfalls ($0\nu\beta\beta$) oder aber über diverse kosmologische Beobachtungen.

Suche nach dem neutrinolosen doppelten β -Zerfall

Beim doppelten β -Zerfall finden zeitgleich zwei β -Zerfälle in einem Kern (Z,A) statt. 1987 wurde der doppelte β -Zerfall mit zwei entstehenden Elektron-Anti-Neutrinos ($2\nu\beta\beta$) erstmals beobachtet [E+87](siehe Gl. 1.14).

$$(Z, A) \longrightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (1.14)$$

Eine weitere Möglichkeit wäre der neutrinolose doppelte β -Zerfall ($0\nu\beta\beta$). Bei diesem Zerfall würden die entstehenden Neutrinos nicht emittiert werden, sondern als virtuelle Teilchen ausgetauscht werden. Da das erste Neutron ein Antineutrino emittiert, das zweite Neutron jedoch nur mit einem Neutrino wechselwirken kann, ist der neutrinolose doppelte β -Zerfall nur möglich, wenn das Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist. Das Neutrino wäre dann ein sogenanntes Majorana-Teilchen [D85]. Da bei diesem Zerfall die Leptonenzahl nicht erhalten bleibt ist er nach dem SM verboten. Könnte er trotzdem beobachtet werden, so wäre er ein Hinweis auf neue Physik jenseits des Standardmodells. Beim $0\nu\beta\beta$ -Zerfall würde man, im Gegensatz zum $2\nu\beta\beta$ -Zerfall, kein kontinuierliches Spektrum sondern eine einzelne Zerfallslinie beobachten. Der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall ist nur möglich, wenn zwischen den beiden Vertizes eine Helizitäts-Anpassung stattfindet: Beim ersten β -Zerfall entsteht ein rechtshändiges Antineutrino. Für den Zerfall des zweiten Neutrons wird es jedoch als linkshändiges Neutrino absorbiert [F87]. Diese Anpassung der Helizität funktioniert nur, wenn das Neutrino eine von Null verschiedene Masse besitzt. Der $0\nu\beta\beta$ - und der $2\nu\beta\beta$ -Zerfallsprozess laufen nicht gleich schnell ab. Somit kann die Neutrinomasse über eine Bestimmung der Zerfallszeiten erhalten werden. Um hierbei aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten, müssen die Elemente der Übergangsmatrix für den beobachteten Kern ausreichend genau bekannt sein. Bestimmt wird dann nicht die eigentliche Masse des Neutrinos, sondern eine kohärente Summe der Massen-Eigenzustände:

$$m_{\beta\beta} = \left| \sum_{i=1}^3 U_{ei}^2 m_i \right| \quad (1.15)$$

Im Heidelberg-Moskau-Experiment wurde der doppelte β -Zerfall von angereichertem Germanium untersucht:



Ein Teil der Kollaboration glaubt den Beweis dafür, dass Neutrinos Majorana-Teilchen mit einer Masse von $\langle m_{\nu} \rangle = 0,39_{-0,34}^{+0,45} \text{eV}$ sind, gefunden zu haben [KK02]. Jedoch sind diese Ergebnisse umstritten. Das KATRIN Experiment könnte diese Masse bestätigen. Weitere Experimente, welche mit dem $0\nu\beta\beta$ -Zerfall arbeiten sind GERDA [B07], CUORE [F99] und EXO [Gor10]. Ein Problem dieser Methode zur Bestimmung der Neutrinomasse ist die starke Modellabhängigkeit der komplexen Majoranaphase. Des Weiteren sind die Elemente der Kern-Übergangsmatrix nicht ausreichend gut bekannt. Auch existieren noch weitere theoretische Erklärungen für den neutrinolosen doppelten β -Zerfall, wie z.B. supersymmetrische Teilchen.

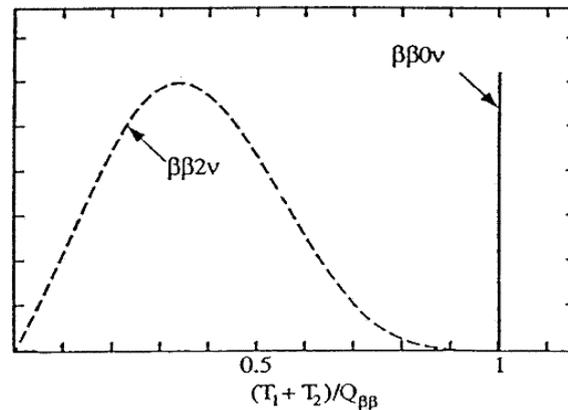


Abbildung 1.3.: Abbildung aus [Beu]: Das Zerfallsspektrum des doppelten β -Zerfalls. Aufgetragen wurde die Energie der beiden entstehenden geladenen Leptonen. Sollte der neutrinolose Zerfall möglich sein, müsste neben dem kontinuierlichen Spektrum für den Zerfall mit zwei entstehenden Neutrinos noch ein einzelner Peak bei einer diskreten Energie beobachtbar sein.

Bestimmung der Neutrinomasse aus kosmologischen Beobachtungen

Viele, in der Kosmologie und Astroteilchenphysik verwendeten Modelle, beinhalten die Neutrinomasse als Parameter. Somit ist es möglich, diese durch die Auswertung diverser experimenteller Daten zu bestimmen. Ein Großteil dieser Modelle ist jedoch nur auf die kohärente Summe der Neutrinomassen sensitiv. Des Weiteren sind die Ergebnisse sehr stark vom verwendeten Modell anhängig. Möglichkeiten zur Bestimmung der Neutrinomasse bieten:

- die Transformation einer Supernova zu einem Neutronenstern: Bei der Fusion von Protonen und Elektronen entstehen viele Neutrinos. Die Flugzeit dieser Neutrinos zur Erde ist abhängig von ihrer Energie und ihrer Masse. Mit Detektoren auf der Erde lässt sich die Energie der ankommenden Neutrinos bestimmen. Aus der Differenz der Ankunftszeiten für Neutrinos verschiedener Energien lässt sich dann die Masse des ν_3 bestimmen.

Die Obergrenze für diese Masse liegt demnach zwischen 5,7 und 23 eV. Die Ergebnisse dieser Methode sind jedoch sehr stark vom verwendeten Modell abhängig.

- die kosmische Hintergrundstrahlung³: Analysiert man die Struktur der CMB-Strahlung und vergleicht diese mit der angenommenen Materie-Verteilung im Universum, kann hieraus eine Obergrenze für die Summe aller drei Neutrinomassen bestimmt werden. Diese Obergrenze liegt zwischen 0,42 und 1,8 eV. Auch hier ist das Ergebnis wieder vom Modell, also von der angenommenen Materie-Verteilung abhängig.

1.4.2. Direkte Bestimmung der Neutrinomasse

Die direkte Bestimmung der Neutrinomasse kann über mehrere Zerfälle, bei denen Neutrinos entstehen, erfolgen. So existieren zum Beispiel Experimente, welche versuchen die Neutrinomasse über den Pion- oder den Tau-Zerfall zu bestimmen. Pion- und Tau-Experimente sind auch im Hinblick auf die Oszillationsparameter sehr interessant, da man mit ihnen auch die Mischung von ν_μ und ν_τ untersuchen kann. Hierbei werden die folgenden Zerfälle benutzt:

$$\text{Pion: } \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (1.17)$$

$$\text{Tau: } \tau^- \longrightarrow 2\pi^- + \mu^+ + \nu_\tau \quad \text{und} \quad \tau^- \longrightarrow 3\pi^- + 2\pi^+ + \nu_\tau + \pi^0 \quad (1.18)$$

Die größte Sensitivität für die Neutrinomassen-Bestimmung wird jedoch bei der Betrachtung des Elektron-Energie-Spektrums des nuklearen β -Zerfalls erreicht:

$$N(A, Z) \longrightarrow N(A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.19)$$

A ist die Massen- oder auch Nukleonenzahl, Z die Protonenzahl. Diese Methode ist nur von der Energie- und Impulserhaltung abhängig. Es existiert, im Gegensatz zu den Methoden zur indirekten Bestimmung der Neutrinomasse, keine Abhängigkeit von irgendeinem Modell. Beim Zerfall wird im Atomkern ein Neutron in ein Proton umgewandelt. Hierbei entstehen ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino. Die freiwerdende Energie verteilt sich auf diese drei Produkte. Da jedoch die Masse des Kerns im Vergleich zur Elektron- und zur Neutrinomasse praktisch als unendlich betrachtet werden kann, verteilt sich die Energie praktisch nur auf das Elektron und das Neutrino. Der Energieübertrag auf das Neutrino ist hierbei abhängig von seiner Masse und beträgt $E_\nu = \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p_\nu^2 c^2}$. Somit reduziert sich die maximale kinetische Energie des entstehenden Elektrons um die Ruhemasse des Neutrinos. Mit Fermis Goldener Regel lässt sich die Übergangswahrscheinlichkeit des Zerfalls angeben zu:

$$T = \frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathbf{M}|^2 \rho(E) \quad (1.20)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist abhängig von der Kopplung zwischen Anfangs- und Endzustand, welche durch das nukleare Matrixelement $|\mathbf{M}|^2$ beschrieben wird, und von der Anzahl der Möglichkeiten für den Ablauf des Zerfalls. Für die Zerfallsrate in Abhängigkeit von der Elektronenergie ergibt sich:

$$\frac{dN}{dE} = R(Z, E) \cdot (E_0 - E) \cdot \sqrt{(E_0 - E)^2 - m_{\bar{\nu}_e}^2 c^4} \cdot \theta(E_0 - E - m_{\bar{\nu}_e} c^2) \quad (1.21)$$

³CMB: Cosmic Microwave Background

E_0 ist die Endpunktenergie des Spektrums, $m_{\bar{\nu}_e}$ die Ruhemasse des Neutrinos und E die kinetische Energie des Elektrons. Das Neutrino kann nur entstehen, wenn seine Ruhemasse kleiner ist als die verfügbare Energie. Dies wird durch die Schrittfunktion $\theta(E_0 - E - m_{\bar{\nu}_e} c^2)$ berücksichtigt. Der Term $R(Z, E)$ ist ein Produkt aus Funktionen und Größen, welche für die Bestimmung der Neutrinomasse nicht relevant sind:

$$R(Z, E) = \frac{G_F^2}{2\pi^3 \hbar^7} \cdot \cos^2(\theta_c) \cdot |\mathbf{M}|^2 \cdot F(Z, E) \cdot p \cdot (E + m_e c^2) \quad (1.22)$$

- G_F^2 : Fermi-Kopplungskonstante
- $|\mathbf{M}|^2$: Übergangsmatrixelement
- θ_c : Cabibbo-Winkel
- $F(Z, E)$: Fermi-Funktion
- m_e : Ruhemasse des Elektrons
- p : Impuls des Elektrons

Durch den Term $m_{\bar{\nu}_e} c^2$ wird das Energiespektrum abhängig von der Neutrinomasse. In den Regionen mit großen Zählraten ist diese Abhängigkeit vernachlässigbar. Signifikant ist der Endpunkt des Spektrums. Besitzen Neutrinos eine Masse ungleich Null, so verschiebt sich dieser.

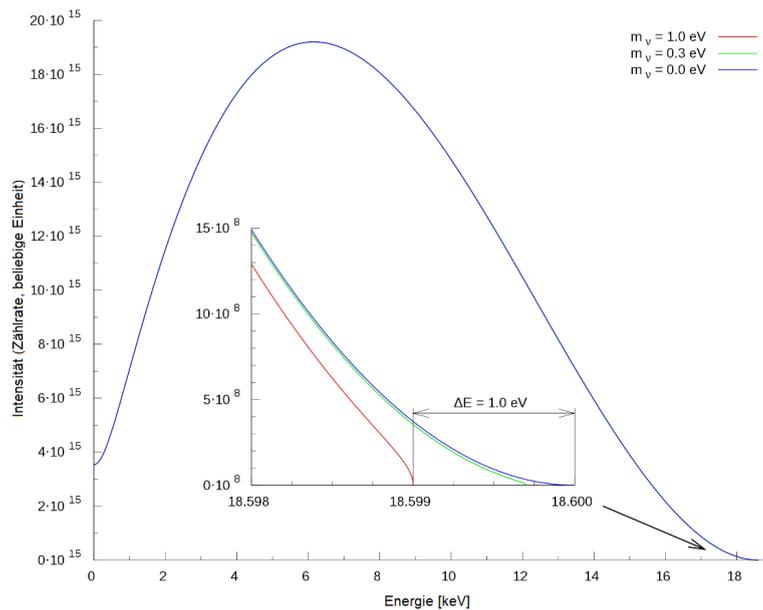


Abbildung 1.4.: Das Tritium- β -Zerfallsspektrum: Für verschiedene Neutrinomassen ändert sich der Endpunkt des Spektrums. Abbildung von [Zyk]

Um nun also die Neutrinomasse zu bestimmen bzw. eingrenzen zu können, muss der Endpunkt des Spektrums gemessen werden. Da jedoch nur ein Anteil von $2 \cdot 10^{-13}$ aller Elektronen im unteren Bereich des Zerfallsspektrums⁴ liegen, muss sehr lange gemessen werden um eine gute Statistik zu erhalten und die Neutrinomasse möglichst gut eingrenzen zu können. Die Vorgängerexperimente von KATRIN lieferten bisher die exaktesten Ergebnisse:

$$\text{Mainz[?]: } m(\bar{\nu}_e) \leq 2,3 \text{ eV} (95\%CL.) \quad \text{Troitsk[?]: } m(\bar{\nu}_e) \leq 2,5 \text{ eV} (95\%CL.) \quad (1.23)$$

⁴Dieser Bereich beginnt ca. 1 eV vor der maximalen Elektronenergie für $m_\nu = 0$

Das KATRIN Experiment arbeitet, wie schon seine Vorgängerexperimente in Mainz und Troitsk, mit dem Tritium- β -Zerfall. Tritium wurde aufgrund seiner niedrigen Endpunktsenergie von $\approx 18,6$ keV und seiner kurzen Halbwertszeit von 12,3 Jahren gewählt. Es gibt auch Experimente, welche die Verwendung von Rhenium in Betracht ziehen. ^{187}Re hätte den Vorteil einer noch geringeren Endpunktsenergie von nur 2,47 keV, jedoch bräuchte man aufgrund seiner hohen Halbwertszeit von $T_{1/2} = 4,32 \cdot 10^{10} a$ wesentlich mehr Quellenmaterial, um eine ausreichend große Zerfallsrate im Bereich des Endpunktes zu erhalten.

2. KATRIN: Das Karlsruhe TRItium Neutrino Experiment

Ziel des Karlsruhe Tritium Neutrino Experiments KATRIN ist es, die Neutrinomasse direkt und Modell-unabhängig durch Untersuchung des Tritium- β -Spektrums zu bestimmen. Dabei wird KATRIN eine Sensitivität von 0,2 eV erreichen. Dies wäre eine Größenordnung höher wie in den Vorgänger-Experimenten in Mainz und Troitsk. Um diese hohe Sensitivität zu erreichen, wird eine höhere Intensität der Tritium-Quelle angestrebt. Dieses Kapitel befasst sich mit dem Aufbau des KATRIN Experiments. Es werden die einzelnen Komponenten des Experiments, begonnen mit der Quelle, über die Transportsektion, den Detektor, bis hin zu den Spektrometern, beschrieben (Siehe Abbildung 2.1). Im Unterkapitel über die Spektrometer wird zuerst die Funktionsweise eines MAC-E-Filters, dem verwendeten Spektrometertyp, erläutert. Anschließend folgt die Vorstellung der drei verwendeten Spektrometer. Danach wird der Untergrund in MAC-E-Filtern diskutiert, woraufhin ein wichtiger Teil des Experimentes zur Untergrundreduzierung im Hauptspektrometer vorgestellt wird: das Draht-Elektroden-System.

2.1. Die Quelle

Die fensterlose, gasförmige Tritiumquelle WGTS¹ wird aufgrund ihrer hohen Luminosität und den geringen systematischen Schwankungen die Standard β -Elektronen-Quelle des KATRIN-Experimentes sein. Das Tritiumgas(T_2) wird in der Mitte einer 10 m langen Röhre mit einem inneren Durchmesser von 90 mm injiziert. Von dort diffundiert es zu den beiden Enden der Quelle. Das Tritiumgas hat eine Temperatur von 27 K, und seine isotropische Reinheit ist größer als 95%. An den Enden der Quelle befindet sich je eine Pumpstrecke mit sechs Turbomolekularpumpen, um den Tritiumfluss nach außen möglichst gering zu halten. Durch die Temperatur und den Injektionsdruck des Tritiumgases kann die Säulendichte in der Quelle auf den Referenzwert $\rho d = 5 \cdot 10^{17}$ Moleküle/cm² gesetzt werden. Bei diesem Wert herrschen in der Quelle die optimalen Bedingungen zum Erreichen einer hohen Luminosität. Der systematische Fehler der Quelle ist abhängig von ρd . Daher muss dieser Wert bis mit einer Genauigkeit von 0,1% bekannt sein. Dies verlangt einerseits eine kontinuierliche oder zumindest regelmäßige Messung der Säulendichte, sowie eine hohe Stabilität der Quell-Basisparameter wie Gas-Einlassdruck, Reinheit und Temperatur. Die isotropische Reinheit des Tritiumgases wird mithilfe der Laser Raman

¹engl.: Windowless Gaseous Tritium Source

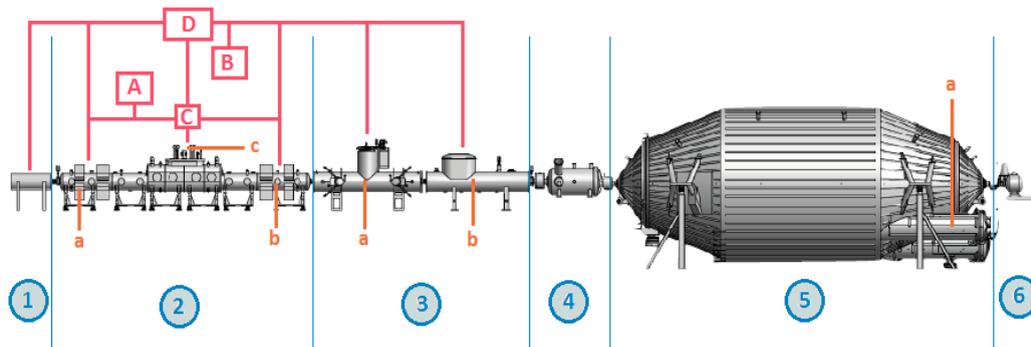


Abbildung 2.1.: Der ca. 70 m lange Aufbau des KATRIN-Experimentes: (1) REAR-Sektion, (2) Quelle(WGTS) mit (a) DPS1-R, (b) DPS1-F und (c) Tritium-Einlass,(3) Transport-Sektion mit (a) DPS2-F und (b) CPS, (4) Vorspektrometer und (5) Hauptspetrometer mit den (a) Pumpports. Die mit Tritium arbeitenden Teile sind aufgeteilt in den inneren [A] und den äußeren [B] Ring. Bei [C] wird die Reinheit des Tritiums vor der erneuten Injektion überprüft. Das vom äußeren Ring kommende Tritium-Gas wird zuerst durch Isotopen-Separation [D] von anderen Wasserstoffprodukten getrennt.

Spektroskopie überprüft [Schlö09],[Lew05]. Die WGTS ist von supraleitenden Magneten umgeben. Diese erzeugen ein Magnetfeld von 3,6 T, welches stark genug ist, um die entstehende β -Elektronen aus der Quelle heraus, in Richtung der Transportsektion zu führen. In einem Teil mit der WGTS wurden die DPS1-F und die DPS1-R² gefertigt. Diese beiden Pumpsektionen sind jeweils 3 m lang und befinden sich am vorderen bzw. hinteren Ende der Quelle. Ihre Aufgabe ist die Reduktion des Tritiumflusses um zwei Größenordnungen. Sie gehören zum sogenannten inneren Ring (Inner Loop) [St10]: Das abgepumpte Tritiumgas wird durch eine Palladium/Silber-Membran direkt zurück in die Injektionslinie gepumpt. Mehr zu ihrem Aufbau und zum äußeren Ring findet sich in Kapitel 2.2.

2.1.1. Das Rear-System

An der Rückseite der WGTS befindet sich neben der DPS1-R noch das Rear-System. Dieses wird auch als CMS³ bezeichnet. Im CMS befinden sich eine Elektronenkanone und Detektoren zur Überprüfung des β - Elektronen-Flusses und damit der Aktivitätsüberwachung. Des Weiteren befindet sich eine leitende Anschlussplatte in der CMS, welche dafür sorgt, dass sich die gesamte WGTS auf einem konstanten und wohldefinierten elektrischen Potential befindet.

2.2. Die Transportsektion

Nach dem Verlassen der Quelle erreichen die Tritium-Zerfallselektronen gemeinsam mit nicht von der DPS1-F abgepumpten Tritium-Molekülen die Transportsektion. Sollten es

²Das F steht für Front: Vorderseite, das R für Rear: Rückseite

³Calibration and Monitoring System

vereinzelte Tritiummoleküle in die Spektrometer schaffen, würden sie dort zerfallen und Untergrundelektronen generieren. Dieser Untergrund darf im Hauptspektrometer jedoch nicht größer als 10^{-3} Hz sein. Dies entspricht einem partiellen Tritiumdruck von ca. 10^{-20} mbar. Hieraus folgt für das Vorspektrometer ein maximal zulässiger Tritiumfluss in der Ordnung 10^{-14} mbar/l/s. Die Tritium-Einlassrate der WGTS beträgt ca. 2 mbar/l/s. Aufgabe der Transportsektion ist es, den Tritiumfluss um 14 Größenordnungen zu reduzieren, während die Elektronen zu den Spektrometern geführt werden. Dies wird durch eine Kombination aus mechanischen und kryogenen Pumpen und supraleitenden Magneten erreicht. Des Weiteren sind einige der Strahlrohre zueinander verkippt, so dass kein direkter Sichtkontakt zwischen der Quelle und den Spektrometern besteht. In der Transportsektion kommen zwei Pumpsektions-Typen zum Einsatz:

- DPS(Differential Pumping Section): aktive Differentialpumpen
- CPS(Cryogenic Pumping Section): passive Tieftemperaturpumpen

Die DPS2-F⁴ ist durch ein Ventil von der Quelle getrennt. Sie besteht aus fünf je 1 m langen Strahlröhren. Diese befinden sich in einem Magnetfeld von 5,6 T, welches durch supraleitende Magnete erzeugt wird. Sie wird bei einer Temperatur von etwa 77 K betrieben. Zwischen je zwei Strahlrohren befindet sich ein Pumpport. Jeder Pumpport ist mit einer Turbomolekularpumpe bestückt. Diese Pumpen besitzen wieder eine Pumpgeschwindigkeit für H_2 von größer als 2000 l/s. Der gemeinsame Reduzierungsfaktor von DPS1-F und DPS2-F ist größer als 10^7 . Die DPS2-F gehört zum äußeren Ring(Outer Loop): Das Gas wird abgepumpt und die diversen Isotope werden anschließend voneinander getrennt. Erst dann wird das Tritium wieder in die Injektionslinie gepumpt. Durch die Turbomolekularpumpen von DPS1-F und DPS2-2F wird mit einem Restdruck von ca. 10^{-10} mbar die Grenze des mechanischen Pumpens erreicht.

Gasbindende Pumpen ermöglichen in der CPS eine weitere Reduktion des Druckes. Die CPS besitzt drei Strahlrohre von je 1 m Länge, welche sich innerhalb supraleitender Spulen mit einem zentralen Magnetfeld von 5,6 T befinden. Diese Strahlrohre sind je um 20° zueinander gekippt, um eine direkte Sichtlinie auszuschließen. Sie werden mit flüssigem Helium gekühlt. Auf ihrer Oberfläche befindet sich eine polykristalline Schicht aus aufgedampftem Argon. An dieser Oberfläche frieren das übrige Tritium und weitere Wasserstoffisotope praktisch fest. An einem Tag werden sich ca. 10^{17} Moleküle auf der Oberfläche ansammeln. Mit einem passenden Design kann mittels Tieftemperaturpumpen ein Druck unterhalb von 10^{-13} mbar erreicht werden.

2.3. Der Detektor

In Kapitel 2.4.1 wird das Prinzip des MAC-E-Filters erklärt, der die Energie der Elektronen bestimmt, so dass der Detektor prinzipiell nur noch die ankommenden Elektronen zählen müsste. Jedoch zeigten vorherige Experimente, dass die Erkennung des Untergrundes von größter Bedeutung für das Gelingen des KATRIN Experimentes ist. Daher wurde ein anspruchsvoller Detektor mit hoher Energie- und Positions-Auflösung entwickelt. Der FPD⁵ befindet sich in einem separaten supraleitenden Magneten mit großer Bohrung. Zusätzlich beinhaltet der Magnet aktive und passive Detektorabschirmungen um den Untergrund am Detektor zu minimieren. Da ausschließlich der Endbereich des Tritium- β -Zerfalls-Spektrums untersucht wird, werden sehr niedrige Zählraten erwartet. Daher muss der externe Untergrund sehr gut unterdrückt werden. Der FPD selbst ist ein Multi-Pixel-Silizium- Halbleiterdetektor mit einem sehr dünnen Eingangsfenster. Seine Energieauflösung soll 600 eV für Elektronenergien über 18,6 keV betragen. Um eine gute räumliche

⁴Differential Pumping Section 2 - Front

⁵Focal Plane Detector

Auflösung zu erhalten, wurde der Detektor in 148 Pixel unterteilt. Diese bedecken alle identisch große Flächen des Flussschlauches. Aufgrund der hohen Axialsymmetrie des Flussschlauches wurde sich für einen runden Detektor mit einer Dartscheiben-ähnlichen Pixelverteilung entschieden. Zusammenfassend muss der Detektor die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

- geringer intrinsischer Untergrund
- Detektion in hohen Magnetfeldern
- Sensitivität für kleine Zählraten
- Fähigkeit während der Kallibrationsphase mit großen Zählraten umzugehen
- räumliche Auflösung, welche den Potentialabfall in der Analysierebene berücksichtigt

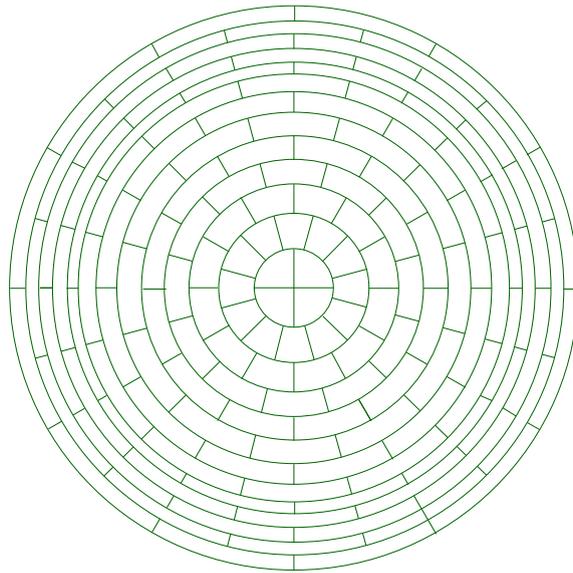


Abbildung 2.2.: Skizze des Detektors des KATRIN Experiments: Alle 148 Pixel des axial-symmetrischen Multi-Pixel-Silizium-Halbleiterdetektors decken eine identisch große Fläche des Flussschlauches ab.

2.4. Die Spektrometer

2.4.1. Das Prinzip eines MAC-E-Filter

Das KATRIN-Experiment wird einen speziellen Spektromertyp nutzen, den sogenannten MAC-E-Filter (Magnetic Adiabatic Collimation combined with an Electrostatic Filter). [Beam80], [Lob85], [P+92] Ein MAC-E-Filter vereint hohe Luminosität und einen geringen Untergrund mit einer hohen Energieauflösung und ist somit gut geeignet die Neutrinomasse aus dem β -Zerfallsspektrum nahe des Endpunktes zu bestimmen. Dieser Spektromertyp wurde schon von den Vorgänger-Experimenten in Mainz und Troitsk benutzt. Ihm verdanken diese Experimente ihre hohe Sensitivität.

Beim MAC-E-Filter erzeugen zwei supraleitende Magnete ein magnetisches Führfeld. Die Tritium-Zerfalls-Elektronen von der Quelle betreten den Filter auf einer Seite und werden durch eine Zyklotronbewegung um die Magnetfeldlinien durch das Spektrometer geführt. Dieses Prinzip führt dazu, dass ein räumlicher Winkel bis zu 2π akzeptiert werden kann. Aufgrund der langsamen Änderung des Magnetfeldes ändert sich der Impuls adiabatisch, sodass das magnetische Moment μ erhalten bleibt:

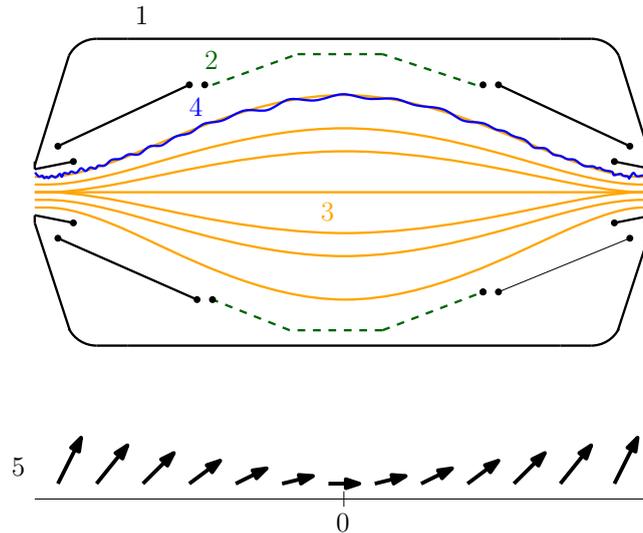


Abbildung 2.3.: Beispiel für einen MAC-E-Filter: Die Skizze des KATRIN- Vorspektrometers zeigt die Spektrometerhülle und Vollelektrode (1), das innere Drahtelektrodensystem (2) und die Magnetfeldlinien (3) des, von ihnen erzeugten, Magnetfeldes. Des Weiteren wurde die Trajektorie eines geladenen Teilchens (4) skizziert. Unterhalb des Tanks ist die Impulsrichtung an der jeweiligen z -Position (5) zu sehen.

$$\mu = \frac{E_{\perp}}{B} = \text{const.} \quad (2.1)$$

Von den Magneten bis hin zur Mitte des Spektrometers, der Analysierebene, fällt das Magnetfeld um einige Größenordnungen. Durch diesen Feldverlauf wird ein Großteil der radialen Zyklotronenergie auf dem Weg zur Analysierebene in longitudinale Energie umgewandelt, da das magnetische Moment eine erhaltene Größe ist (Siehe Gleichung 2.1). Hinter der Analysierebene nimmt die Feldstärke wieder zu, sodass die Energie wieder in Zyklotronenergie E_{\perp} umgewandelt wird. Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf des Magnetfeldes innerhalb eines MAC-E-Filters und die Impulsrichtung an verschiedenen z -Positionen. Des Weiteren liegt ein elektrisches Feld als Retardierungspotential an. Ist die Startenergie eines Elektrons zu niedrig, so wird die komplette longitudinale Energie verbraucht, bevor es das Spektrometer durch den hinteren Magneten wieder verlassen kann. Es wird im Spektrometer gefangen und erreicht den Detektor nicht. Ein MAC-E-Filter ist ein integrierender Hoch-Energie-Filter. Die β -Elektronen werden isotrop von der Quelle emittiert. Anschließend werden sie zu einem breiten Elektronenstrahl gebündelt. Sie fliegen nun entlang der magnetischen Feldlinien zum Spektrometer. Durch eine oder mehr zylindrische Elektroden wird ein elektrostatisches Potential aufgebaut. Dieses bremst die Elektronen auf ihrem Weg zur Analysierebene ab. Ist die Energie der Elektronen ausreichend, so schaffen sie es, dieses Potential zu überwinden. Anschließend werden sie im Feld des Spektrometers wieder beschleunigt und erreichen den Detektor. Elektronen mit zu geringer Energie werden reflektiert. Aus Gleichung 2.1 folgt, dass die relative Schärfe $\Delta E/E$ des Filters nur von der Stärke des minimalen Magnetfeldes in der Analysierebene und dem maximalen Magnetfeld des Experimentes abhängt:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B_A}{B_{\max}} \quad (2.2)$$

Durch Variation des elektrostatischen Retardierungspotentials kann eine integrierte Messung des β -Spektrums durchgeführt werden. Da die Elektron-Quelle sich nicht im Bereich des höchsten magnetischen Feldes B_{max} befindet, werden einige der entstehenden Elektronen durch den magnetischen Spiegeffekt reflektiert. Dies geschieht, wenn Elektronen von einem Bereich geringerer Feldstärke einen Bereich höherer Feldstärke betreten und ihr Polarwinkel einen maximalen Wert überschreitet:

$$\theta_{max} = \arcsin \sqrt{\frac{B_S}{B_{max}}} \quad (2.3)$$

B_S ist die Magnetfeldstärke im Bereich der Quelle. Mit der Ladung eines Elektrons q und dem Retardierungspotential U ergibt sich für einen MAC-E-Filter die folgende Transmissionsfunktion:

$$T(E, qU) = \begin{cases} 0 & E - qU \leq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{E - qU}{E} \frac{B_S}{B_A}} & 0 < E - qU \leq \Delta E \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta E}{E} \frac{B_S}{B_A}} & \\ 1 & E - qU > \Delta E \end{cases} \quad (2.4)$$

Diese gibt die Transmissionswahrscheinlichkeit eines Teilchens, d.h. die Wahrscheinlichkeit mit der es die Analysierebene überwindet, in Abhängigkeit von seiner Ladung, seiner Energie und dem Retardierungspotential an.

2.4.2. Das Hauptspektrometer

Das Hauptspektrometer ist 23 m lang und besitzt einen inneren Durchmesser von 9,8 m. Gefertigt wurde es aus Edelstahlblechen vom Typ 1.4429(316LN). Die Dicke variiert zwischen 25 und 32 mm. Genau wie das Vorspektrometer gehört es zu den MAC-E-Filtern. Supraleitende Magnete auf beiden Seiten erzeugen das Magnetfeld. Elektronen mit Energien oberhalb des Retardierungspotentials erreichen den Detektor und werden gezählt. Das Retardierungspotential variiert in kleinen Schritten unterhalb von E_0 . Diese Zählweise wird als integrierte Zählweise bezeichnet. Am unteren Detektorende des Spektrometers befinden sich drei Pumpstutzen für die Turbomolekularpumpen, welche das Vakuum erzeugen werden. Der Tank selbst dient als Schutzelektrode für die exaktere Hochspannung des inneren Drahtelektroden-Systems. Um die Untergrunderhöhung durch Ausgasungen von den Spektrometerwänden zu vermeiden werden die Spektrometer bei einer Temperatur von ca. -20°C zu betrieben. Außerdem wird ein Vakuum von mindestens 10^{-11} mbar benötigt. Das KATRIN-Hauptspektrum ist der erste extrahoch-Vakuumbehälter dieser Größenordnung.

Versuche in Mainz haben gezeigt, dass mit einem Drahtelektroden-System, welches die komplette Spektrometerinnenfläche abdeckt, der Untergrund wesentlich reduziert werden kann. Daher wurde für das Hauptspektrometer ein eigenes Drahtsystem entwickelt. Siehe Kapitel 2.6.

2.4.3. Das Vorspektrometer

Das Vorspektrometer ist im Prinzip eine kleinere Version des Hauptspektrometers. Es ist 3,38m lang, zylinderförmig und besitzt einen Durchmesser von 1,7 m. Die Wandstärke beträgt 11 mm. Sein Retardierungspotential liegt 100 eV unter E_0 und wird durch ein statisches elektrisches Feld erzeugt. Durch dieses Retardierungspotential werden alle Elektronen, bis auf den kleinen Anteil, mit den höchsten Energien entfernt. Durch dieses Filtern der Elektronenergien wird der Untergrund durch gespeicherte Elektronen im

Hauptspektrometer auf ein Minimum reduziert. Nur Elektronen mit einer Energie über 18,5 keV überwinden das Retardierungspotential des Vorspektrometers und schaffen es ins Hauptspektrometer. Das Magnetfeld wird von zwei Supraleitenden Magneten auf den entgegengesetzten Seiten des Spektrometers erzeugt. Diese haben einen Abstand von 4,3 m zueinander und erzeugen in der Analysierebene ein Streufeld von 200 Gauss. Werden die Streufelder aller anderen Magnete des experimentellen Aufbaus von KATRIN mitberücksichtigt, so erhält man auf der Achse in der Analysierebene eine Feldstärke von ca. 270 Gauss. Der Spektrometertank ist elektrisch isoliert und liegt auf einem Potential von -18,5 kV. Im Inneren des Tanks befindet sich ein dreiteiliges Elektrodensystem. Dieses besteht aus einem zylindrischen und zwei kegelstumpfförmigen Teilen. Es liegt auf einem minimal niedrigeren Potential, auf -18,6 kV, um vom Tank kommende Elektronen abzuschirmen. Sein innerer Teil besteht aus einem nahezu masselosen Drahtsystem. Die beiden End-Kegelstümpfe sind Vollelektroden, um in diesem Bereich, nahe der Grundelektrode, die Entstehung hoher elektrischer Felder zu vermeiden.

2.4.4. Das Monitorspektrometer

Um das Retardierungspotential des Hauptspektrometers direkt zu überwachen, wurde parallel zum Originalaufbau des Experiments noch eine Monitor-Strahllinie aufgebaut. Herzstück dieses 5m langen Aufbaus ist das modifizierte Spektrometer des KATRIN-Vorgänger-Experimentes in Mainz. Auch dieses Spektrometer ist ein hoch-auflösender MAC-E-Filter. Es befindet sich auf demselben Potential wie das Hauptspektrometer, sodass die am Hauptspektrometer angelegte Hochspannung direkt kontrolliert werden kann. Des Weiteren besitzt das Monitor-Spektrometer eine Monitor-Quelle (AmCo, Rb-Kr), welche monoenergetische Elektronen im Energiebereich von 17,8 bis 32 keV emittiert. Ein mehrteiliges, auf Silizium-basierenden PIN-Dioden aufgebautes, Detektorfeld weist die ankommenden β -Elektronen nach. Um entstehende Streufelder zu minimieren sind KATRIN- und Monitor-Strahllinie in zwei separaten Gebäuden untergebracht.

2.5. Untergrund in MAC-E-Filtern

Bei den Vorgängerexperimenten in Mainz und Troitsk wurde der größte Anteil des gemessenen Untergrundes von den Spektrometern selbst verursacht. Der Untergrund eines MAC-E-Filters skaliert nicht nur mit der Größe, sondern auch mit weiteren kritischen Parametern wie z.B. der Form und Stärke der elektrischen und magnetischen Felder. Ziel ist es im KATRIN-Hauptspektrometer eine ähnliche Untergrundrate wie in Mainz und Troitsk von 10 mHz oder niedriger zu erreichen. MAC-E-Filter unterdrücken durch ihren Aufbau den von der Wand und der Quelle kommenden Untergrund, jedoch können sie durch ihren Funktionsmechanismus auch zusätzlichen Untergrund produzieren. Vorteil eines MAC-E-Filters ist seine sehr große Energieauflösung bei hoher Luminosität. Jedoch transportiert das gebündelte magnetische Feld alle Elektronen des großen Spektrometervolumens zum Detektor. Der Energiegewinn entstehender Elektronen errechnet sich über die Potentialdifferenz zwischen dem Spektrometervolumen und dem Detektor. Somit können Elektronen, welche bei Ionisierungsprozessen im Spektrometervolumen entstehen bei ihrer Ankunft am Detektor eine Energie im Bereich des Analysierpotentials besitzen. Diese Elektronen wären nur sehr schwer von Signalelektronen zu unterscheiden. Dieser Nachteil des MAC-E-Filters kommt jedoch nur zu tragen, wenn sich eine Elektronenquelle innerhalb des Spektrometervolumens befindet. Um dies zu vermeiden, ist ein Ultrahochvakuum im Spektrometer unerlässlich. Eine erfolgreiche Unterdrückung des Untergrundes wird in einem MAC-E-Filter durch zwei Besonderheiten erreicht:

- Die äußeren Magnetfeldlinien nahe den Elektroden führen die Elektronen nicht zum Detektor, sondern an ihm vorbei. Somit schützt das Magnetfeld den Detektor vor Elektronen aus der Wand oder den Elektroden. Hierfür muss gewährleistet sein, dass

- die Magnetfeldlinien zwischen Quelle und Detektor weder die Wände, noch die Elektroden berühren.
- die Teilchen sich adiabatisch entlang der Feldlinien bewegen.
- Alle Untergrundelektronen von der Quelle, deren Energien niedriger sind als das Potential in der Analysierebene schaffen es nicht diese zu passieren. Somit entsteht eine elektrische Potentialbarriere, welche niederenergetische Elektronen von der Quelle am Erreichen des Detektors hindert.

Es folgt eine genauere Diskussion der verschiedenen Quellen für Untergrund-Elektronen in einem MAC-E-Filter. Diese Quellen sind:

- natürliche Radioaktivität und kosmische Strahlung in der Umgebung des Detektors
- Tritiumzerfälle im Spektrometer
- Ionisation des Restgases durch gefangene Elektronen
- Tankwand und Drahtelektroden
- Penning-Falle zwischen Vor- und Hauptspektrometer
- Plasmas

2.5.1. Untergrund durch natürliche Radioaktivität und kosmische Strahlung

Diese Untergrundquelle kann gut durch die Verwendung ausgewählter Materialien reduziert werden. Des Weiteren kann der Detektor aktiv und passiv abgeschirmt werden. Auch eine gute innere Energieauflösung hilft diesen Untergrund zu minimieren.

2.5.2. Tritiumzerfälle im Spektrometer

Bei Tritiumzerfällen im Spektrometervolumen können höher energetische β -Teilchen elektromagnetisch im Spektrometer gespeichert werden, was zu einem erhöhten Untergrund am Detektor, z.B. durch Ionisation des Restgases, führen würde. Des Weiteren wird in 15% aller Fälle ein niederenergetisches Sekundärelektron aus der Valenzhülle gerissen (Shake-off-Elektron). Dieses Elektron wird in 50% aller Fälle in Richtung des Detektors beschleunigt. Dort würde es dann mit einer Energie im Bereich der Retardierungsenergie qU detektiert werden. (Siehe auch Kapitel 8.1.) Um den Untergrund kleiner als 1 mHz zu halten muss für den partiellen Druck des Tritiums $p(T_2) \leq 10^{-20}$ mbar gelten. Dies entspricht ungefähr $4 \cdot 10^5$ T_2 - Molekülen im Spektrometervolumen. Aufgabe der Transportsektion und der Pumpen in Vor- und Hauptspektrometer ist es, diese Werte für die Messungen zu garantieren.

2.5.3. Untergrund durch gefangene Elektronen

Es besteht die Möglichkeit, dass Elektronen im Spektrometer gespeichert werden. (Siehe Kapitel 8.) Ein gespeichertes Elektron startet eine Kette aufeinanderfolgender Ionisationen, welche erst abbricht wenn die Energie des Elektrons vollständig aufgebraucht ist, oder die Speicherbedingung verloren geht. Die Sekundärelektronen haben eine geringe Energie und werden entlang der Magnetfeldlinien entweder Richtung Detektor oder Richtung Quelle geführt. Um diesen Untergrund auszuschließen, müssen Methoden zur Entfernung gespeicherter Elektronen angewandt werden. Eine mögliche Methode wird in Kapitel 8 vorgestellt.

2.5.4. Untergrund von Wand und Drahtelektroden

Durch kosmische Strahlung, welche das Spektrometer passiert, wie z.B. Myonen [Jun11b] oder aber auch durch natürliche Radioaktivität, können an der Tankwand Elektronen entstehen. Auch Feldemissionen an den Rändern des Elektrodensystems können Elektronen erzeugen. Werden Elektronen von einer Oberfläche in ein Vakuum emittiert, so besitzt der Großteil dieser Elektronen nur eine geringe Energie. Diese Elektronen bewegen sich im Tank adiabatisch entlang der äußeren Feldlinien und werden so am Detektor vorbeigeführt. Besitzen die von der Wand emittierten Elektronen jedoch höhere Energien, so besteht eine Chance, dass sie den Detektor erreichen. Bewegen sich Elektronen nicht adiabatisch, oder führen sie Streuungen im Spektrometervolumen aus, so ist es auch möglich, dass sie im Spektrometer gespeichert werden. Gespeicherte Elektronen könnten an Restgasmolekülen streuen. Die Streuung könnte zur Aufhebung der Speicherung führen. Im schlechtesten Fall erreichen die gestreuten Elektronen den Fluss Schlauch, welcher sie direkt zum Detektor führt. Sind elektrisches und magnetisches Feld nicht exakt axialsymmetrisch können Elektronen von den Wänden durch die $\vec{E} \times \vec{B}$ - und die Gradient-B-Drift in den Fluss Schlauch gelangen. Diese Driftbewegungen werden auch als Magnetrondrift bezeichnet. Je besser die Axialsymmetrie, desto geringer ist die Drift eines Teilchen in radiale Richtung. Generell können es nur Elektronen in den Fluss Schlauch schaffen, welche eine geringe azimutale Magnetrondrift-Geschwindigkeit besitzen.

2.5.5. Die Penning-Falle zwischen Vor-und Hauptspektrometer

Durch die äußeren Magnetfelder werden die Elektronen auf Kreisbahnen gezwungen. Somit wird ihre Bewegung in radialer Richtung begrenzt. Durch die Retardierungspotentiale der beiden Spektrometer wird die Bewegungsfreiheit der Elektronen in axialer Richtung eingeschränkt. Reicht ihre Energie nicht, um das Retardierungspotential zu überwinden, so werden sie zwischen Vor-und Hauptspektrometer gespeichert. Eine solche Falle bezeichnet man als Penning-Falle. Diese Penning-Falle ist keine direkte Untergrundquelle. Sie kann jedoch in einem zweiteiligen Prozess Untergrund erzeugen: Die gespeicherten Elektronen könnten Restgas ionisieren, sodass positiv geladen Ionen entstehen. Diese werden in Richtung des Hauptspektrometers beschleunigt. Dort können sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 10^{-8} eine weitere Ionisation des Restgases verursachen. Die so entstehenden Elektronen besitzen eine große Wahrscheinlichkeit, den Detektor zu erreichen und somit die Untergrundrate zu erhöhen. Aufgrund der geringen Wahrscheinlichkeit für die Restgas-Ionisation im Spektrometer, sollte der von der Penning-Falle verursachte Untergrund kaum nennenswert sein. Wichtig ist nur, dass die Anzahl an gespeicherten Elektronen in der Falle möglichst gering gehalten wird. Wächst die Anzahl an gespeicherten Elektronen, so steigt auch der resultierende Untergrund.

2.5.6. Penning-Plasma

Sowohl in Mainz als auch in Troitsk wurde anfangs ein extrem erhöhter Untergrund gemessen. Dieser könnte durch starke Plasmaströme hervorgerufen worden sein. In Mainz wurde der Untergrund durch eine Reduzierung des Magnetfeldes erfolgreich verringert. In Troitsk wurde der Untergrund durch eine Umänderung des Elektrodendesigns reduziert. Ursprünglich reichte das Elektrodensystem bis in die Bereiche mit hohem Magnetfeld um die Elektronen frühzeitig zu bremsen und ihre adiabatische Fortbewegung zu optimieren. Auf diese Elektrode im hohen Magnetfeld wurde verzichtet. Die Abbremsung erfolgte hauptsächlich durch das Randfeld einer speziell geformten, großen Zentralelektrode auf dem Analysepotential. Elektroden, welche in hohen Magnetfeldern betrieben werden, scheinen ideale Bedingungen zur Entstehung von Penning-artigen Plasmen im Vakuum zu erfüllen. Das Magnetfeld im KATRIN-Hauptspektrometer ist jedoch geringer, als die Felder in Mainz und Troitsk. Daher sollte es nicht zur Entstehung solcher Penning-Plasmen kommen.

2.6. Die Drahtelektroden

Normalerweise wird das Retardierungsfeld eines MAC-E-Filters von einem System aus zylindrischen Elektroden aufgebaut. Um ein kompliziertes inneres Elektrodensystem zu vermeiden und um die Oberfläche im Ultrahochvakuum zu verringern wird das Retardierungspotential direkt an den Tank angeschlossen. Der Tank selbst ist also die verwendete Vollelektrode. Das Drahtelektrodensystem des KATRIN-Hauptspektrometers besteht aus 200 doppel-lagigen Drahtmodulen. Seine Aufgabe ist es, den Untergrund zu reduzieren und Feineinstellungen am elektrischen Feld vorzunehmen. Durch kosmische Myonen oder Radioaktivität in der Umgebung oder innerhalb der Bauteile können Elektronen in der Tankwand, jedoch auch an den Drähten entstehen. Befinden sich die Drahtelektroden auf einem minimal niedrigeren Potential als der Tank, so entsteht eine elektrische Barriere, welche nur von Elektronen mit ausreichender Energie passiert werden kann. Niederenergetische Elektronen werden von den Drähten abgeschirmt. In Mainz wurde diese Idee sehr erfolgreich getestet[A90]. Um zu verhindern, dass die Drahtelektroden selbst zu einer signifikanten Elektronenquelle werden, ist es wichtig, dass die geometrische Abdeckung des Tanks f_{gc} durch das Drahtelektrodensystem sehr gering ist. Für Drahtelektroden mit einem Durchmesser d und einem Abstand s voneinander ergibt sich für die geometrische Abdeckung:

$$f_{gc} = \frac{d}{s} \quad (2.5)$$

Aufgrund der großen Oberfläche des Tanks benötigt das Hauptspektrometer eine sehr geringe geometrische Abdeckung von $f_{gc} \leq 1\%$. Es werden also ein kleiner Drahtdurchmesser d und große Drahtabstände s benötigt.

Das elektrische Potential im Innern des Drahtelektrodensystems U_{innen} bezüglich des Tanks ist sehr homogen. Es wird durch den Abschirmfaktor S beschrieben:

$$S = \frac{U_{\text{Draht}} U_{\text{Tank}}}{U_{\text{Draht}} U_{\text{innen}}} \approx 1 + \frac{2\pi^{1/s}}{\ln(s/\pi d)} \quad (2.6)$$

l ist der Abstand zwischen Tankwand und Drahtsystem.

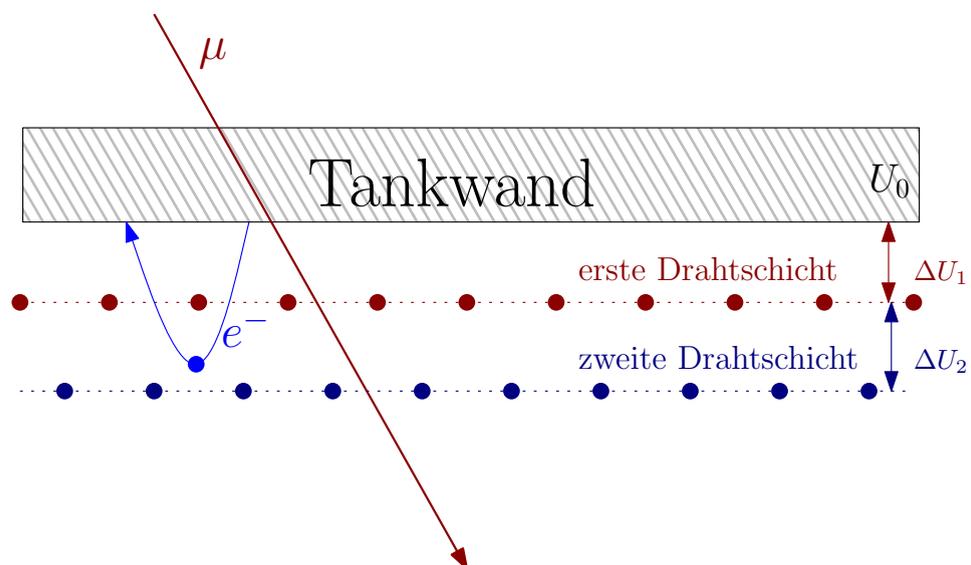


Abbildung 2.4.: Das Drahtsystem schirmt von der Tankwand kommende Elektronen ab.

3. KASSIOPEIA

Für das KATRIN-Experiment wurde ein eigenes, auf C++ basierendes Simulationspaket namens KASSIOPEIA entwickelt. Dieses Paket beinhaltet Module zur Teilchengenerierung und -detektion, zur Bahn- und Feldberechnung und zur Datenerfassung. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden ausführliche Simulationen mit diesem Paket durchgeführt und signifikante Erweiterungen implementiert. Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über KASSIOPEIA zu geben. Begonnen wird mit einer kurzen Zusammenfassung der einzelnen Programmteile. Es folgen Beschreibungen der Konfigurationsdateien, der verwendeten Geometrien, der Manager-Struktur und einiger weiterer Module.

3.1. Die einzelnen Teile von KASSIOPEIA

Das Simulationspaket KASSIOPEIA setzt sich im Wesentlichen aus vier Bereichen zusammen:

- Teilchen-Generierung
- Teilchen-Transport
- Feldberechnung
- Teilchen-Detektion

In diesem Unterkapitel werden diese Teile kurz erläutert.

3.1.1. Teilchen-Generierung

Zu Beginn einer Simulation werden die Elektronen generiert. Der Programmteil KPAGE¹ stellt mehrere Teilchen-Generatoren zur Erzeugung der Teilchen zur Verfügung [Käf10]. So sind z.B. ein E-Gun-Generator, ein Volumengenerator und mehrere Generatoren für Elektronen aus radioaktiven Zerfällen (Tritium, Radon) enthalten.

Für Simulationen mit der WGTS steht dem Anwender die SSC² zur Verfügung [Höt09]. Sie beinhaltet unter anderem die verschiedenen Endzustandsverteilungen und Korrekturen des Spektrums. Die Quelle wird in kleine Stücke unterteilt, so dass eine sehr detaillierte Untersuchung der Quell-Parameter und ihrer Auswirkungen auf das integrierte β -Spektrum

¹KATRINParticleGeneration

²Source Spectrum Calculation

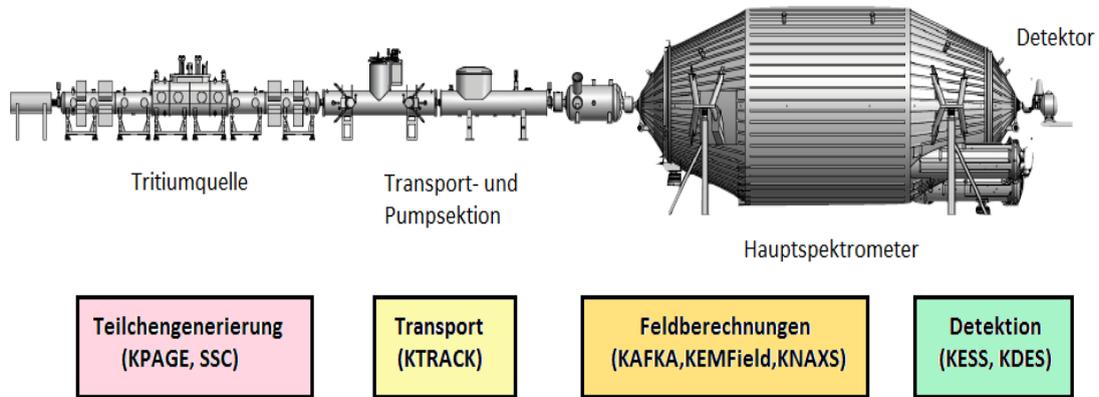


Abbildung 3.1.: Die verschiedenen Module KASSIOPEIAS und ihr Zusammenhang mit dem experimentellen Aufbau des KATRIN-Experiments: Die Teilchengenerierung findet in der Quelle statt, die Teilchen-Detektion am Detektor. Der Transport der Teilchen und die Feldberechnungen erfolgen sowohl entlang der Transportsektion, als auch in den Spektrometern

möglich ist. Hauptaufgabe von SSC ist es für die Generatoren von KPAGE und die weiteren Berechnungen von KASSIOPEIA ein realistisches Quellenmodell zur Verfügung zu stellen. So wird es möglich, Elektronen von ihrer Entstehung in der Quelle durch die Transportsektion und die Spektrometer hindurch, bis hin zu ihrer Detektion im Detektor mittels KASSIOPEIA zu simulieren [Käf09].

3.1.2. Transport

Das Modul KTrack [Lei10] ist für die Berechnung der Teilchentrajektorien (beispielsweise den Transport der generierten Elektronen zu den Spektrometern) zuständig. Zur Berechnung der Teilchenbahnen kann zwischen zwei Haupt-Berechnungsmethoden gewählt werden:

- Exakte Bahnberechnung durch Lösung der, sich aus der Lorentzkraft $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ für geladene Teilchen im elektro-magnetischen Feld ergebenden Bewegungsgleichungen: Hier kann zusätzlich noch zwischen mehreren Lösungsmethoden gewählt werden, unter anderem der Runge-Kutta Methode mit verschiedenen Ordnungen [Glü02].
- Berechnung der Position des Führ-Zentrums³: Diese Methode macht sich die adiabatische Fortbewegung der Teilchen im Experiment zu nutze.

Die Berechnung der Teilchenbahnen beinhaltet weitere relevante Effekte, wie die Verringerung des Zyklotronradius durch Synchrotronabstrahlung, sowie elastische und inelastische Streuprozesse an H_2 -, N_2 -, H_2O - und Ar-Molekülen. Die mathematischen Beschreibungen der benutzten physikalischen Prozesse stammen aus C-Programmen von Dr. Ferenc Glück [Glü06]. Zur Berechnung der Teilchenbahnen benötigt kTRACK die aktuellen elektrischen und magnetischen Felder. Diese bekommt es von den Feldberechnungsmodulen.

³engl.:guiding center position

3.1.3. Feldberechnungen

Innerhalb KASSIOPEIAs existieren drei unterschiedlich Programme zur Feldberechnung:

- **KAFKA:** der KATRINFieldCAculator beinhaltet die Feld-Simulationen von Dr. Ferenc Glück [Glü06]. Die elektrischen und magnetischen Felder werden mittels Legendre-Polynom-Entwicklung und Randelementmethode berechnet. Siehe auch Kapitel 4.
- **KNAXS:** Das KATRIN Non-Axially-Symmetric Field Simulation Package dient zur Berechnung von nicht axial-symmetrischen Felder. Es setzt sich im Wesentlichen aus drei Teilen zusammen:
 - Methode zur Berechnung des Magnetfeldes eines dünnen, diskretisierten Liniensegmentes
 - Magnetfeldberechnungen für magnetische Materialien mittel elektrischen Dipolen
 - Feld-Interpolation mittels 3D-Hermite-Interpolation
- **KEMField:** Umfassende Feld-Berechnungen mittels einer elektrostatischen Lösungsmethode, der Robin Hood Methode. Diese ist im Prinzip eine Variation der Randelement-Methode [Laz04] [Laz08].

3.1.4. Detektion

In diesem Programmteil namens KESS⁴ werden Festkörperzustandseffekte der Elektronen in Silizium simuliert [Ren11]. Es wurde speziell für niederenergetische Elektronen mit Energien zwischen 0 und 50 keV entwickelt. Basis-Geometrie sind zwei Lagen Silizium. Die erste Schicht ist die Totschicht, die zweite Schicht ist das sogenannte Detektor-Volumen. KESS führt eine Schritt-für-Schritt-Berechnung der Elektronen durch. Es behandelt die bei diesen Prozessen auftretenden physikalischen Effekte, wie z.B. Rückstreuung und Energiedeposition.

3.2. Organisation einer Simulation

3.2.1. Benutzer-Eingaben

Die Steuerung von KASSIOPEIA funktioniert über diverse ASCII-Dateien, die im folgenden Konfigurations-Dateien genannt werden. Die Hauptdatei ist die UserConfiguration⁵. Hier werden das Ausgabelevel und der Speicherort der übrigen Konfigurations-Dateien eingestellt. Alle Tools, welche im Verlauf einer Simulation verwendet werden können, werden in den folgenden Toolbox-Konfigurations-Dateien konfiguriert:

- **Generator-Konfiguration:** Hier wird der benutzte Teilchengenerator ausgewählt. Dieser setzt sich aus drei Untergeneratoren zusammen: Position, Richtung und Energie. Für diese Generatoren existieren je mehrere Möglichkeiten. Bei der Position lässt sich unter anderem zwischen einem Oberflächen- oder einem Volumengenerator wählen. Es können hier auch einfach fixe Startpositionen bestimmt werden. Auch die Richtung kann isotropisch verteilt oder fest gewählt werden. Für die Energie kann man z.B. die Energie eines Zerfallsspektrums wählen. Tritium, Krypton und Radon 219/220 sind bereits vorhanden. Oder man stellt eine minimale und eine maximale Energie für die erzeugten Teilchen ein.

⁴KATRIN Electron Scattering in Silicon

⁵auf Deutsch: Benutzer-Einstellung

- **SSC-Konfiguration:** Diese Konfigurationsdatei enthält Informationen über die Konfiguration der Tritiumquelle. Sie ist nur von Bedeutung, wenn mit der Tritiumquelle simuliert werden soll. Hier können praktisch für den Generator Tritium-Quelle weitere Einstellungen vorgenommen werden.
- **Schritt-Strategie-Konfiguration:** In dieser Datei sind die Objekte zur Berechnung der Teilchenbahnen und die benutzbaren Abbruchbedingungen untergebracht. Es gibt drei verfügbare Methoden zur Berechnung der Teilchenbahnen: eine exakte und eine adiabatisch, approximierte Methode im Vakuum und eine Methode für Bahnrechnungen in Silizium (KESS). Diese Methoden bezeichnet man auch als StepComputer. Der verwendete StepComputer lässt sich noch weiter spezifizieren. Zuerst muss eine Propagation ausgewählt werden. Diese gibt an, wie die Bewegungsgleichungen gelöst werden. Zum adiabatischen StepComputer können noch Gyration und Drift der Teilchen hinzugefügt werden. Des Weiteren kann man den Energieverlust durch Synchrotronstrahlung und diverse Streuungen, z.B. an Wasserstoff-Molekülen, aktivieren. Anschließend legt man die maximal erwünschte Schrittgröße fest. Hier hat man unter anderem die Wahl zwischen fester Zeit, fester Länge oder festem Energieverlust. Entscheidet man sich für mehrere Schrittgrößen, so entscheidet sich das Programm für den kleinsten Schritt. Zum Schluss werden noch eine oder mehrere Abbruchbedingungen ausgewählt. Diese Abbruchbedingungen werden nach jedem Schritt des Teilchens überprüft. Sobald eine Abbruchbedingung ausgelöst wurde, stoppt der aktuelle Track. Mögliche Abbruchbedingungen, oder auch ExitConditions, sind maximale Schrittzahl, Erreichen einer Geometrie oder einer bestimmten z-Position oder Zurücklegen eines maximalen Weges.
- **Feld-Konfiguration:** Diese Konfiguration enthält die vorhandenen Felder und die Methoden zu ihrer Berechnung. Sowohl für die elektrischen, als auch für die magnetischen Felder gibt es mehrere Berechnungsmethoden. Für jede dieser Methoden gibt es eigene Input-Dateien, in welchen Geometrien und Spannung der Elektroden bzw. Ströme der Spulen festgelegt werden. Mehr zu den Feld-Berechnungen in Kapitel 4.
- **Geometrie-Konfiguration:** Hier konnten in der anfänglichen KASSIOPEIA-Version aus Kegelstümpfen diverse Geometrien zusammen gesetzt werden. Der Geometrie ist mit Kapitel 3.3 noch ein eigenes Unterkapitel gewidmet.

Diese Toolbox-Dateien stellen eine Auswahl an benutzbaren Objekten dar. So werden z.B. nicht alle Geometrien, welche in der Geometrie-Konfiguration stehen, auch für die Berechnungen genutzt. Die für den Programmablauf benötigten Objekte müssen zusätzlich in der KASSIOPEIA-Konfiguration implementiert werden. Sie werden dann aus der jeweiligen Toolbox eingelesen.

Die Einstellung für die Simulation geschieht in der KASSIOPEIA-Konfiguration⁶. Hier wird festgelegt, was genau simuliert werden soll. Die KASSIOPEIA-Konfiguration ist in mehrere Teile aufgeteilt:

- **Global:** Beinhaltet unter anderem die Einstellungen über Ausgabedatei, -format und -level.
- **Run:** Hier wird eingetragen, wie viele Teilchen simuliert werden sollen.
- **Event:** In diesem Bereich werden die Teilchengeneratoren, die benutzt werden sollen, ausgewählt.
- **Track:** Hier werden Regionen mit den zugehörigen Schritt-Einstellungen definiert. (siehe Unterkapitel 3.3.1)

⁶Standard-Dateiname der KASSIOPEIA-Konfiguration: KASSIOPEIAConfiguration.txt

3.2.2. Datenstruktur

Ein Run ist ein vollständiger Programmdurchlauf, also eine Ausführung von KASSIOPEIA, und setzt sich zusammen aus mehreren Events. Diese wiederum beinhalten jeweils einen oder mehrere Tracks oder auch Teilchenspuren. Der Track eines Teilchens setzt sich zusammen aus seinen Schritten, den Steps. Zusätzlich besitzt jedes Teilchen noch diverse dynamische und statische Variablen, die in ihm direkt gespeichert sind. Im Folgenden werden die einzelnen Teile einer KASSIOPEIA-Ausführung und was in ihnen gespeichert wird, beschrieben.

- **Event:** Events sind Teile eines Runs oder auch Subruns. Werden vom Generator ein oder mehrere Teilchen generiert⁷, so startet ein Event. Im Event stecken jedoch nicht nur die anfänglich generierte Teilchen, sondern auch alle ihre Sekundärteilchen. Daher ist in einem Event auch die Anzahl aller seiner Sekundärteilchen gespeichert. Es besitzt eine Event-ID und einen Vektor in dem alle seine Tracks gespeichert werden.
- **Track:** Als Track wird die Bahn eines einzelnen Teilchens bezeichnet. Dabei spielt es keine Rolle, ob das Teilchen das Primärteilchen des Events oder ein Sekundärteilchen ist. Ein Track setzt sich aus vielen Teilchenschritten zusammen, daher besitzt er einen Vektor, indem alle Steps gespeichert sind. Desweiteren weiß der Track, wie sein Teilchen zu Trackbeginn und -ende aussieht und auch, durch welchen Mechanismus es entstanden ist und aufgrund von welcher Abbruchbedingung das Tracking beendet wurde. Auch das Mutterteilchen des aktuellen Teilchens und alle Sekundärteilchen, die während des Tracks produziert wurden sind bekannt. Zusätzlich sind noch die ursprüngliche ID und der Status gespeichert.
- **Step:** Der Step beschreibt einen einzelnen vom Programm durchgeführten Schritt eines Teilchens. Er speichert das Teilchen zum Schrittbeginn, die Länge eines Schrittes, die Zeit, die für den Schritt benötigt wird und den Energieverlust des Teilchens. Auch die Tracking-Methode, die ausgeführten Prozesse und die Feldstärken, denen das Teilchen ausgesetzt ist, sind hier gespeichert. Auf der Step-Ebene finden also die physikalischen Berechnungen statt.
- **Particle:** Jedes Teilchen besitzt eigene Variablen, welche während der Berechnungen der einzelnen Schritte aufgerufen und benutzt werden. Unterschieden wird hierbei zwischen statischen und dynamischen Variablen. Die statischen Variablen bleiben für den gesamten Track konstant. Zu ihnen gehören die Masse des Teilchens, seine Ladung, die Parent-ID, also die ID seines Mutterteilchens und sein Spin. Zu den dynamischen Variablen, zählen alle Werte, die sich während eines Teilchenschrittes ändern können, wie z.B. die Position, die Geschwindigkeit oder die Energie des Teilchens.

3.3. Geometrie

Wie jedes andere Programm, welches zur Aufzeichnung von Teilchenbahnen genutzt wird, benötigt auch KASSIOPEIA geometrische Informationen. Alle diese Geometrie-Basisobjekte orientieren sich im globalen Koordinatensystem von KASSIOPEIA und werden auf zwei unterschiedliche Weisen benutzt. Geometrische Informationen helfen den Modulen bei ihrer Konfiguration. So können z.B. die Module zur Feld-Berechnung nur funktionieren, wenn ihnen die Positionen von Magneten und Elektroden bekannt ist. Desweiteren sollen die Module zur Schritt-Berechnung mit geometrischen Objekten verbunden werden, so dass

⁷ein Tritiumzerfall erzeugt nur ein Elektron, wohingegen bei einem ^{215}Ra -Zerfall mehrere Elektronen entstehen können

ein auf Geometrie basierender Plan zur Berechnung von einzelnen Schritten und kompletten Teilchenbahnen entsteht. Die geometrischen Objekte sind in der Lage alle wichtigen Berechnungen, welche für Teilchensimulationen benötigt werden, durchzuführen. Hierzu gehört die Bestimmung, ob ein bekannter Punkt sich inner- oder außerhalb einer Geometrie befindet, aber auch die Berechnung des kürzesten Abstands dieses Punktes zur Geometrie. Die erste Version von KASSIOPEIA enthielt nur Kegelstümpfe und aus Kegelstümpfen zusammengesetzte Objekte, "Polycones" genannt. Als Spezialfälle können also auch Kegel und Zylinder dargestellt werden. In den ersten durchgeführten Simulationen wurde ausschließlich mit diesen geometrischen Objekten gearbeitet.

3.3.1. Regionen

Eine Region ist ein Volumen, in dem sich ein Teilchen während der Simulation aufhalten kann. Sie kann eine Mutterregion, sowie Subregionen besitzen. Wichtig ist dabei, dass sich eine Subregion vollständig in ihrer Mutterregion befinden muss. Es darf z.B. zwischen zwei Subregionen derselben Mutterregion kein Überlapp bestehen. Durch diese Einschränkung ist eine Gruppe von Regionen immer wie ein Baum -Diagramm aufgebaut. Diesen Aufbau findet man auch im Programm-Code: Jeder Region kann man ihre Mutterregion, aber auch ihre Subregionen angeben.

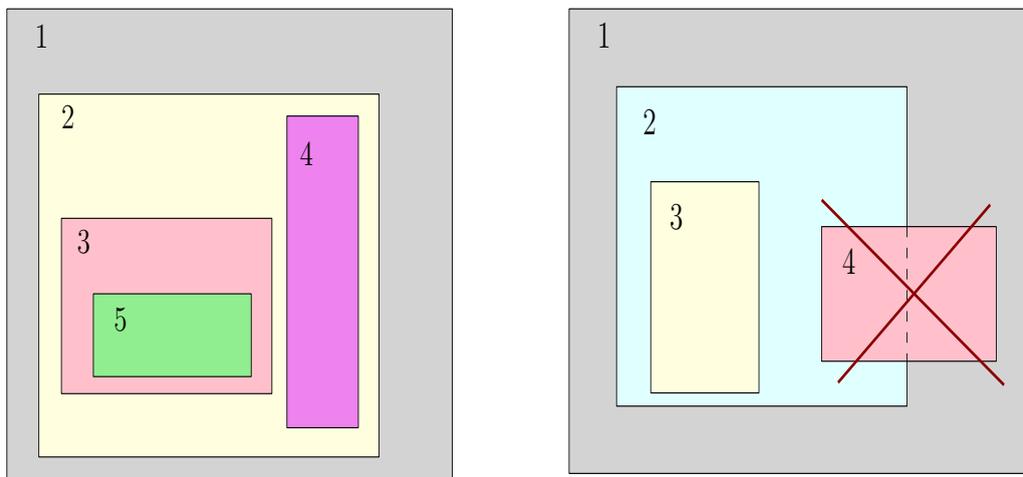


Abbildung 3.2.: Verschachtelung der Regionen in KASSIOPEIA: *links*: Region 1 ist die Mutterregion von Region 2. Diese hat wiederum die Subregionen 3 und 4. Region 3 ist die Mutterregion von Region 5. *rechts*: Ein Überlapp von Regionen ist nicht erlaubt. Somit wäre eine Region, wie hier Region 4, welche nur zu einem Teil in einer anderen Region (hier Region 2) liegt in KASSIOPEIA nicht möglich.

3.3.2. Navigation

Bei der Berechnung einer Teilchenbahn muss KASSIOPEIA wissen, in welcher Region das Teilchen sich gerade befindet. Hierfür ist das Modul "Navigator" zuständig. Ohne diese Information können die passenden Schritt-Konfigurationen nicht aufgerufen werden. Der Navigator iteriert durch die Baumstruktur der Regionen (siehe 3.3.1), findet so die aktuelle Region und gibt die Informationen, welche für die Bahnberechnungen benötigt werden, weiter. Dies geschieht über eine Kommandoliste, die der Navigator während seinem Durchlauf über die Regionen generiert. Abbildung 3.3 zeigt den rekursiven Grundalgorithmus des Navigators.

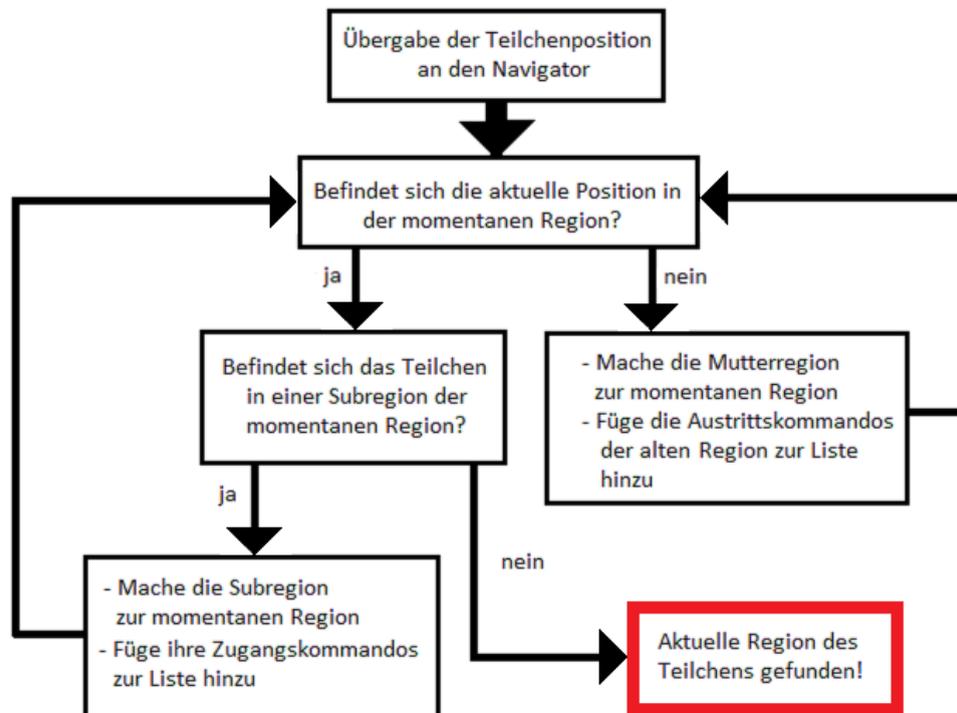


Abbildung 3.3.: Der rekursive Algorithmus des Navigators zur Bestimmung der aktuellen Region: Dem Navigator wird die aktuelle Position des Teilchens übergeben. Er überprüft, ob sich das Teilchen noch immer in der aktuellen Region befindet. Trifft dies zu, wird überprüft, ob sich das Teilchen in einer Subregion der aktuellen Region befindet. Ist dies der Fall, so wird diese Subregion zur aktuellen Region und der Algorithmus startet erneut. Befindet sich das Teilchen in keiner Subregion, so wird der Algorithmus beendet. Die aktuelle Region ist die Region, in der sich das Teilchen aufhält. Befindet sich das Teilchen nicht in der aktuellen Region, so wird die Mutterregion zur aktuellen Region gemacht und der Algorithmus wird erneut gestartet. Wird während der Durchführung des Algorithmus eine Region betreten oder verlassen, so werden deren Eintritts- bzw. Austrittskommandos zur Kommandoliste hinzugefügt. Diese wird dann nach Bestimmung der Position abgearbeitet.

Nach Ablauf dieser Iteration hat der Navigator die momentane Region erfolgreich bestimmt. Durch die Iteration besitzt er nun eine Liste von Ein- und Austrittskommandos, welche er direkt ausführt. Zu diesen Kommandos gehören das Hinzufügen oder Entfernen von Schrittgrößen, Abbruchbedingungen oder auch Feldern, welche nur in einer Region gültig sind. Wird diese Region betreten, so müssen die Eintrittskommandos ausgeführt werden, beim Verlassen müssen sie wieder “ausgeschaltet” werden. Dies ist die Aufgabe des Navigators.

3.3.3. Erweiterung der Geometrie

Für eine spätere Version von KASSIOPEIA ist die Einbindung weiterer geometrischer Objekte geplant. Außerdem soll es eine Unterscheidung zwischen Volumen- und Oberflächenobjekten geben. Die Generierung von Punkten innerhalb eines Volumens oder auf einer Oberfläche soll in der Zukunft vom Objekt selbst durchgeführt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde an diesen Objekten und ihrer Darstellung mit TPolylines gearbeitet. Auch die Erstellung zufälliger Volumen- und Oberflächenpunkte wurde für die neuen Objekte generiert. Gearbeitet wurde an den folgenden Volumen-Objekten:

- zusammengesetzte Kegelstümpfe
- Kegelstumpf, mit den Spezialfällen Zylinder und Kegel
- Kegelstumpf mit Loch, mit dem Spezialfall Rohr
- Torus
- Box

Die geplanten Oberflächenobjekte sind:

- Mantelfläche eines Kegelstumpfes, mit den Spezialfällen Kegel- und Zylinder-Mantelfläche
- Mantelfläche eines Kegelstumpfes mit Loch: Die Generierung der Teilchen würde an der inneren und äußeren Mantelfläche stattfinden.
- Lochscheibe (innerer Radius r_1 , äußerer Radius r_2), mit den Spezialfällen Kreisscheibe ($r_1 = 0$) und Kreis ($r_1 = r_2$)
- Rechteck mit dem Spezialfall Quadrat

Des Weiteren sollen für alle diese Objekte diverse Funktionen integriert werden:

- `IsInside()`: Gibt an, ob sich ein Punkt innerhalb eines Volumens befindet
- `IsNear()`: Gibt an, ob sich ein Punkt in der Nähe des Objektes befindet. Diese Funktion könnte bei Bahnberechnungen benutzt werden um in der Nähe eines Objektes die Schrittgröße zu verringern, z.B. um es nicht zu verfehlen bzw. zu überspringen.
- `MightCross()`: Gibt an, ob die Teilchenbahn im nächsten Schritt das Objekt erreichen könnte. Hierzu wird die maximal mögliche Schrittgröße mit dem kürzesten Abstand zum Objekt verglichen. Gibt diese Abfrage ein ja zurück könnte der aktuelle Schritt genauer betrachtet werden, um eine Berührung entweder auszuschließen oder zu bestätigen.
- `Distance()`: Berechnet die kürzeste Distanz zu einem Objekt. Wird z.B. in der `MightCross()`-Funktion aufgerufen.

Abbildung 3.4 und Abbildung 3.5 zeigen einige dieser Geometrien.

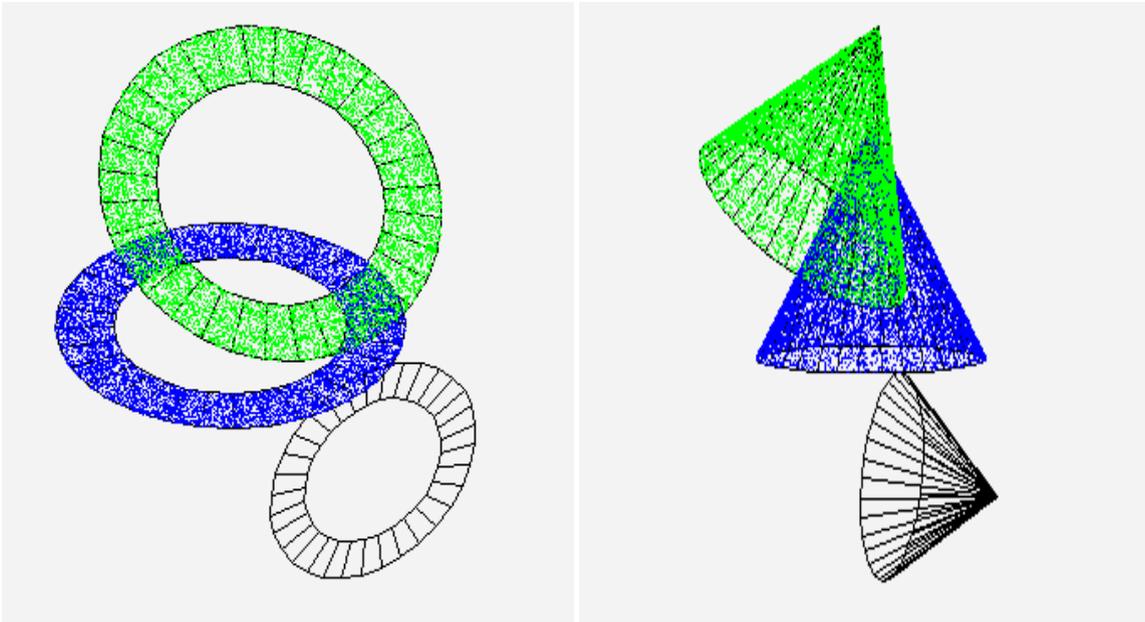


Abbildung 3.4.: Mit TPolyline erstellte Geometrien: verschiedene Transformationen z.T. mit zufallsverteilten Oberflächenpunkten für *links*: Lochscheibe *rechts*: Kegel

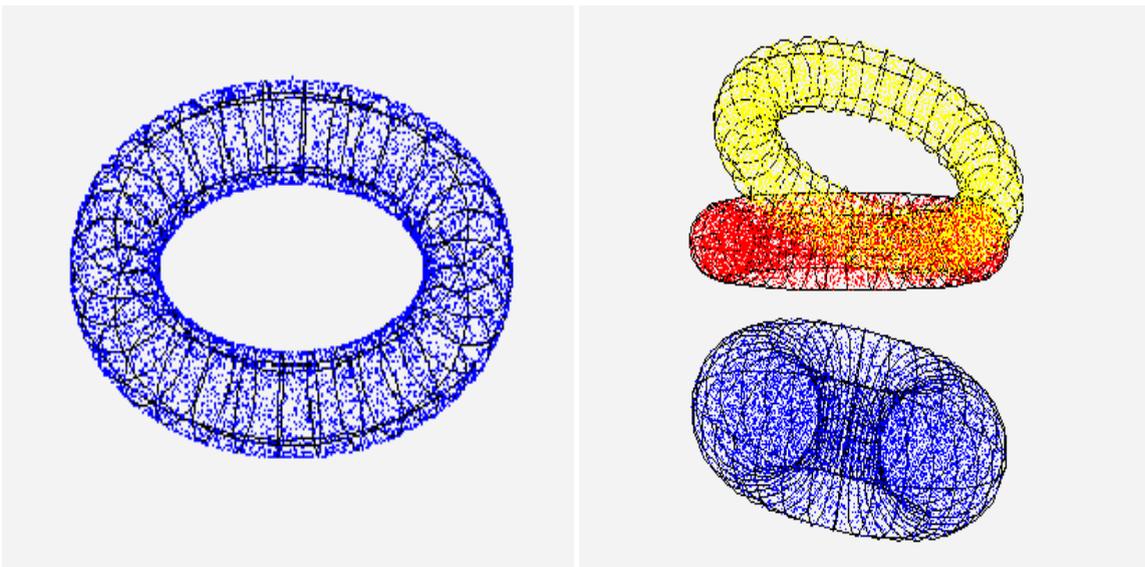


Abbildung 3.5.: Mit TPolyline erstellte Geometrien: Torus *links*: einzelner Torus mit zufallsgenerierten Oberflächenpunkten *rechts*: mehrere Torus-Transformationen mit zufallsgenerierten Volumenpunkten

3.4. Die Managerstruktur

Die einzelnen Teile von KASSIOPEIA können in drei verschiedene Kategorien aufgeteilt werden:

- **Daten-Container:** Basis-Objekte die den Status der Simulation während der Ausführung repräsentieren. Die Daten-Container sind in vier intuitive Detail-Level unterteilt: Runs, Events, Tracks und Steps. Siehe auch Kapitel 3.2.2.
- **Module:** Sind für die Initialisierung und das Updaten der Container Inhalte während dem zeitlichen Verlauf der Simulation verantwortlich.
- **Manager:** Organisation und Kontrolle der Module. Die Manager sorgen dafür, dass die richtigen Module zur richtigen Zeit aktiv sind.

KASSIOPEIA besitzt zusätzlich eine spezielle Art von Manager: die Toolboxen. Eine Toolbox⁸ ist eine C++-Klasse zur Speicherung von Objekten in einer sogenannten "Map". Aufgabe der Toolboxen ist es, die verfügbaren Module zu sammeln und zu organisieren. Die Module werden aus den Toolbox-Konfigurationsdateien (siehe Kapitel 3.2.1) vom sogenannten "Tokeniser" eingelesen und anschließend erstellt der "Builder" die passenden C++-Objekte. Jede Toolbox besitzt eine Add()- und eine Get()-Funktion. Mit der Add()-Funktion werden Objekte aus den Konfigurationsdateien zu der Map hinzugefügt. Die Get()-Funktion ermöglicht es dem Programm Objekte aus der Toolbox herauszuholen. KASSIOPEIA besitzt 5 verschiedene Toolboxen, entsprechend den Benutzer- Konfigurationsdateien:

- **Geometrie-Toolbox:** Beinhaltet alle Geometrie-Daten, die für die Berechnungen benötigt werden, auch die verschiedenen Regionen, von welchen die Berechnungsstrategie KASSIOPEIAS abhängt. Die Regionen sind als Subregionen der gespeicherten Root-Region in ihrer Baum-Struktur gespeichert.(siehe Kapitel 3.3)
- **Feld-Toolbox:** Hier werden alle Module gespeichert, die für die Feldberechnungen benötigt werden. Diese Module werden auch von anderen Modulen zur Ausführung ihrer Berechnung benötigt. So sind z.B. Bahnberechnungen nicht ohne die Kenntnis der vorliegenden Feldstärken möglich.
- **SSC-Toolbox:** Hier sind die Komponenten des SSC-Pakets von KASSIOPEIA gespeichert. Dieses wird für detaillierte Simulationen der WGTS benötigt. Meistens wird es auf dem Event-Level der Programmstruktur benutzt, jedoch enthält es auch spezielle Daten zu Streu-Berechnungen die auf dem Step-Level aufgerufen werden können.
- **Generator-Toolbox:** Enthält die verfügbaren Teilchen-Generatoren. Diese sind nötig zur Initialisierung von Events und der darin enthaltenen ersten Tracks.
- **Schritt-Strategie-Toolbox:** Diese Toolbox enthält die drei Modultypen, die für die Schrittberechnungen benötigt werden: Schrittgröße, Abbruchbedingungen, (physikalische) Prozesse.

Es ist zu beachten, dass nicht alle Objekte, welche in den Toolboxen abgelegt sind, auch tatsächlich benutzt werden. Die Toolboxen sind nur eine Ansammlung an benutzbaren Objekten. Die aktuell benutzten Objekte werden aus den Toolboxen in die passende Root-klasse geladen. Von hier aus werden sie dann vom Programm genutzt.

⁸deutsch: Werkzeugbox

3.5. Output

Das Standard-Format für alle Ausgaben von KASSIOPEIA ist ROOT TTree. Die TTrees werden in einem TFile gespeichert. Zur Ausgabe der physikalischen Daten kann zwischen zwei standardisierten Formaten gewählt werden. Beide besitzen die Event/Track/Step-Hierarchie. Bestimmt wird das Ausgabe-Format in der globalen Konfigurationsdatei. [KASS]

- TClonesArray: Dieses Format ist das Standard-Ausgabe-Format. Das TFile beinhaltet einen TTree mit KMCEvents⁹. In diesem TTree sind außerdem Track- und Stepdaten mittels TClonesArrays, also Feldern, gespeichert.
- ThreeTrees: Dieses Format wird empfohlen, wenn man den TTreeView von Root zur Datenbetrachtung benutzen möchte, ist jedoch langsamer als TClonesArrays. Die TFile besitzt drei Trees: Je einen für Event-, Track- und Stepdaten. Dies ist vor allem bei Simulationen mit großen Schrittzahlen praktisch.

⁹Kinetic Monte Carlo-Events

4. Berechnungen des elektrischen Potentials und Feldes

Der Erfolg des KATRIN-Experimentes ist sehr stark von der Genauigkeit der erzeugten Felder abhängig. Um Berechnungen für das elektro-magnetische Design durchzuführen oder um nach möglichen Fehlerquellen zu suchen, welche die Teilchenbahnen im Experiment beeinflussen, ist die Durchführung sehr präziser Feld-Simulationen unverzichtbar. Daher ist es ein Ziel, die Berechnungsmethoden von KASSIPEIA immer weiter zu optimieren. Im Rahmen dieser Diplomarbeit erfolgte eine intensive Auseinandersetzung mit diesen Methoden zur Berechnung des elektrischen Potentials und des elektrischen Feldes. Dieses Kapitel stellt die verwendeten Methoden vor.

4.1. Die Randelementmethode

Durch die Diskretisierung einer Oberfläche in kleinere Oberflächenelemente ist es dem Benutzer möglich, jede komplexe Form darzustellen. Hierbei wird der Detailgrad der Darstellung selbst gewählt. So kann durch größere Elemente eine vereinfachte Darstellung mit kurzer Rechenzeit, oder aber eine sehr detailreiche Darstellung mit genaueren, aber dafür langsameren Berechnungen gewählt werden. Wird eine Elektrode in N Subelemente S_j unterteilt, so kann ihre Geometrie S durch die Summe dieser Elemente beschrieben werden:

$$S = \sum_{j=1}^N S_j \quad (4.1)$$

Um das Potential der Geometrie S an einem Ort \vec{r} zu erhalten, muss über die Ladungsdichte aller Subelemente integriert werden:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} d^2\vec{r}_s \quad (4.2)$$

Es wird angenommen, dass die Ladungsdichte innerhalb eines Subelementes konstant ist. Normalerweise sind die Ladungsdichten jedoch nicht bekannt. Mithilfe eines Gleichungssystems, welches die Ladungsdichten mit den an den Elektroden angelegten und bekannten Spannungen in Relation setzt, können sie berechnet werden.

$$U_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \sigma_j \quad (4.3)$$

C_{ij} ist hierbei das Coulomb-Matrix-Element. Es ist ein geometrischer Faktor und kann als das elektrische Potential verursacht vom Subelement j im Mittelpunkt des Subelements i betrachtet werden.

$$C_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{S_j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_s|} d^2\vec{r}_s = \phi(\vec{r}_i, S_j(\sigma_j = 1)) \quad (4.4)$$

Löst man nun das Gleichungssystem 4.3¹, so liefert es uns die Ladungsdichten der einzelnen Subelemente.

Einige Elektroden des KATRIN-Experiments können leicht als Konen beschrieben werden, da sie in guter Näherung rotationssymmetrisch sind. Dazu nimmt man ein konisches Subelement an, welches durch zwei Punkte (z_a, r_a) und (z_b, r_b) beschrieben wird. Dieses Element kann nun durch eine Summe aus infinitesimal dünnen geladenen Ringen ausgedrückt werden:

$$Z = z_a + (z_b - z_a) \cdot \frac{p}{L} \quad (4.5)$$

$$R = r_a + (r_b - r_a) \cdot \frac{p}{L} \quad (4.6)$$

Der Parameter p ist die Distanz eines beliebigen Punktes des Subelements (Z, R) zum Punkt (z_a, r_a) . $L = \sqrt{(z_b - z_a)^2 + (r_b - r_a)^2}$ ist die Länge des Liniensegmentes. Das elektrische Potential für einen dieser Ringe mit Radius R und axialer Koordinate Z und Ladung Q an einem beliebigen Punkt $P(r, z)$ lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{K(k)}{S} \quad (4.7)$$

mit

$$k = \frac{2\sqrt{Rr}}{S} \quad S = \sqrt{(R+r)^2 + (z-Z)^2} \quad (4.8)$$

Figur 4.1 zeigt die Parameter dieser Berechnung in der r - z -Ebene.

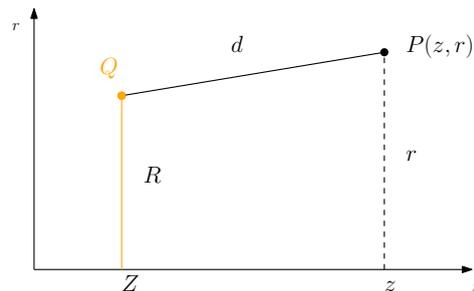


Abbildung 4.1.: Skizze in der r - z -Ebene

¹z.B. mittels Gauss-Jordan-Algorithmus

$K(k)$ ist hierbei das erste elliptische Integral:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.9)$$

Führt man eine numerische Integration dieser Formel durch, so kann das Potential eines konischen Subelementes mit konstanter Ladungsdichte bestimmt werden. Nimmt man die Infinitessimalladung $dQ = 2\pi\sigma R dp$ eines Ringes, so ergibt sich für das Potential folgendes Integral:

$$\phi = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^L \frac{RK(k)}{S} dp \quad (4.10)$$

Befindet man sich nahe am aktuellen Subelement so besitzt die Lösung des Integrals einen Peak. Um dies zu vermeiden wird die Integrationsregion in kleinere Subintervalle unterteilt, in welchen der Integrand keine Divergenzen aufweist.

4.2. Legendre-Polynom-Entwicklung

Liegt eine axialsymmetrische Geometrie vor und sollen das elektrische Potential und Feld dieser Geometrie in einem Punkt $\vec{p}(r, z)$ nahe der Symmetrieachse bestimmt werden, so kann dies mittels Legendre-Polynomen getan werden. Hierfür benutzt man Terme der Legendre-Polynom-Entwicklung und ihre Ableitungen am Punkt z_0 . Der Parameter z_0 ist ein sogenannter "Sourcepoint" oder Quellpunkt und befindet sich auf der Symmetrieachse. In Abhängigkeit vom Abstand zwischen Sourcepoint und Feldpunkt werden zwei unterschiedliche Entwicklungen benutzt [Gli09]. Ist der Abstand zwischen Sourcepoint und Feldpunkt ρ kleiner als der minimale Abstand zwischen dem Sourcepoint und der Elektrode ($\rho < \rho_{cen}$), so wird die zentrale Entwicklung benutzt:

$$\begin{aligned} \Phi(z, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P_n(u) \\ E_z(z, r) &= -\frac{1}{\rho_{cen}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \phi_{n+1}^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P_n(u) \\ E_r(z, r) &= \frac{s}{\rho_{cen}} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}^{cen} \left(\frac{\rho}{\rho_{cen}} \right)^n P'_n(u) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$P_n(u)$ sind die Legendre Polynome, $P'_n(u)$ ihre Ableitungen und ϕ_n^{cen} ist der zentrale Source-Koeffizient. Der minimale Abstand zwischen Sourcepoint und Geometrie ρ_{cen} wird zentraler Konvergenzradius genannt. Die Gleichungen 4.11 sind nur innerhalb dieses Radius gültig.

Um Feld und Potential auch außerhalb des zentralen Konvergenzradius bestimmen zu können wird eine zweite Entwicklung benutzt. Diese Entwicklung ist nur außerhalb des Fernkonvergenzradius gültig. Der Fernkonvergenzradius ρ_{rem} ² ist der maximale Abstand zwischen Sourcepoint und Geometrie. Gilt also $\rho > \rho_{rem}$, so werden die folgenden Formeln zur Feld- und Potentialberechnung verwendet:

²remote

$$\begin{aligned}
\Phi(z, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{rem} \left(\frac{\rho_{rem}}{\rho} \right)^{n+1} P_n(u) \\
\varepsilon_z(z, r) &= \frac{1}{\rho_{rem}} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \phi_{n-1}^{rem} \left(\frac{\rho_{rem}}{\rho} \right)^{n+1} P_n(u) \\
\varepsilon_r(z, r) &= \frac{s}{\rho_{rem}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n-1}^{rem} \left(\frac{\rho_{rem}}{\rho} \right)^{n+1} P'_n(u)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ϕ_n^{rem} ist der zugehörige Source-Koeffizient. Die Source-Koeffizienten werden über die Oberflächen- und Volumenladung der Elektrode bestimmt [Glü09]. Die Berechnung mittels Legendre-Polynomen ist wesentlich schneller als die Berechnung mittels elliptischer Integrale und funktioniert nahezu überall. Jedoch benötigt sie zur Bestimmung der Source-Koeffizienten und der Sourcepoints die mittels REM berechneten Ladungsdichten der Subelemente. Nahe an den Elektroden ist die Entwicklung ungültig. In diesen Bereichen muss auf elliptische Integrale zurückgegriffen werden.

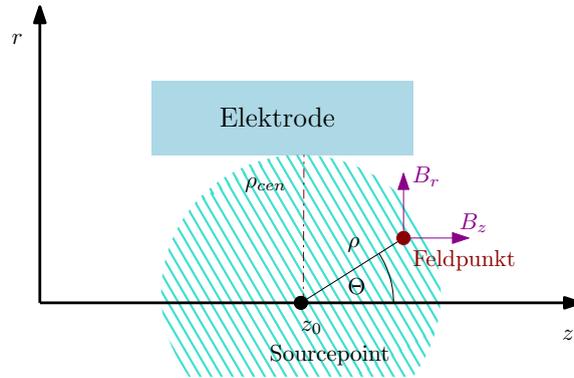


Abbildung 4.2.: Ist der Abstand des Feldpunktes zum Sourcepoint kleiner als der innere Konvergenzradius so wird zur Berechnung von Feld und Potential die zentrale Legendre-Polynom-Entwicklung benutzt (siehe Gleichung 4.11). In blau schraffiert ist der Bereich, in dem die Entwicklung für den gegebenen Sourcepoint benutzt werden kann.

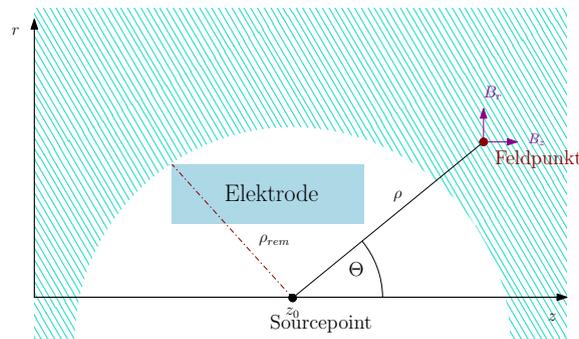


Abbildung 4.3.: Ist der Abstand des Feldpunktes zum Sourcepoint größer als der äußere Konvergenzradius so wird zur Berechnung von Feld und Potential die äußere Legendre-Polynom-Entwicklung benutzt (siehe Gleichung 4.12). In blau schraffiert ist der Bereich, in dem die Entwicklung für den gegebenen Sourcepoint benutzt werden kann.

5. Testanordnung für vereinfachte Simulationen

Zur Durchführung erster Tests und zum Test der verschiedenen, in KASSIOPEIA vorhandenen Berechnungsmethoden, wurde eine vereinfachte Geometrie erstellt. Anhand dieser Geometrie konnte eine vereinfachte Betrachtung des Drahtsystems bei $z=0$ durchgeführt werden. Dieses Kapitel beschreibt diese Geometrie und zeigt die Ergebnisse der durchgeführten Simulationen. Des Weiteren folgt ein Rechenzeitvergleich mit Berechnungen im Hauptspektrometer.

5.1. Die vereinfachte Geometrie

Um das Drahtsystem bei $z=0$ in der x - y -Ebene simulieren zu können, wurde als Geometrie ein 10 m langer Zylinder mit einem Radius von 4,9 m benutzt. Die Drähte waren ebenfalls 10 m lang und hatten einen Abstand zur Zylinderwand von 15 cm. Um eine korrekte zweidimensionale Simulation durchzuführen, müssten Zylinder und Drähte unendlich lang sein. Daher wurden zusätzlich einige Simulationen mit längeren Zylindern durchgeführt. Diese lieferten jedoch nahezu identische Ergebnisse, woraufhin beschlossen wurde, dass eine Länge von 10 m ausreichend ist. Zylinder und Drähte wurden mit `elfield32ferenc` und mit `ELCD33` erstellt. Eine Schwierigkeit ergab sich im `ELCD33`-File, da `ELCD33` nicht wie `elfield32ferenc` mit Konen und Drähten, sondern mit Rechtecken und Drähten arbeitet. Es wurde daher ein Mini-Programm namens `FileCreator.cxx` zur Erstellung des `ELCD33`-Files geschrieben.

5.2. Vergleich zwischen `Elfield32Ferenc` und `ELCD33`

Bevor erste Simulationen durchgeführt wurden, wurden mittels `TestELCD` von Benjamin Leiber die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden verglichen. Nachdem ein Bug in `Elfield32Ferenc` behoben wurde, stimmten die Ergebnisse recht gut überein. Wurde das Potential entlang der z -Achse bestimmt und verglichen, so lieferten beide Rechnungsarten, auf fünfzehn Nachkommastellen genau, dasselbe Ergebnis. Auch in der xy -Ebene wurden gute Übereinstimmungen festgestellt. Nur nahe der Tankwand gab es größere Abweichungen. Diese lassen sich über die Darstellung der Wand mit Rechtecken in `ELCD33` erklären. Wurde die Anzahl der Rechtecke, die zur Bildung des Zylinders benutzt wurden erhöht, so konnten bessere Übereinstimmungen erzielt werden. Auch die Anzahl der Fragmente in z -Richtung war entscheidend für die Simulation. Sowohl bei `Elfield32Ferenc` als auch

bei ELCD33 stieg die Genauigkeit der Berechnungen mit besserer Diskretisierung. Wurde die Diskretisierung für das ELCD33 File jedoch zu gut gewählt, entstanden wieder größere Abweichungen. Ursache dieser Abweichungen ist die vom Programm durchgeführte Punktladungs-Approximation 5.2.1. Nachdem diese deaktiviert wurde, stimmten die Ergebnisse wieder besser überein.

5.2.1. Punktladungs-Approximation in ELCD33

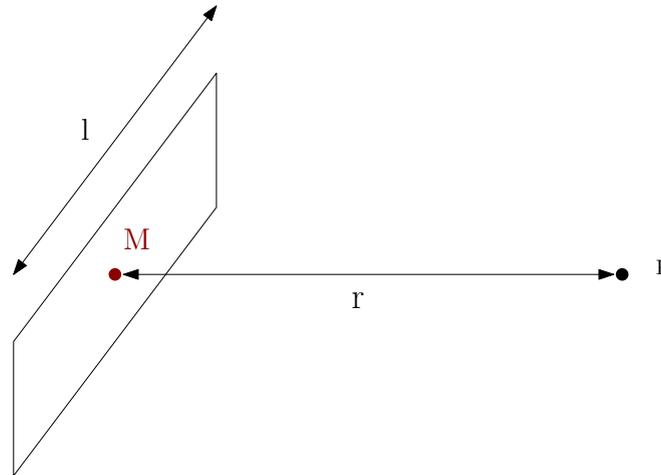


Abbildung 5.1.: Anwendung der Punktladungs-Approximation: Sei die längste Kante eines Rechtecks l . Bei Anwendung der Punktladungs-Approximation wird, ab einem gewissen Abstand r eines Punktes P zu einem Rechteck, das Rechteck nicht mehr als solches, sondern als eine Punktladung mit Ladung des Rechtecks betrachtet. Diese Punktladung befindet sich im Mittelpunkt M des Rechtecks

In KASSIOPEIA wurde gesetzt, dass ab einem Abstand zum Rechteck $r > l \cdot 40$ die Punktladungs-Approximation verwendet wird. Das Rechteck wird dann als Punktladung genähert. Sein elektrisches Feld und Potential werden mit den Formeln für eine Punktladung berechnet (Siehe Gleichung 6.2 und 6.4). Dieser Abstand ist noch zu klein, und so entsteht, sobald r den Wert $l \cdot 40$ überschreitet, ein Sprung im berechneten elektrischen Feld.

5.3. Simulationen

Nachdem eine gute Übereinstimmung der Werte der beiden Berechnungsmethoden erzielt wurde, wurden alle Simulationen aufgrund der größeren Genauigkeit im Bereich der Drähte mit Elfield32ferenc durchgeführt. Elfield32ferenc benutzt 2 verschiedenen Berechnungsmethoden: Legendre-Polynome und elliptische Integrale (Siehe Kapitel 4). Zuerst wurden Werte und Berechnungszeiten der beiden Methoden verglichen, später wurde dann das Ablenken der Elektronen durch die Drähte und die Energie- und Winkelabhängigkeit dieser untersucht.

5.3.1. Legendre-Polynome und elliptische Integrale

Es wurde bestätigt, dass die Berechnung des Potentials mittels Legendre-Polynomen nur nahe der z -Achse gut funktioniert. Befindet sich der Feldpunkt nahe an der Tankwand, so divergiert die Funktion und liefert keine brauchbaren Ergebnisse. Daher wurde beschlossen

für die folgenden Simulationen nahe der Drähte nur mit elliptischen Integralen zu rechnen. Es wurde aber zusätzlich noch mit TestELCD ein Geschwindigkeitsvergleich nahe der z-Achse durchgeführt. Dafür wurden 10 Schritte bei denen mit einer der beiden Berechnungsmethoden das Potential bestimmt wurde, 100000-mal wiederholt und die Start- und Endzeit wurden bestimmt. Anschließend wurde durch die Anzahl der Wiederholungen normiert. Mit elliptischen Integralen wurde eine Zeit von ca. 50 ms pro Run gemessen. Die Berechnung mit Legendre-Polynomen dauerte für den ersten Run 0,05 ms und für alle weiteren 0,008 ms. Somit ist sie wesentlich schneller als die Berechnung mit elliptischen Integralen.

5.3.2. Berechnungen nahe der Drähte

Nach den vorbereitenden Tests wurde eine erste Simulation des Testzylinders mit KAS-SIOPEIA gestartet. Für diese Simulation wurde ein einfacher zweidimensionaler Generator entworfen. Dieser startete Elektronen an einem Punkt nahe der Tankwand mit einer isotropen Winkelverteilung und Winkelspanne in der x-y-Ebene von 10° . In z- Richtung wurde der Winkel nicht variiert, sodass alle Teilchen senkrecht zur z-Achse gestartet wurden. Der Zylinder lag auf einem Potential von -18400 V, die Drähte auf -18500V. Um neben der Rechenzeit-Messung noch zu untersuchen, welche niederenergetischen Elektronen es durch die Drähte schaffen, wurden Energien zwischen 5 und 100 eV gewählt. Theoretisch sollten Elektronen bis 100 eV vom Drahtsystem abgeschirmt werden. Somit sollte keines dieser generierten Teilchen durch die Drähte vorstoßen können. Die Magnetfelder wurden für die Simulation deaktiviert. Benutzt wurden die folgenden sechs Abbruchbedingungen:

- WiresPassed: Ins Innere der Drähte wurde ein Zylinder gelegt. Wenn die Elektronen diesen erreichten, wurde die weitere Simulation abgebrochen.
- VesselHit: Wurden die Elektronen von den Drähten erfolgreich reflektiert und kamen in den Bereich des äußeren Zylinders, so wurden sie mit der Abbruchbedingung Death gestoppt.
- WireHit: Um die 3 Drähte, die dem Startpunkt der Elektronen am nächsten waren wurden kleine Zylinder gelegt. Für jeden dieser Zylinder wurde eine eigene Abbruchbedingung vom Typ GeometryHit geschrieben.
- MaxStep: Es wurde eine maximale Schrittzahl von 10000 gesetzt.

Als maximale Schrittgröße wurden 0,1 mm gesetzt. In der ersten Simulation wurden 20 Jobs mit je 10 Events gestartet. Abbildung 5.2 zeigt die Teilchenbahnen eines durchgeführten Runs. Bei der Auswertung wurde festgestellt, dass alle Elektronen entweder die Drähte passiert haben oder erfolgreich abgelenkt wurden. Keine der anderen Abbruchbedingungen wurde ausgelöst. 159 der 200 Elektronen wurden erfolgreich vom Drahtsystem abgeschirmt, 41 konnten die Drähte passieren. Die Startenergie dieser Elektronen wurde genauer betrachtet. Es wurde festgestellt, dass es Elektronen ab einer Energie von 82,1 eV gelang, die Drähte zu passieren. Die erfolgreich abgelenkten Elektronen hatten eine Energie zwischen 0 und 82,7 eV. Somit gibt es einen sicheren Bereich bis 82,1eV. Zwischen 82,1 und 82,7 eV befindet sich ein Übergangsbereich, in dem einige Elektronen abgeschirmt werden, aber andere es schaffen, die Drähte zu passieren. Ab einer Startenergie von 82,7eV gelang es allen Elektronen die Drähte zu passieren. Da alle simulierten Elektronen sehr steil auf das Drahtsystem trafen, wurde beschlossen, nach der Zeitauswertung eine weitere Simulation mit größerer Winkelspanne zu starten.

Die Zeitauswertung ergab eine durchschnittliche Berechnungsdauer von 1,34 s pro Schritt. Diese Zeit wird später mit der durchschnittlichen Berechnungsdauer eines Schrittes mit der realen Hauptspektrometer-Geometrie verglichen. Im Durchschnitt führte ein Teilchen

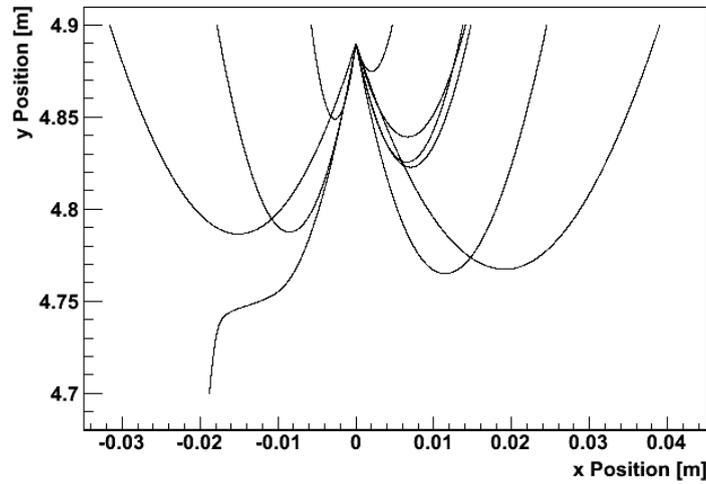


Abbildung 5.2.: Plot möglicher Teilchenbahnen: Die Drähte befinden sich ca. bei $y=4,75\text{m}$, die Tankwand bei $4,9\text{m}$. Je geringer die Energie eines Elektrons ist, desto früher wird es von den Drähten abgelenkt und trifft auf die Tankwand. In diesem Plot hat es ein Teilchen geschafft das Drahtsystem zu passieren.

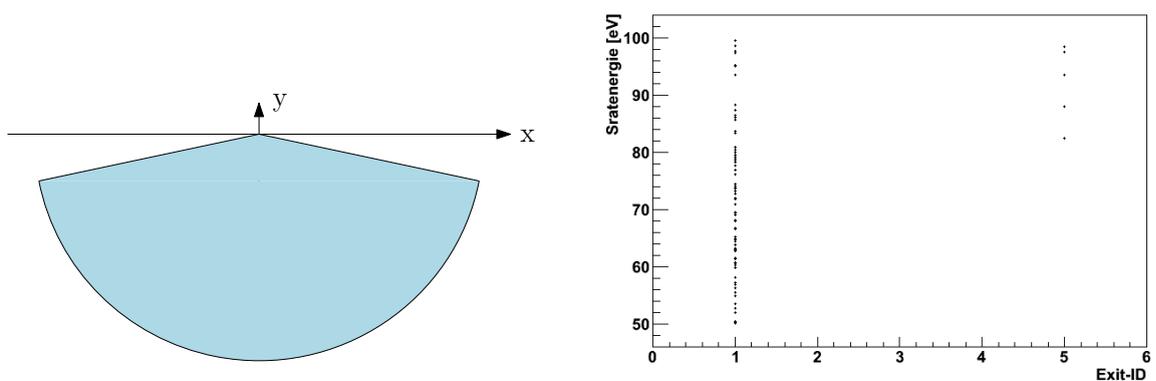


Abbildung 5.3.: Energieabhängigkeit der Exit-ID-Verteilung *links*: Winkelverteilung der Elektronen *rechts*: Exit-ID in Abhängigkeit von der Energie. Teilchen mit Exit-ID 1 wurden erfolgreich vom Drahtsystem abgelenkt, Teilchen mit Exit-ID 5 haben die Drähte passiert.

2470 Schritte aus. Somit dauerte die Simulation eines Teilchen im Durchschnitt 55 Minuten und die Berechnung eines Runs aus 10 Events etwa 9 Stunden.

5.3.3. Untersuchung der Winkelverteilung

In der folgenden Simulation wurde die Winkelverteilung genauer untersucht. Es wurde dafür eine Energieverteilung von 50 bis 100 eV gewählt. In den verschiedenen Durchgängen wurden die Winkel variiert. Ein Startwinkel von 270° bedeutet dabei, dass das Teilchen senkrecht nach unten in Richtung der Drähte fliegt. Es wurden insgesamt 5 Konfigurationen getestet. Für jede Konfiguration wurden 10 Jobs mit je 10 Events gestartet. In Abhängigkeit vom Winkel wurde dann überprüft, ab welcher Energie es Elektronen durch das Drahtsystem schaffen. Tabelle 5.1 zeigt die Ergebnisse.

Tabelle 5.1.: Test der Abschirmung einfallender Elektronen durch ein Drahtsystem in Abhängigkeit vom Einfallswinkel.

Winkelspanne[°]	schaffen es Elektronen durch die Drähte	Energie[eV]
185-355	ja	82,5
185-205	nein	-
205-225	nein	-
225-245	nein	-
245-270	ja	90

Da es erst Elektronen ab einem Einfallswinkel von 245° geschafft haben, das Drahtsystem zu passieren, wurde beschlossen, diesen Bereich genauer zu untersuchen, um eine bessere Statistik zu bekommen. Zusätzlich wurde noch eine Simulation im Winkelbereich von 185° bis 145° gestartet, um zu überprüfen, ob es in diesem Bereich definitiv keine Elektronen durch das Drahtsystem hindurch schaffen. In diesem Bereich wurden 20 Jobs mit je 15 Events losgeschickt. Zwischen 240° und 270° wurden in 5° Schritten je 20 Jobs mit 10 Events losgeschickt. Tabelle 5.2 zeigt die Ergebnisse dieser Simulationen.

Tabelle 5.2.: weiterer Test der Abschirmung einfallender Elektronen durch ein Drahtsystem in Abhängigkeit vom Einfallswinkel. Genauere Betrachtung steilerer Einfallswinkel.

Winkelspanne[°]	schaffen es Elektronen durch die Drähte	Energie[eV]
185-245	nein	-
240-245	nein	-
245-250	ja	96,5
250-255	ja	90,5
255-260	ja	87,5
260-265	ja	83,5
265-270	ja	82

Die Ergebnisse der Simulationen zeigen, dass die Energie, die ein Elektron benötigt um die Drähte zu passieren, mit steilerem Einfallswinkel abnimmt.

5.3.4. Simulation mit der Hauptspektrometer-Geometrie

Im Anschluss an die Simulationen mit der vereinfachten Test-Geometrie wurde eine Simulation mit der Geometrie des Hauptspektrometers gestartet. Für diese Simulation wurde der Startwinkel der Elektronen auch in z-Richtung variiert. Als Magnetfeld wurde ein

asymmetrisches Magnetfeld¹ gewählt, welches durch Spulen an einer Seite des Spektrometers erzeugt wurde. Als Abbruchbedingungen wurden PassedWires, VesselHit, MaxSteps und z-Position gewählt. Als maximale Schrittzahl wurden 100000 Schritte gewählt, als Schrittgröße 0,0001 m. Gestartet wurden 10 Jobs mit je 10 Events. Der längste Job lief 70 Stunden. Im Durchschnitt legte ein Teilchen 2192 Schritte zurück und die Berechnung eines Schrittes dauerte 5,5 Sekunden. Die Berechnungen von Teilchen mit der originalen Hauptspektrometer-Geometrie dauert also etwa 4-mal länger als die Berechnungen im Test-Zylinder. Nimmt man an, dass ein Teilchen sich gerade auf die Drähte zubewegt und dass die Drähte 15 cm vom der Tankwand entfernt sind, so würde man mit der durchschnittlichen Berechnungszeit für einen Schritt eine Mindestrechenzeit für den Weg von der Wand zu den Drähten von 2,3 Stunden erhalten. Kapitel 6 beschäftigt sich mit Methoden zur Reduzierung dieser Rechenzeit.

¹Verwendete Datei: Inputfile one_sided_coils.mag3

6. Methoden zur Beschleunigung der Feld- und Potentialberechnungen im Bereich der Drähte

Alle Bisherigen Simulationen mit KASSIOPEIA werden erst innerhalb des Drahtsystems gestartet, da die Berechnung von Teilchenbahnen in unmittelbarer Nähe des Drahtsystems bisher noch nicht exakt funktioniert. Die Berechnung mittels Legendre-Polynomen versagt in Drahtnähe aufgrund der divergierenden Reihenentwicklung und auch die Lösung mit elliptischen Integralen liefert nahe dem Durchgangspunkt keine korrekten Werte für Felder und Potential. Die einzige Möglichkeit bisher ist die Verwendung der exakten Lösung. Die Berechnung mittels der exakten Lösung würde jedoch in einem Spektrometer von nahezu 20 m Länge mit einem aus 1200 Drähten bestehenden, sehr gut diskretisiertem Drahtsystem sehr lange dauern. Im Rahmen dieser Arbeit wurden verschiedene Näherungsmethoden zur Beschleunigung der Potential- und Feldberechnungen im Bereich des Drahtsystems getestet. Es wurden zuerst Tests in vereinfachten Systemen durchgeführt, um die einzelnen Methoden nicht nur auf ihre Geschwindigkeit, sondern vor allem auch auf ihre Genauigkeit zu überprüfen. Später dann wurde die beste Näherungsmethode in KASSIOPEIA implementiert und dort erneut getestet. Das folgende Kapitel stellt diese Methoden und die Ergebnisse der durchgeführten Tests vor.

6.1. die Grundidee

Ein großer Vorteil für die Berechnungen ist, dass das Drahtsystem des Hauptspektrometers als nahezu axialsymmetrisch betrachtet werden kann. So kann das System in viele axialsymmetrische Kegelstümpfe aus Drahtsegmenten zerlegt werden. Auf diese wird dann die Näherung angewandt. Nur in einem Raumbereich nahe dem Durchgangspunkt muss für die einzelnen Drähte eines Kegelstumpfes die exakte Lösung berechnet werden, für die restlichen Subelemente wird die Näherung angewandt. Alle untersuchten Näherungsmethoden basieren auf elliptischen Integralen (siehe Kapitel 4.1), jedoch wurden Ladungsverteilung und Abstand der einzelnen Ringe variiert. Das Ziel für die Berechnung von elektrischem Feld und Potential des Drahtsystems war es, eine möglichst schnelle Berechnungsmethode mit hoher Genauigkeit zu finden. Dabei wurden zuerst Tests mit einem Ring aus gleichmäßig angeordneten identischen Punktladungen durchgeführt. Anschließend wurde ein einzelner Draht betrachtet und daraufhin dann ein Ring aus gleichmäßig angeordneten identischen Drähten.

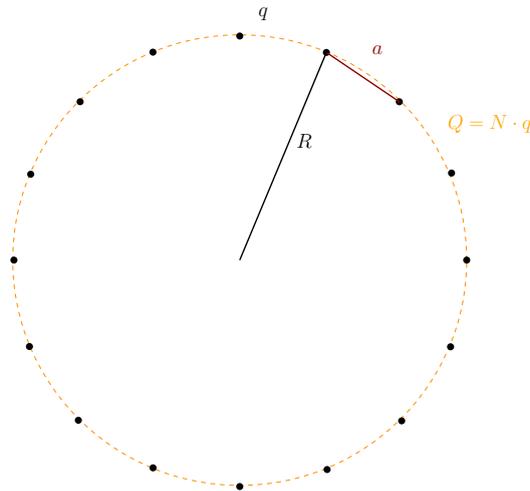


Abbildung 6.1.: Ein Ring aus N gleichverteilten Punktladungen q wird genähert mit einem Ring der Ladung $Q = N \cdot q$.

6.2. Tests der elliptischen Integrale für einen Ring aus Punktladungen

Da die zu entwickelnde Näherung elliptische Integrale benutzen soll, wurde zuerst getestet, ab welchem Abstand Feld- und Potentialberechnungen mit elliptischen Integralen Ergebnisse mit ausreichender Genauigkeit liefern. Hierzu wurde ein Ring aus N gleichmäßig verteilten, identischen Punktladungen q benutzt. Der Radius dieses Ringes sei R und seine axiale Position sei Z . Somit ergibt sich für die Gesamtladung Q des Ringes $Q = N \cdot q$. Dieser Ring lässt sich als ein infinitesimal dünner Ring mit der gleichmäßig verteilten Gesamtladung Q nähern. Potential und Feld dieses Ringes lassen sich dann mittels elliptischen Integralen (siehe Kapitel 4.1) approximieren. An verschiedenen Punkten $P(r, z, \varphi)$ mit unterschiedlichen Abständen zum Ring wurden elektrisches Potential und Feld zum einen mittels exakter Lösung und zum anderen mittels elliptischer Integrale berechnet. Anschließend wurden die Ergebnisse miteinander verglichen.

6.2.1. exakte Lösung

Betrachtet wird ein Ring aus N gleichmäßig verteilten, identischen Punktladungen q . Für das elektrische Potential ϕ an einem Ort P gilt:

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \tag{6.1}$$

$$\phi_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{P} - \vec{P}_i|} \tag{6.2}$$

mit

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{P}_i = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\varphi_i \\ R \cdot \sin\varphi_i \\ Z \end{pmatrix} \quad \varphi_i = i \cdot \frac{2\pi}{N} \tag{6.3}$$

P_i sei der Ortsvektor zur Ladung i . Für das elektrische Feld am Ort P gilt:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (6.4)$$

\vec{E}_i sei der elektrische Feldvektor einer Punktladung. Es gilt:

$$\vec{E}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} - \vec{P}_i}{|\vec{P} - \vec{P}_i|^3} \quad (6.5)$$

Wenn nur der Betrag des elektrischen Feldes verglichen werden soll ist es wichtig, dass zuerst alle Feldvektoren der einzelnen Punktladungen addiert werden. Anschließend wird der Betrag des Gesamtvektors berechnet. Berechnet man nur die Beträge der einzelnen Vektoren und addiert diese, so ist das Ergebnis fehlerhaft.

6.2.2. Die Approximation

Ist der Punkt P ausreichend von den Punktladungen entfernt, so kann man die Punktladungen mit einem infinitesimal dünnen Ring mit der Ladung $Q = N \cdot q$ nähern. Das Potential dieses Ringes am Punkt P lässt sich mit Gleichung 4.7 bestimmen.

Für die Berechnung des elektrischen Feldes wird zusätzlich noch das zweite elliptische Integral benötigt:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (6.6)$$

Des Weiteren wird der folgende Term benötigt:

$$H(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k^2} \quad (6.7)$$

$K(k)$ ist wieder das erste elliptische Integral (siehe Gleichung 4.9).

Die z- und r-Komponenten des Feldes eines Ringes (R,Z) am Punkt P(r,z) lassen sich nun durch die folgenden Formeln berechnen:

$$E_z = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{dz}{S \cdot d^2} E(k) \right) \quad (6.8)$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{dr}{S \cdot d^2} E(k) + 2 \cdot \frac{R}{S^3} \cdot H(k) \right) \quad (6.9)$$

mit $dz = z - Z$ und $dr = r - R$

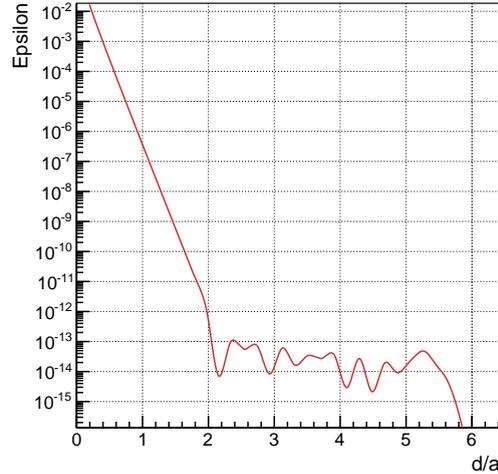


Abbildung 6.2.: Relativer Unterschied $|\varepsilon_\phi|$ (Siehe Formel 6.11) zwischen analytischer Lösung und Näherung mittels elliptischem Integral für einen Ring aus Punktladungen in Abhängigkeit vom Verhältnis d/a . d ist der Abstand zum Ring, a der Abstand zweier Punktladungen.

6.2.3. Ergebnis

Zum Vergleich von exakter und genäherter Lösung wurde die prozentuale Abweichung der genähernten von der exakten Lösung bestimmt. Als Wert für diese Abweichung wurde ε eingeführt:

$$\varepsilon_E = \frac{E_{\text{exakt}} - E_{\text{Ring}}}{E_{\text{exakt}}} \quad (6.10)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\phi_{\text{exakt}} - \phi_{\text{Ring}}}{\phi_{\text{exakt}}} \quad (6.11)$$

Sobald ε eine Double-precision-Genauigkeit erreicht hat, d.h. sobald es im Bereich von 10^{-15} liegt, gilt die Näherung als sehr genau und kann benutzt werden. Das Ziel ist es, bei den späteren Berechnungen innerhalb KASSIOPEIAS eine Abweichung von maximal 10^{-14} zu haben. Die Genauigkeit dieser einfachen Näherung sollte jedoch noch etwas besser sein. ε ist nicht nur vom Abstand d des Messpunktes zum Ring abhängig, sondern ebenfalls vom Abstand zwischen zwei benachbarten Punktladungen a . Daher wurde ε in Abhängigkeit von d/a betrachtet. Abbildung 6.2 zeigt die Ergebnisse für das Potential. Um eine logarithmische Auftragung zu ermöglichen, wurden bei allen Tabellen dieses Kapitels die Absolutwerte $|\varepsilon_E|$ und $|\varepsilon_\phi|$ aufgetragen. Für das Potential werden ab einem Verhältnis von $d/a \approx 3$ erste Werte im Bereich von 10^{-14} erreicht. Bei einem Verhältnis von $d/a \approx 6$ fällt der Wert zum ersten Mal auf unter 10^{-14} , jedoch existieren noch einige Schwankungen, bis er dann ab $d/a \approx 9$ konstant im Bereich von unter 10^{-15} bleibt. Die Ergebnisse für das elektrische Feld sehen ähnlich aus, daher wurde hier auf ein Diagramm verzichtet. Die Werte für ε_E stehen in Tabelle A.1.

6.3. Approximation für ein Drahtsegment

Da die Approximation für einen Ring aus Punktladungen gut funktioniert, wurde im Anschluss getestet, wie gut sich ein einzelnes Drahtsegment mittels Punktladungs-Approximation annähern lässt. Hierfür wird das Drahtsegment nicht mehr als Ganzes betrachtet, sondern als eine Ansammlung von Punktladungen. Für diese Punktladungen können dann am Punkt P das elektrische Potential und Feld bestimmt werden. Die Positionen und die

Ladungsverteilung der Punktladungen variieren hierbei für die verschiedenen getesteten Methoden. Da KASSIOPEIA nur die analytische Lösung für das Potential beinhaltet und die Lösung für das elektrische Feld eines Drahtstückes etwas komplizierter ist, wurde diese Näherung zunächst nur für das Potential überprüft. Zuerst wurde eine sehr einfache Näherung mit gleichmäßig auf die Punktladungen aufgeteilten Ladungen getestet. Anschließend wurden Test für die, bereits in KASSIOPEIA vorhandene, Newton-Cotes Näherung mit gewichteten Ladungen durchgeführt. Zuletzt wurde beschlossen, eine bisher noch nicht in KASSIOPEIA vorhandene Approximation, die Gauss-Quadratur, zu testen und diese dann im Falle zufriedenstellender Ergebnisse für die weiteren Berechnungen zu benutzen und ins Programm zu implementieren. Genutzt wurde für diese Tests ein Drahtsegment mit der Länge $L = 3$ cm. Die Ladung dieses Drahtsegmentes wurde von KASSIOPEIA ausgegeben und anschließend, der jeweiligen Näherung entsprechend, auf die Punktladungen verteilt.

6.3.1. Potential eines Drahtsegmentes: analytische Lösung

Für ein Drahtsegment mit konstanter Ladungsdichte der Länge L gilt für das elektrische Potential:

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left[\frac{D_a + D_b + L}{D_a + D_b - L} \right] \quad (6.12)$$

D_a und D_b sind hierbei die Abstände des Punktes P zu Anfangs- und Endpunkt des Drahtsegmentes, λ ist die Längenladungsdichte Q/L .

6.3.2. einfache Näherung

Zuerst wurde die einfachste Näherung überprüft. Bei dieser Näherung wurde das Drahtsegment der Länge L in N Punktladungen mit identischem Abstand $d = L/(N-1)$ unterteilt. Jeder dieser Punktladungen wurde die Ladung $q = Q/N$ zugeordnet. Q ist die Gesamtladung des Drahtsegmentes. Feld und Potential am Ort \vec{P} lassen sich dann mit den Formeln 6.4 und 6.2 berechnen. \vec{P}_i wurde dabei folgendermaßen berechnet:

\vec{A} und \vec{B} sein die beiden Endpunkte des Drahtes. Somit ergibt sich für den Richtungsvektor der Gerade durch diese beiden Punkte, auf der natürlich auch das Drahtsegment liegt:

$$\vec{s} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{L} \quad (6.13)$$

\vec{s} besitzt die Länge L . Für den Vektor zur Punktladung i gilt dann:

$$\vec{P}_i = \vec{A} + i \cdot d \cdot \vec{s} \quad (6.14)$$

Die Punktladung bei \vec{A} erhält man für $i = 0$, die Ladung bei \vec{B} erhält man für $i = N - 1$. Somit muss dann für die Potentialberechnung über i von 0 bis $N - 1$ summiert werden.

Die Ergebnisse dieser Näherung werden für steigenden Abstand zum Drahtsegment und für steigendes N besser. Jedoch sind sie, selbst für relativ große N , nicht ausreichend genau. Tabelle 6.1 zeigt die Abweichung ε_ϕ für verschiedene N am Punkt P . Der Abstand zwischen P und dem Drahtsegment betrug ca. 3 m. Daher wurde beschlossen diese Näherung nicht zu verwenden.

Tabelle 6.1.: Vergleich zwischen der nicht-gewichteten Punktladungs-Approximation und der analytischen Lösung für das elektrische Potential eines Drahtstückes der Länge $L = 3$ cm für einem Abstand $d \approx 100 \cdot L$. N sei die Anzahl der Punktladungen, welche für die Punktladungs-Approximation benutzt wurden.

N	ε_ϕ
20	$-6,8 \cdot 10^{-7}$
50	$-2,7 \cdot 10^{-7}$
100	$-1,4 \cdot 10^{-7}$

6.3.3. Newton-Cotes Näherung

Basierend auf dem Programm Wire.c von Dr. Ferenc Glück wurde die Newton-Cotes Näherung mit gewichteter Ladungsverteilung getestet. Bei dieser Näherung haben die Punktladungen identische Abstände, ihre Ladung jedoch wird je nach Position unterschiedlich gewichtet. Diese Berechnungsweise wird bereits in KASSIOPEIA benutzt. Es sind zwei verschiedene Matrizen mit Gewichten implementiert. Eine dieser Matrizen wird für 12 bis 20 Ringe benutzt, die andere ab einer Ringanzahl von 20. Weniger als 12 Ringe werden nicht empfohlen¹. Die Tests dieser Näherung haben gezeigt, dass sie auch im Bereich für 12-20 Ringe keine Werte von Double-precision-Genauigkeit liefert. Hier scheint die Gewichtung nicht exakt genug zu sein. Sobald jedoch die größere Gewichtungsmatrix benutzt wird, liefert die Berechnung in annehmbaren Abständen und schon mit 20 - 50 Ringen brauchbare Ergebnisse. Für N=50 wird ab einem Abstandsverhältnis von $d/L > 2/3$ eine Genauigkeit im Bereich von 10^{-14} erreicht. Werte im Bereich von 10^{-15} werden ab $d/L \approx 1$ erreicht. d ist hier der Abstand des Feldpunktes zum Drahtsegment.

Bei den ersten Berechnungen traten ab einem Abstandsverhältnis von $d/L \approx 100$ jedoch Abweichungen im Bereich von $\varepsilon = 10^{-6}$ auf. Nach einem Blick in den Programmteil ELCDWire.cxx wurde festgestellt, dass eine dort existierende globale Variable namens fWireFACTOR für diese größeren Abweichungen verantwortlich ist: Sobald für den Abstand zum Draht, dort als r bezeichnet gilt $r > L \cdot \text{fWireFACTOR}$ wird in der Funktion zur Berechnung des elektrischen Potentials² eine andere Berechnungsmethode benutzt. Ab diesem Abstand wird anstatt der exakten Lösung eine Näherung benutzt. Diese scheint jedoch schlechter zu sein, als die Approximation mit gewichteten Punktladungen. fWireFACTOR stand auf 100, wodurch sich erklären lässt, weshalb die Übereinstimmung ab $d/L \approx 100$ schlechter wurde. Mit fWireFACTOR = 1000000 wurden die Berechnungen wiederholt. Wie erwartet stimmten die Ergebnisse nun auch für große Abstände überein.

6.3.4. Gauss-Quadratur

Auf Vorschlag von Dr. Ferenc Glück wurde die Gauss-Quadratur [Eng93] für diese einfachen Testberechnungen ins Programm implementiert und getestet. Bei der Gauss-Quadratur werden keine äquidistanten Knotenpunkte mehr benutzt. Zusätzlich zur Ladungsgewichtung werden auch die Abstände der einzelnen Punktladungen gewichtet. Dabei gibt es keine einheitliche Matrix, die ab einer bestimmten Anzahl an Knotenpunkten gilt. Jedes N besitzt eine eigene Matrix mit verschiedenen Werten. Mittels der Gauss-Quadratur lässt sich das Integral über eine Funktion auf die folgende Weise nähern:

¹Ist die, vom Benutzer eingestellte, Anzahl der Ringe kleiner als 12, so wird sie automatisch von Programm auf 12 erhöht

²GetPhiElement()

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k \cdot f(x_k) \quad (6.15)$$

Die w_k sind die Gewichtungsfaktoren, die x_k die Knotenpunkte. Da unsere Integrationsgrenzen nicht -1 und +1 sind, müssen die Berechnungen für die x_k noch den verwendeten Grenzen angepasst werden. Aus [Kyt05] wurden die Werte für N=1 bis N=8 entnommen. Bei ersten Berechnungen wurde festgestellt, dass die Werte für N=7 fehlerhaft sind. Daher enthält Tabelle 6.2 nur die Werte für N=1-6 und N=8. N=16 wurde auch noch hinzugefügt, jedoch fehlte in diesem Buch eine Zeile, daher wurden diese Werte aus [Eng80] übernommen. Die Werte für N=16 wurden zwar in die Tabelle eingefügt, jedoch wurden schon für N=8 in großer Nähe sehr gute Übereinstimmungen erreicht, so dass N=16 gar nicht mehr getestet wurde. Großer Vorteil der Gauss-Quadratur im Vergleich zur Newton-Cotes-Näherung ist, dass hier die Anzahl an Punkten, die für eine gute Übereinstimmung zur analytischen Lösung benötigt werden, wesentlich kleiner sein sollte. Die Berechnung einer Punktladung sollte für beide Methoden gleich lange dauern, so dass man hier durch eine Einsparung an Punkten auch eine Verkürzung der Rechenzeit erreichen würde.

Für ein Drahtstück der Länge L setzt man die Variable $h = L/2$. Für die Position x der verschiedenen Knotenpunkte gilt:

$$x = h \pm h \cdot \text{node} \quad (6.16)$$

Node ist hierbei der jeweilige Eintrag aus der Knotenpunktmatrix. Haben wir nun, wie in Kapitel 6.3.3 einen Draht mit Anfangspunkt A und Endpunkt B, so gilt für die einzelnen Positionen der Punktladungen:

$$\vec{P}_i = \vec{A} + \frac{x}{|\vec{s}|} \cdot \vec{s} \quad (6.17)$$

Für die Ladungen an den einzelnen Knotenpunkten gilt:

$$q = \frac{Q}{N-1} \cdot \text{weight} \quad (6.18)$$

Der Parameter weight ist der jeweilige Eintrag der Gewichtungsmatrix. Setzt man $\lambda = r/L$ mit r als Abstand zum Drahtsegment, so werden nach ersten Berechnungen von Dr. Ferenc Glück die folgenden Werte für das Erreichen einer Double-precision-Genauigkeit benötigt:

N	$\lambda >$
3	100
5	10
8	3

Genauere Berechnungen mit TestELCD konnten diese Werte bestätigen. Das Diagramm 6.3 zeigt die ε -Werte für die Näherung mittels Gauss-Quadratur für verschiedene N in Abhängigkeit zum Abstand.

Bei den Berechnungen wurde deutlich, dass für N=1 selbst mit sehr großen Abständen keine ausreichende Übereinstimmung mit der analytischen Lösung erreicht wird. Da auch die Werte für N=2 nicht ausreichend präzise sind, wurde beschlossen, die Gauss-Quadratur nur für $N > 2$ anzuwenden.

Betrachtet man sich Diagramm 6.3, so ist deutlich zu erkennen, dass die Übereinstimmung zwischen Gauss-Quadratur und analytischer Lösung mit steigendem Abstand etwas

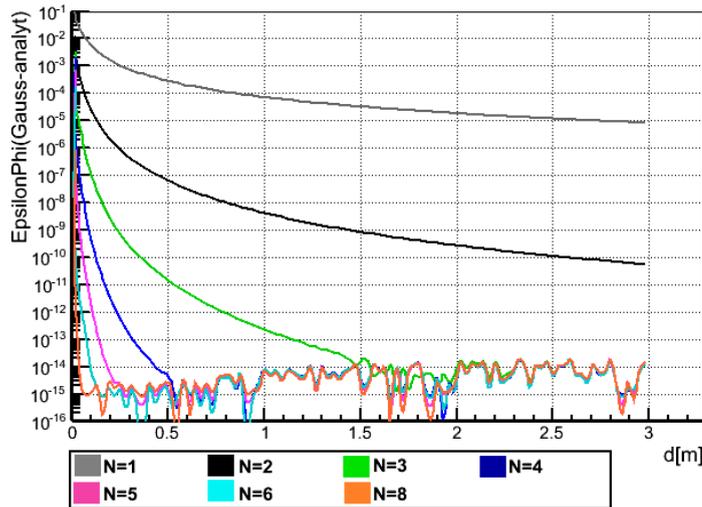


Abbildung 6.3.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur analytischen Lösung für das elektrische Potential. Aufgetragen wurde der relative Unterschied der beiden Berechnungsmethoden in Abhängigkeit vom Abstand d . Aufgetragen wurde der Unterschied zwischen der jeweiligen Gauss-Näherung und der Newton-Cotes-Näherung.

schlechter werden. Der Fehler ist jedoch nicht in der Approximation zu suchen. Diese sollte mit steigendem Abstand besser werden. Daher wurde vermutet, dass die größere Abweichung bei steigendem Abstand von der analytischen Näherung verursacht wird. Diese wird mit größer werdendem Abstand schlechter, da anscheinend bei der Berechnung Nachkommastellen verloren gehen. Daher wurde noch zusätzlich zum Vergleich zwischen Gauss-Näherung und analytischer Lösung ein Vergleich zwischen Gauss-Näherung und Newton-Cotes-Näherung durchgeführt. Hier sollte sich die Abweichung mit steigendem Abstand nicht ändern. Wie Diagramm 6.4 zeigt konnte dies bestätigt werden.

6.3.5. elektrisches Feld eines Drahtsegmentes

Im Anschluss an die Berechnungen des elektrischen Potentials wurde die von Dr. Ferenc Glück durchgeführt Berechnung des elektrischen Feldes in das Programm integriert, um auch hier die Übereinstimmung zwischen analytischer Lösung und der Lösung mittels Gauss-Quadratur zu überprüfen. Es gilt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (6.19)$$

In Gleichung 6.12 wurde zur Vereinfachung folgende Substitution benutzt:

$$C = \frac{D_a + D_b + L}{D_a + D_b - L} \quad (6.20)$$

Somit ergibt sich für die i -te Komponente des elektrischen Feldes am Punkt P für ein Drahtsegment mit konstanter Ladungsdichte folgendes:

$$E_i = -\partial_i\phi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{C} \partial_i C \quad (6.21)$$

Hierbei gilt $i = x, y, z$ und $\partial_i = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$

Mit $D_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$, $D_{ji} = \partial_i D_j$ und $j = a, b$ gilt:

$$D_{ai} = \frac{(i - i_a)}{D_a}, D_{bi} = \frac{(i - i_b)}{D_b} \quad (6.22)$$

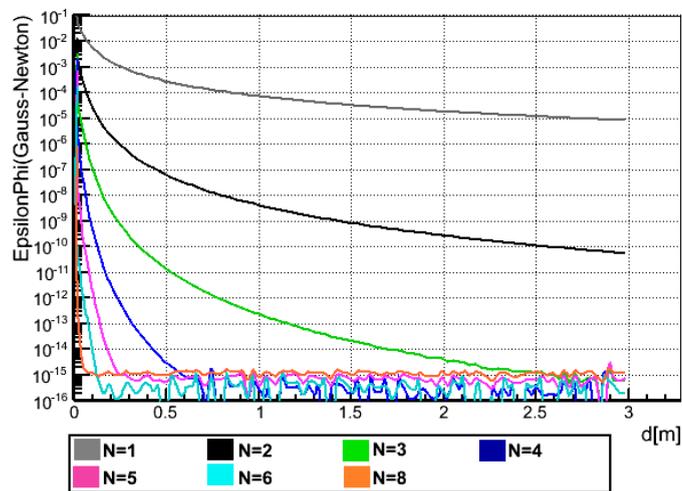


Abbildung 6.4.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur Newton-Cotes-Näherung für N=50 für das elektrische Potential in Abhängigkeit vom Abstand d . Aufgetragen wurde der Unterschied zwischen der jeweiligen Gauss-Näherung und der Newton-Cotes-Näherung.

Tabelle 6.2.: Knotenpunkte und Gewichte der Gauss-Quadratur für diverse N

n	Knoten	Gewichte
1	0.	2
2	$1/\sqrt{3}$	1
3	0.	$8/9$
	$\sqrt{3}/5$	$5/9$
4	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
5	0.	0.568888888888889
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.906179845938664	0.236926885056189
6	0.238619186083197	0.467913934572691
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.932469514203152	0.171324492379170
8	0.183434642495650	0.362683783378362
	0.525532409916329	0.313706645877887
	0.796666477413627	0.222381034453374
	0.960289856497536	0.101228536290376
16	0.09501250983763744	0.18945061045506850
	0.28160355077925891	0.18260341504492359
	0.45801677765722739	0.16915651939500254
	0.61787624440264375	0.14959598881657673
	0.75540440835500303	0.12462897125553387
	0.86563120238783174	0.095158511682492785
	0.94457502307323258	0.062253523938647893
	0.98940093499164993	0.027152459411754095

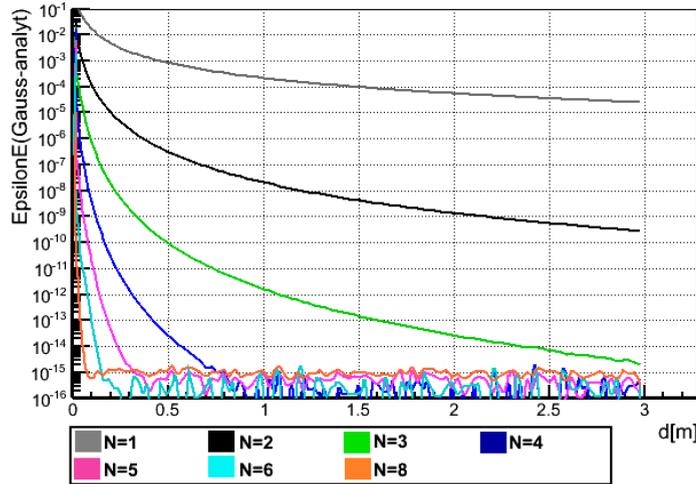


Abbildung 6.5.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur analytischen Lösung für das elektrische Feld in Abhängigkeit vom Abstand d.

Für $\partial_x C$ ergibt sich somit:

$$\partial_i C = \frac{D_{ai} + D_{bi}}{D_{ai} + D_{bi} - L} - \frac{D_a + D_b + L}{(D_a + D_b - L)^2} \cdot (D_{ai} + D_{bi}) \quad (6.23)$$

$$= \frac{-2L(D_{ai} + D_{bi})}{(D_a + D_b - L)^2} \quad (6.24)$$

Der Term $-2L/(D_a+D_b-L)^2$ ist für alle Komponenten identisch, also kann $m = -2L/(D_a+D_b-L)^2$ gesetzt werden und somit erhält man:

$$\partial_x C = m(D_{ax} + D_{bx}) \partial_y C = m(D_{ay} + D_{by}) \partial_z C = m(D_{az} + D_{bz}) \quad (6.25)$$

Somit folgt für die i-te Komponente des elektrischen Feldes:

$$E_i = nm(D_{ai} + D_{bi}) \quad (6.26)$$

mit $n = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 C}$

Diese analytische Lösung wurde mit der Näherung für das elektrische Feld, mittels Gauss-Quadratur verteilter, Punktladungen verglichen. Wichtig war hierbei wieder, dass zuerst die einzelnen Feldvektoren der Punktladungen addiert wurden und erst anschließend der Betrag des elektrischen Feldes berechnet wurde. Diagramm 6.5 zeigt die Ergebnisse.

Vergleicht man Diagramm 6.5 und Diagramm 6.3 miteinander, lässt sich erkennen, dass sich mit der Gauss-Näherung für das elektrische Feld erst mit etwas größeren Abständen dieselbe Genauigkeit wie mit der Potential-Näherung erzielen lässt. Für N=3 beispielsweise wird in der Feldberechnung eine Double-precision-Genauigkeit erst ab einem Abstand von etwa 2,5 m erreicht, während man für das Potential dieselbe Genauigkeit schon ab einem Abstand von 1,6 m erhält. Diese Beobachtung lässt sich durch den langsameren Abfall des Potentials mit dem Abstand erklären. Nimmt man zum Beispiel eine Punktladung, so fällt

ihr elektrisches Potential mit $1/r$, ihr Feld jedoch mit $1/r^2$. Allgemein lässt sich sagen, dass der Verlauf einer Funktion umso komplizierter wird, je höherstufiger die in ihr enthaltenen Ableitungen sind. Je komplizierter der Verlauf einer Funktion ist, desto schwieriger ist es eine passende Näherung zu finden. Im Gegenzug hierfür ist für die Feldberechnung die wachsende Abweichung mit größeren Abständen, wie sie für das Potential in 6.3.4 beobachtet wurde nicht festzustellen. Eine mögliche Erklärung hierfür könnte sein, dass sich in Formel 6.26 zur analytischen Feldberechnung, im Gegensatz zur Potentialberechnung (Formel 6.12) kein Logarithmus befindet. Die steigende Abweichung der analytischen Lösung mit steigendem Abstand könnte also durch den genutzten Logarithmus verursacht werden.

Für große Abstände zum Drahtsegment gilt $Da + Db \gg L$. Somit würde der Term im Logarithmus $(Da+Db+L)/(Da+Db-L)$ gegen 1 konvergieren. Anscheinend rechnet KASSIOPEIA so, dass die Lösung des Logarithmus für solche Brüche an Genauigkeit verlieren. Sollte der Logarithmus das Problem sein, so würde es sich durch benutzen der Reihenentwicklung beheben lassen. Es wurde $\eta = L/(Da+Db)$ gesetzt. Somit ergibt sich für C:

$$C = \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \quad (6.27)$$

Für den Logarithmus dieses C kann nun die folgende Reihenentwicklung:

$$\ln C = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^{2k+1}}{2k+1} \quad (6.28)$$

Die Genauigkeit der analytischen Lösung für das Potential nimmt ab einem Abstand von etwa einem Meter ab. Somit würde gelten $Da + Db \approx 2m$. Mit $L = 0,03m$ erhält man also, dass ca. ab $\eta < 0,06$ die Reihenentwicklung benutzt werden sollte. Natürlich wird nicht bis unendlich summiert, sondern nur soweit, bis die Summanden ausreichen klein, sprich kleiner als 10^{-15} werden. Dies ist für $\eta < 0,06$ schon ab $k=5$ der Fall. Daher wurde im Programm nur bis $k=5$ aufsummiert. Für kleinere η könnte der Term schon früher kleiner werden, weshalb noch eine Abbruchbedingung eingebaut wurde, sodass nur Terme bis $|\eta^{2k+1}/(2k+1)| > 10^{-17}$ summiert werden sollen. Wird ein kleiner Term berechnet, so wird die Summation vorzeitig abgebrochen. Zuerst wurde 10^{-16} als Grenze gewählt, aber bei den Tests der Reihenentwicklung war ab einem Abstand von ca. 2,5 m ein Sprung im Potentialverlauf zu erkennen. Mit der kleineren Grenze konnte dieser entfernt werden. Diagramm 6.6 zeigt den Vergleich zwischen der Gauss-Näherung und der analytischen Lösung mit Reihenentwicklung für große Abstände. Im Vergleich zu Diagramm 6.4 ist eine deutliche Verbesserung zu erkennen. Somit kann diese Lösung nun auch für den nächstgelegenen Drahtsegmentring empfohlen werden. Die Grenze für die Benutzung der Reihenentwicklung wurde nach einigen Tests auf $\eta < 0,03$ korrigiert. Für diesen Wert wurden die besten Übereinstimmungen erzielt.

6.4. Näherung für einen Konus aus Drahtsegmenten

In Unterkapitel 6.3 wurde die Verwendung der Gauss-Quadratur als Näherung für die Berechnung von Potential und Feld eines Drahtsegmentes erfolgreich getestet. Unterkapitel 6.2 zeigt, dass auch die Näherung mittels elliptischem Integral für einen Ring aus identischen Punktladungen sehr gut funktioniert. Aus diesen Ergebnissen lässt sich schließen, dass sich ein Ring aus Drahtsegmenten mit mehreren infinitesimal dünnen Ringen nähern lässt. Position und Ladung dieser Ringe würden über die Tabelle der Gauss-Quadratur bestimmt werden. Daher wurden Funktionen geschrieben, welche das elektrische Feld und

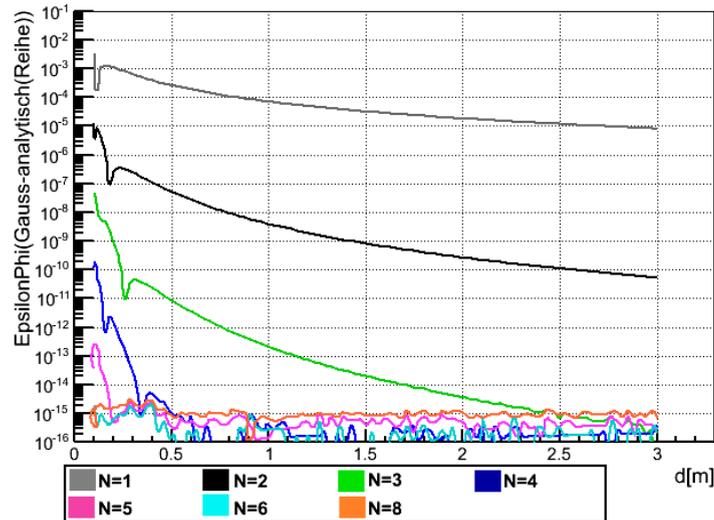


Abbildung 6.6.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur analytischen Lösung für das elektrische Potential in Abhängigkeit vom Abstand d. Bei der analytischen Lösung wurde ab $\varepsilon < 0,03$ der Logarithmus durch die ersten Terme seiner Reihenentwicklung ersetzt.

Potential für diesen Ring mittels Gauss-Quadratur berechnen. Später wurden die Ergebnisse wieder durch die Berechnung von ε verglichen. Für die Tests wurde ein Zylinder aus 1200 Drahtsegmenten erstellt. Sein Radius betrug 4,75 m. Somit war seine Geometrie dem Aufbau des Drahtsystems im zylinderförmigen Teil des Hauptspektrometers recht ähnlich.

6.4.1. analytische Lösung

Für die analytische Lösung müssen am Punkt P einfach Potential und Feldvektor der einzelnen Drahtsegmente addiert werden. Für n Drahtsegmente gilt:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (6.29)$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (6.30)$$

Die Berechnung von ϕ_i und \vec{E}_i wird in Unterkapitel 6.3 beschrieben. Für die analytische Lösung wurde zuerst nur die rein-logarithmische Lösung getestet.

6.4.2. Näherung mittels Gauss-Quadratur

Um die Verwendung der Gauss-Quadratur zu testen, wurden zuerst die Ladungen aller Drahtsegmente zur Gesamtladung Q summiert.

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad (6.31)$$

Da die Näherung nur für Drahtsegmente mit identischen Ladungen funktioniert kann Gleichung 6.31 umgeschrieben werden zu $Q = nq$ wobei $q = q_i$ für alle i gilt. Nun wurden entlang des Zylinders mittels der Knotenpunkte der Gauss-Quadratur N Ringe verteilt.

Anschließend wurde die Ladung eines Ringes mittels 6.2 gewichtet. Mit Ladung und Position des Ringes konnten dann elektrisches Potential und Feld mittels elliptischer Integrale berechnet werden. Die Güte der Gauss-Näherung wurde anschließend wieder durch die Berechnung von ε (Gleichung 6.10 und 6.11) überprüft. Die Diagramme 6.7 und 6.8 zeigen die Ergebnisse.

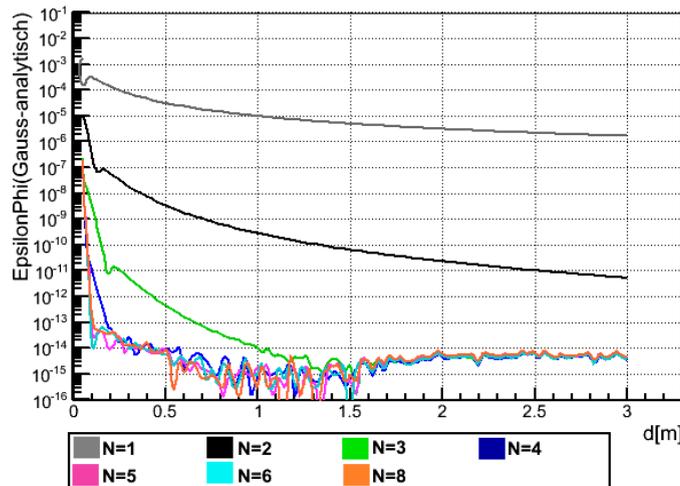


Abbildung 6.7.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur analytischen Lösung für das elektrische Potential in Abhängigkeit vom Abstand d . Die Drahtlänge betrug 3 cm.

Auch hier konnte, wie in Unterkapitel 6.3, beim Potential eine Verschlechterung der Übereinstimmung zwischen Näherung und analytischer Lösung beobachtet werden. Daher wurde auch hier zuerst die Übereinstimmung mit der Newton-Cotes-Näherung für 50 gleichmäßig verteilte Ringe mit gewichteten Ladungen überprüft. Diagramm 6.9 zeigt, dass hier für größere Abstände eine sehr gute Übereinstimmung erzielt wird.

Also scheint auch hier die größere Abweichung durch den Logarithmus in der analytischen Lösung zu entstehen. Daher wurde auch für den Zylinder aus Drahtsegmenten die analytische Lösung mit der Reihenentwicklung ab bestimmten Abständen berechnet und mit der Gauss-Quadratur verglichen. Diagramm 6.10 zeigt die Ergebnisse.

6.5. Rechenzeitvergleich

Neben einer guten Übereinstimmung mit der exakten Lösung, ist es ein weiteres Ziel einer guten Näherung eine Verkürzung der Rechenzeit zu erreichen. Daher wurden nun die Rechenzeiten von Gauss-Näherung und analytischer Lösung miteinander verglichen. Tabelle 6.3 zeigt die Ergebnisse.

Bei 1200 Drähten ergaben 90 μs Berechnungszeit für das gesamte Drahtsystem eine Zeit von ca. 0,075 μs für Berechnung eines Drahtes. Somit erhält man, dass die Berechnung für einen Ring ca. 3mal länger dauert, als die Berechnung eines einzelnen Drahtes. Wird nun die Rechenzeit für den Drahtsegmentring durch die Rechenzeit einer der Gauss-Methoden geteilt, so erhält man den Faktor, um den sich die Berechnung beschleunigt. Tabelle 6.4 zeigt die Beschleunigungsfaktoren in Abhängigkeit von N an. Selbst wenn $N=8$ verwendet werden würde, so würde die Berechnung im Vergleich zur analytischen Lösung 50mal schneller sein. Befindet sich der Punkt, in dem Feld und Potential berechnet werden sollen, weit genug vom aktuellen Drahtsegmentring entfernt, so kann die Gauss-Quadratur mit $N=3$ verwendet werden. Somit ließe sich für einen Großteil des Drahtsystems eine Beschleunigung der Berechnungen um einen Faktor 150 erreichen.

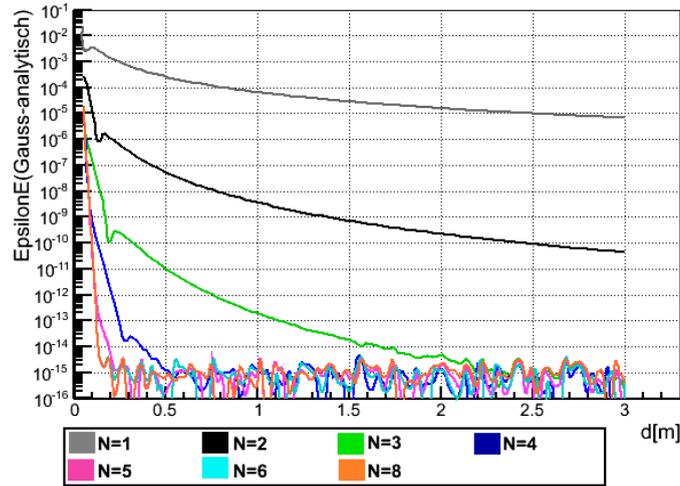


Abbildung 6.8.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur analytischen Lösung für das elektrische Feld in Abhängigkeit vom Abstand d. Die Drahtlänge betrug 3 cm. Aufgetragen wurde der Unterschied zwischen der jeweiligen Gauss-Näherung und der analytischen Lösung.

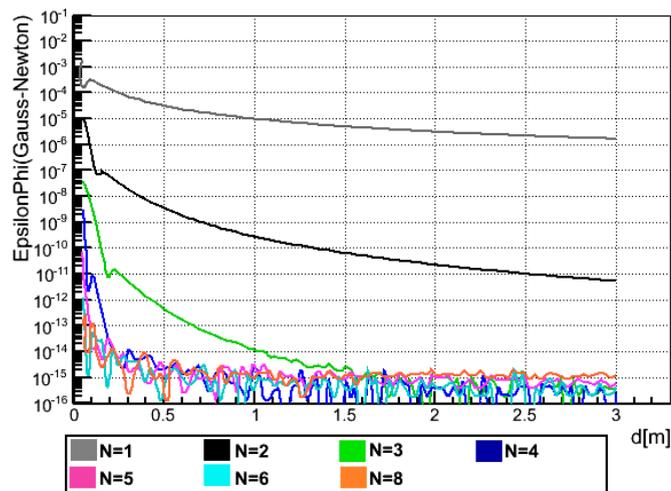


Abbildung 6.9.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur Newton-Cotes-Näherung mit 50 Ringen für das elektrische Potential in Abhängigkeit vom Abstand d. Die Drahtlänge betrug 3 cm.

Tabelle 6.3.: Rechenzeiten von Gauss-Quadratur mit diversen N und analytischer Lösung

Rechenart	$t[\mu s]$
Gauss	N=1 0,22
	N=2 0,41
	N=3 0,61
	N=4 0,81
	N=5 1,06
	N=6 1,26
	N=8 1,93
	analytische Lösung 90

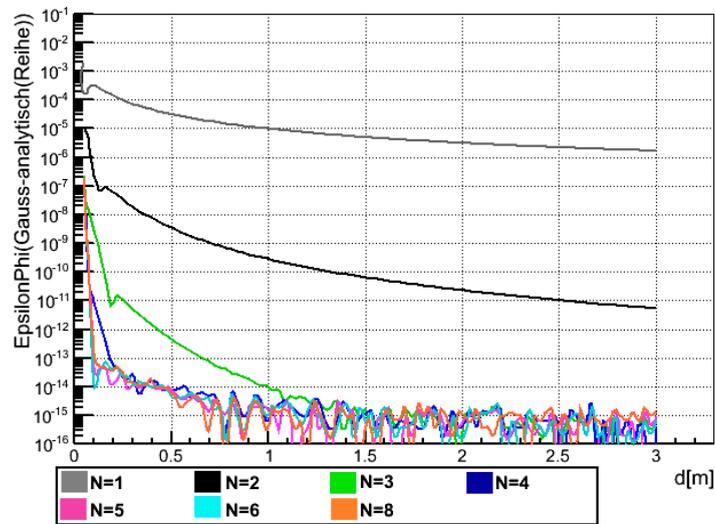


Abbildung 6.10.: Werte der Gauss-Näherung für diverse N im Vergleich zur analytischen Lösung für das elektrische Potential in Abhängigkeit vom Abstand d . Die Drahtlänge betrug 3 cm. Bei der analytischen Lösung wurde der Logarithmus ab einem gewissen Abstand durch die ersten Terme seiner Reihenentwicklung ersetzt.

Tabelle 6.4.: Diese Tabelle zeigt den Faktor f , um den sich die Berechnungszeit durch Anwendung der Gauss-Quadratur mit verschiedenen N für einen Ring aus Drahtsegmenten beschleunigen würde.

N	f
1	400
2	220
3	150
4	110
5	85
6	70
8	50

7. Implementierung in KASSIOPEIA, erste Tests und weitere Ideen zur Optimierung der Rechenzeit

Es wurde beschlossen die Berechnungen mittels Gauss-Quadratur in die Feldberechnungsklasse ELCD34 zu integrieren. Diese Klasse baut auf ihren beiden Vorgängern Elfield32Ferenc und ELCD33 auf, besitzt jedoch schon einige Verbesserungen. Sie ist in der Lage, ELCD33-, Elfield32- Ferenc- und ELCD2- Eingabedateien einzulesen und zu bearbeiten. Somit können innerhalb dieser Klasse Feldberechnungen für Drähte, Kegelstümpfe und Rechtecke durchgeführt werden. Mit Hilfe von Benjamin Leiber wurden die Werte zur Bestimmung der Knotenpunkte und deren Gewichte in ELCD34 implementiert. Anschließend wurden erste Tests mit ELCD34 durchgeführt. Dieses Kapitel beschreibt den Einbau der Feld- und Potential- Näherungen mithilfe der Gauss- Quadratur in KASSIOPEIA und es zeigt die Ergebnisse der ersten durchgeführten Tests. Besonders von Bedeutung waren die Tests mit einer original KATRIN- Hauptspektrometer- Drahtelektroden- Eingabedatei. Des Weiteren wurden Überlegungen angestellt, wie die Berechnungen noch weiter optimiert werden können. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden diese Ideen und die Ergebnisse der ersten Tests kurz vorgestellt. Anschließend folgt noch ein weiterer Vorschlag für die Anwendung der Gauss- Quadratur: die Haltestruktur der Drahtelektroden.

7.1. Implementierung der Gauss-Quadratur in KASSIOPEIA

Nach Betrachtung der Ergebnisse von Kapitel 6.4 wurde entschieden, die Gauss-Quadratur mit $N=3$ für weit entfernte Drahtsegmentringe und die Gauss-Quadratur mit $N=5$ für nähere Ringe einzubauen. Da man schon mit $N=5$ mit sehr guten Ergebnissen sehr nahe an das zu berechnende Element herangehen kann, wurde beschlossen, auf die Verwendung größerer N zu verzichten. Ist der Abstand des aktuellen Feldpunktes größer als die fünfzigfache Länge des Segments, wird die Näherung mit $N=3$ vom Programm verwendet. Liegt der Abstand zwischen drei- und fünfzigfacher Länge wird die Näherung mit $N=5$ für die Berechnungen aufgerufen. Für Abstände zum Element, welche kleiner sind als die dreifache Elementlänge werden elektrisches Potential und Feld mit der analytischen Lösung (Formeln: 6.12, 6.26) berechnet. Diese war für das Potential schon vorhanden. Für das elektrische Feld wurde sie hinzugefügt. Für die Abstandsberechnung wird bisher nur der Abstand in z - Richtung betrachtet. Diese Vereinfachung war für erste Tests ausreichend, jedoch sollte die korrekte Abstandsberechnung noch eingefügt werden. Auch darf nicht nur

die Länge des Elementes betrachtet werden. Auch der Abstand a zwischen zwei benachbarten Drähten im Ring ist von Bedeutung. Ist dieser größer als die Länge des Segmentes, so muss der Abstand zum Element nicht mit der Länge des Elements, sondern mit dem Drahtabstand innerhalb des Elementes verglichen werden um die passende Berechnungsweise zu wählen. Auch dies sollte noch eingebaut werden.

7.1.1. eine neue Klasse: der ELCDRingContainer

Für die Berechnungen mittels Gauss-Quadratur wurde eine neue Klasse namens ELCDRingContainer entwickelt. Anders als die Klasse ELCDRing, bei der ein Element einem einzelnen Ring entspricht, beinhaltet ein ELCDRingContainer mehrere Ringe. Erstellt werden die RingContainer beim Einlesen einer Elektrodendatei. Bisher wurde die Erstellung der Ringe jedoch nur für ELCD33-Dateien¹ in die Funktion ELCD34::ReadElectrodes33 eingebunden. Die Einbindung für die restlichen existierenden Eingabedateien dürfte jedoch keine weiteren Probleme darstellen. Ein RingContainer wird erstellt sobald ein eingelesenes Element vom Typ "Draht" ist und seine Rotationszahl größer als 8 ist. Die Rotationszahl $nrot$ gibt an, wie oft das eingelesene Element um die z-Achse rotiert und dann an der neuen Position geklont wird. Der Winkel um den rotiert wird ist $\alpha = \frac{360^\circ}{nrot}$. Neben dem RingContainer werden noch zusätzlich die Drähte direkt gespeichert. Diese werden für Feld- und Potentialberechnungen von Elementen nahe dem und am Durchgangspunkt benötigt.

Bei der Erstellung des RingContainers im "Constructor" werden sowohl die Ringe² für $N=3$, als auch die Ringe für $N=5$ mit ihren Positionen und Ladungen erstellt und in 2 Feldern³ gespeichert. Somit werden direkt hier die Gauss-Knoten-Punkte und Gewichte angewandt. In der weiteren Berechnung werden die bereits vorhandenen Funktionen zur Feld- und Potentialberechnung der Klasse ELCDRing verwendet. Zur Speicherung von elektrischem Feld und Potential wurde der Datentyp `struct`⁴ gewählt. Die `struct EnPhi` speichert den Vektor für das elektrische Feld und das zugehörige Potential. Sie besitzt die Funktion `GetEnPhiElement`. In dieser Funktion werden Feld und Potential berechnet. Hierfür wird zuerst, wie in Kapitel 7.1 beschrieben, je nach Abstand die passende Berechnungsmethode gewählt um anschließend Feld und Potential der richtigen Ringe oder aber für die einzelnen Drahtsegmente zu berechnen.

7.2. erste Tests mit dem original Drahtsystem

Die Funktion `GetEnPhi` wurde bisher nur für Drähte und RingContainer eingefügt. Somit funktioniert der in KASSIOPEIA verwendete Aufruf "`fSourcepointGroups.at(i) -> GetRotSymmElement(j) -> GetEnPhiElement(p);`" bisher nur für diese beiden Klassen. Für Rechtecke und Kegelstümpfe sollte er noch eingefügt werden. Daher wurde für erste Tests eine reine Drahtgeometrie verwendet. Die Feldberechnungsklasse `Elfield32Ferenc` besitzt getrennte Eingabedateien für Drähte und Kegelstümpfe. Daher wurde die originale `Elfield32Ferenc`- Draht- Eingabedatei für das KATRIN- Hauptspektrometer mittels eines C- Programms⁵ von Dr. Ferenc Glück in eine ELCD33-Datei umgewandelt. Die Diskretisierung der Drähte innerhalb dieser neuen Datei konnte im Programm eingestellt werden. So war es möglich, Dateien mit unterschiedlich gut diskretisiertem Drahtsystem zu erstellen. Mit diesen Dateien wurden dann erste Test der neuen Funktionen durchgeführt.

¹Eingabedateien mit der Endung ".el33"

²Diese sind Elemente der Klasse ELCDRing

³`fRemoteRings` und `fNearRings`

⁴in einer Struktur können verschiedene Komponenten zusammengefasst werden. Diese besitzen i.A. verschiedene Datentypen

⁵`inputwire.c`

7.2.1. Genauigkeit der implementierten Funktionen

Um sicherzustellen, dass die Berechnungen mittels Gauss-Quadratur korrekt implementiert wurden, wurden zuerst Berechnungen mit einem Ring aus Drahtsegmenten durchgeführt. Hierbei wurde die identische ELCD33- Elektroden- Eingabedatei wie bei den Berechnungen für Kapitel 6.4 verwendet. Die mit ELCD34 gewonnenen Ergebnisse wurden anschließend mit den zuvor in ELCD33 berechneten Werten verglichen. Nach Behebung einiger kleiner Fehler stimmten die Ergebnisse beider Klassen bis zur 15. Nachkommastelle überein. Daher wurde beschlossen, Tests mit der original Drahtsystem-Eingabedatei zu starten. Hierfür wurden Feld und Potential für mehrere Punkte, sowohl im Nah- als auch im Fernbereich, zuerst mit den zuvor schon implementierten Funktionen und anschließend mit GetEnPhi berechnet. Anschließend wurden ε_E und ε_ϕ betrachtet:

$$\varepsilon_E = \frac{E_{34} - E_{34+Gauss}}{E_{34}} \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\phi_{34} - \phi_{34+Gauss}}{\phi_{34}} \quad (7.2)$$

Sowohl für das elektrische Potential, als auch für das elektrische Feld, befand sich ε nahe, wie auch fern des Ringes immer im Größenbereich von 10^{-14} . Somit wurde die angestrebte Genauigkeit erreicht.

7.2.2. Zeitersparnis

Wie bereits erwähnt, berechnet die Funktion GetEnPhiElement(p) sowohl das Feld, als auch das Potential. Das bedeutet, dass selbst wenn von außen nur das elektrische Potential angefordert wird das Feld direkt mit berechnet wird. Daher war es nicht möglich, die Zeitersparnis nur für die Potentialberechnung oder nur für die Feldberechnung zu testen. Jedoch kann überprüft werden, wie lange die kombinierte Berechnung mit Näherung im Vergleich zur analytischen Lösung für alle Drähte dauert. Hierfür wurden einfach die Bedingungen zum Aufruf der beiden RingContainer deaktiviert, sodass für alle Elemente die Drähte einzeln berechnet wurden. Bei diesen Tests wurde festgestellt, dass der Zeitgewinn durch die Näherung von der Diskretisierung der Eingabedatei abhängt. Je besser die Eingabedatei diskretisiert war, desto größer war der, durch die Näherung erzielte, Zeitgewinn. So konnte für die Datei, in welcher die Geometrie in die meisten Subelemente unterteilt wurde, eine Beschleunigung der Berechnung um ca. einen Faktor 100 gemessen werden. Eine Beschleunigung um diesen Faktor sollte auch bei weiteren Berechnungen des Spektrometers mitsamt seinem Drahtsystem möglich sein. Um die Rechenzeit für spätere Bahnberechnungen noch weiter zu optimieren sollten die Feld- und Potentialberechnung in Zukunft voneinander getrennt werden.

7.3. weitere Ideen zur Optimierung der Rechenzeit

Das Spektrometer kann im Bezug auf die Berechnungen mit der neuen Funktion GetEnPhiElement(p) in zwei Bereiche unterteilt werden:

- Nahbereich: Für RingContainer, welche sich nahe am zu berechnenden Feldpunkt befinden, werden Feld und Potential für jeden Draht des Elements einzeln mittels analytischer Lösung berechnet.
- Fernbereich: Bereich in dem Feld und Potential für die Ringe der RingContainer mittels Elliptischer Integrale berechnet werden. Dieser Bereich unterteilt sich nochmals in die näheren RingContainer, in denen fünf Ringe berechnet werden und in die fernen Container mit nur drei Ringen.

Sowohl für den Nahbereich, als auch für den Fernbereich gab es Ideen zur weiteren Optimierung.

7.3.1. Nahbereich

Das Hauptspektrometer besitzt in der Mitte einen Radius von ca. 4,9 m. Das bedeutet, dass sich selbst im nächsten Drahtsegmentring Drahtsegmente befinden können, die einen Abstand von fast 10m zur momentanen Position haben. In der Tat werden sich nur wenige Drahtsegmente des aktuellen Ringes sehr nahe an der Teilchenposition befinden. So würde sich für die Segmente, welche sich in nächsten Ring befinden, jedoch einen ausreichenden Abstand zur Teilchenposition besitzen die Verwendung einer PCA mit Gauss-Näherung anbieten. Daher wurde getestet, ob durch die Punktladungsapproximation im Vergleich zur analytischen Berechnung mit Gleichung 6.12 und Gleichung 6.26 ein Zeitgewinn erzielt werden kann. Dafür wurden mittels TestELCD 100 Schritte ausgeführt auf denen das Potential eines 3 cm langen Drahtsegmentes analytisch berechnet wurde. Diese 100 Schritte wurden dann mit einer Schleife 100000mal wiederholt. Für diesen Prozess wurde dann die Computerzeit gestoppt und durch die Gesamtzahl an Schritten dividiert. Dieselbe Zeitmessung wurde noch für die Punktladungs-Approximation mit Gauss-verteilter Punktladungen und verschiedene N wiederholt. Anschließend wurden die verschiedenen Zeiten, welche in Tabelle 7.1 festgehalten sind, verglichen.

Tabelle 7.1.: Rechenzeitmessungen für die Punktladungs-Approximation

N	Zeit [μs]
1	0,12
2	0,18
3	0,25
analytisch	0,14

Die Zeitmessung zeigt, dass mittels Punktladungs-Approximation nur für N=1 ein minimaler Zeitgewinn erzielt werden könnte. Wie in Kapitel 6.3.4 schon gezeigt wurde, sind die Ergebnisse für N=1 nicht exakt genug, sodass von der Nutzung von N=1 abgeraten wird. Die Nutzung der analytischen Lösung ist also für ein Drahtsegment schneller als die Berechnung mittels PCA. Daher wird im Nahbereich weiterhin die Verwendung der analytischen Lösung empfohlen.

7.3.2. Fernbereich

Für sehr weit entfernte Drahtsegmentringe könnten elektrisches Potential und Feld anstatt mit elliptischen Integralen mittels Legendre-Polynomen berechnet werden. So kann die Rechenzeit noch zusätzlich beschleunigt werden. Hierzu wäre es interessant zu wissen, welchen Teil der Rechenzeit der Fernbereich ausmacht. Ist dieser Teil sowieso schon recht klein, würde sich die Nutzung von Legendre-Polynomen kaum lohnen. Macht die Berechnung des Fernbereichs jedoch einen großen Teil der Berechnungen aus, so könnte hier nochmals einiges an Rechenzeit eingespart werden. Daher wurden einige Berechnungen durchgeführt, um abzuschätzen welchen Anteil der Fernbereich an den Berechnungen ausmacht.

Hierfür wurde die Anwendung der Näherung deaktiviert und die Rechenzeit $t_{\text{analytisch}}$ für eine Berechnung von `GetEnPhiElement(p)` gemessen. Diese wurde dann durch die Anzahl der Elemente $N_{\text{Container}}$ dividiert um die durchschnittliche Berechnungsdauer für die analytischen Berechnungen eines Drahtsegmentringes zu erhalten. Daraufhin wurde eine weitere identische Berechnung mit aktivierter Näherung durchgeführt. Nach dieser wurde ausgegeben für wie viele Elemente $N_{\text{analytisch}}$ die analytische Lösung benutzt wurde. Somit ergibt sich für den Anteil der nahen Elemente an der gesamten Rechenzeit mit aktivierter Approximation t_{Gauss} :

$$\text{Anteil der nahen Elemente} = \frac{N_{\text{analytisch}} \cdot \frac{t_{\text{analytisch}}}{N_{\text{Container}}}}{t_{\text{Gauss}}} \quad (7.3)$$

Für den Fernbereich gilt dann:

$$\text{Anteil der fernen Elemente} = 1 - \text{Anteil der nahen Elemente} \quad (7.4)$$

Diese Berechnungen wurden für alle drei verschiedenen Diskretisierungen durchgeführt. Hier konnte eine Abhängigkeit des Anteils von der Größe der einzelnen Elemente festgestellt werden. Jedoch sollten diese Ergebnisse nach dem Einfügen des Drahtabstandes in `GetEnPhiElement(p)` nochmal überprüft werden. Bei einer sehr guten Diskretisierung kann es vorkommen, dass die Länge des Elementes kürzer wird, als der Abstand zweier Drähte. Da sich die Funktion `GetEnPhiElement(p)` bisher aber nur an der Elementlänge orientiert, kann es so passieren, dass die Näherung zu früh benutzt wird.

Grob lässt sich nach diesem ersten Test jedoch sagen, dass die Anteile von Nah- und Fernbereich in der Berechnung ca. gleich groß sind. Somit wäre es möglich, durch die Nutzung von Legendre-Polynomen eine Hälfte der Rechenzeit zu verkleinern. Für reine Berechnungen im Bereich der Drähte würde sich diese Verbesserung kaum lohnen. Man würde zwar an der eigentlichen Berechnungszeit sparen, jedoch müssten vor Beginn der eigentlichen Berechnungen die Sourcepoints für die Legendre-Polynomentwicklung (Siehe Kapitel 4.2) berechnet werden. Somit würde sich die Vorbereitungszeit für die Berechnung vergrößern. Sollte das Programm später einmal so modifiziert werden, dass man Simulationen ganzer Teilchenbahnen von Bereich der Drähte bis in den Flusschlauch, inklusive dem Wechsel auf die Legendre- Polynom- Entwicklung ab einem ausreichenden Abstand zum Drahtsystem, durchführen kann, so könnte man über diese Änderung für `GetEnPhiElement(p)` nachdenken.

7.4. Optimierung für die Haltestruktur

Alle bisherigen Verbesserungen bezogen sich ausschließlich auf die Drähte. Das Drahtsystem des KATRIN-Hauptspektrometers beinhaltet jedoch nicht nur die Drähte sondern auch ihre Haltestruktur. In bisherigen Berechnungen wurden diese nicht berücksichtigt, da sie die Rechenzeit mit den momentan vorhandenen Methoden stark erhöhen würde. Ein weiteres Vorhaben sollte es also sein, die Berechnung der Drahtstruktur so zu vereinfachen, dass es möglich ist, sie zu berücksichtigen ohne zu große Rechenzeiten zu erhalten. Durch die Verwendung der Gauss- Quadratur könnte dies möglich sein. So könnte die Haltestruktur durch Trapeze dargestellt werden. Diese Trapeze könnten dann durch eine doppelte Anwendung der Gauss- Quadratur mit mehreren Punktladungen approximiert werden. Hierfür wird das Trapez in ein lokales zweidimensionales Koordinatensystem transformiert (Siehe Abbildung 7.1).

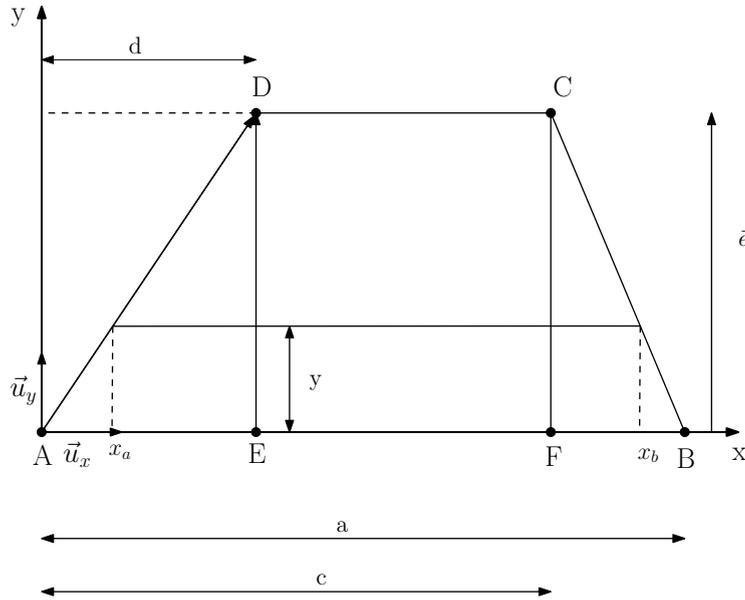


Abbildung 7.1.: Das zu berechnende Trapez, dargestellt im lokalen Koordinatensystem

Der Eckpunkt A des Trapezes sei der Ursprung des Koordinatensystems. Zuerst wurden die Vektoren zu den beiden benachbarten Eckpunkten definiert:

$$\vec{d} = \vec{D} - \vec{A} \quad \vec{a} = \vec{B} - \vec{A} \tag{7.5}$$

Durch die Normierung von a erhält man den Einheitsvektor in Richtung der x-Achse des lokalen Koordinatensystems:

$$\vec{u}_x = \frac{\vec{a}}{a} \quad \text{mit} \quad a = |\vec{a}| \tag{7.6}$$

\vec{AE} ist die Projektion des Vektors \vec{d} auf die \vec{u}_x -Achse:

$$\vec{AE} = (\vec{d} \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x \tag{7.7}$$

Der Vektor $\vec{e} = \vec{ED} = \vec{d} - \vec{AE}$ zeigt von Punkt E zu Punkt D. Normiert man diesen Vektor, so erhält man den Einheitsvektor in Richtung der y-Achse des lokalen Koordinatensystems:

$$\vec{u}_y = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} \tag{7.8}$$

Die Trapezhöhe im lokalen Koordinatensystem beträgt $y_m = |\vec{e}|$.

Weitere Parameter sind:

- die Strecke von Punkt A zu Punkt E: $d = \vec{d}\vec{u}_x = |\vec{AE}|$
- die Strecke von Punkt F zu Punkt A: $c = (\vec{C} - \vec{A}) \cdot \vec{u}_x$

Den Punkt F erhält man, wenn man den Vektor von A zu C auf die lokale x-Achse projiziert.

Für Anfangs- und Endpunkt des Trapez in x-Richtung in Abhängigkeit von der aktuellen Höhe y_m gilt:

$$x_a(y) = d \cdot \frac{y}{y_m} \quad , \quad x_b(y) = a + (c - a) \cdot \frac{y}{y_m} \quad \text{mit} \quad 0 \leq y \leq y_m \quad (7.9)$$

Gegeben sei ein beliebiger Punkt T innerhalb des Trapezes. Sein Ortsvektor lässt sich wie folgt im lokalen Koordinatensystem beschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{A} + x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y & (7.10) \\ \text{mit} \quad y &\in [0, y_m] \\ x &\in [x_a(y), x_b(y)] \end{aligned}$$

Das Potential des Trapez mit der Ladung Q an einem Punkt \vec{P} berechnet sich wie folgt:

$$\Phi(\vec{P}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{y_m} dy \int_{x_a(y)}^{x_b(y)} dx \cdot \frac{1}{|\vec{P} - \vec{T}|} \quad (7.11)$$

Mit

$$\int_{x_a(y)}^{x_b(y)} dx \cdot \frac{1}{|\vec{P} - \vec{T}|} = F_y(y) \quad (7.12)$$

erhält man mit einmaliger Anwendung der Gauss'schen Quadraturformel für das Potential:

$$\Phi(\vec{P}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{j=1}^N w_j \cdot F_y(y_j) \quad (7.13)$$

N ist hierbei die gewählte Anzahl an Knotenpunkten, die w_j sind die Gewichte der einzelnen Punkte. Das Trapez wurde also in N Drähte unterteilt. Um diese Drähte mit Punktladungen zu nähern, wird die Gauss-Quadratur erneut angewandt. Diesmal auf F_y :

$$\Phi(\vec{P}) \approx \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{w_j \cdot w_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{P} - \vec{T}_{jk}|} \quad (7.14)$$

Im Prinzip wird das Trapez zuerst mit M Drähten, welche parallel zur lokalen x-Achse u_x verlaufen, genähert. Anschließend wird für jeden dieser Drähte eine weitere Gauss-Quadratur durchgeführt. Diese ersetzt ihn durch N Punktladungen. Somit erhält man $M \cdot N$ Punktladungen.

Für T_{jk} gilt:

$$\vec{T}_{jk} = \vec{A} + x_k \cdot \vec{u}_x + y_j \cdot \vec{u}_y \quad (7.15)$$

Mit

$$y_j = \frac{y_m}{2} \cdot (1 + w_j) \quad \text{und} \quad x_k = x_a(y_j) + (1 + w_k) \frac{s(y_j)}{2} \quad \text{mit} \quad s(y_j) = x_b(y_j) - x_a(y_j) \quad (7.16)$$

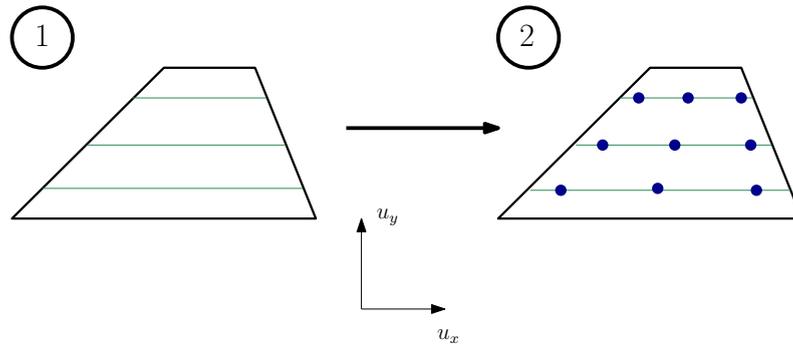


Abbildung 7.2.: Gaussnäherung für ein Trapez: Zuerst wird das Trapez in ein zweidimensionales lokales Koordinatensystem transformiert. Hier wird dann eine Gauss-Quadratur in u_y -Richtung durchgeführt. Das Trapez wird somit durch einige parallel verlaufende Drähte approximiert. Anschließend folgt eine weitere Quadratur in u_x -Richtung. So kann das Trapez mit Punktlastungen genähert werden.

Dreiecke und Rechtecke sind Spezialfälle eines Trapezes. Somit könnten mit dieser Approximation auch zusammengesetzte Geometrien aus Dreiecken oder Rechtecken⁶ berechnet werden.

Interessantester Aspekt dieser Methode ist jedoch, dass einige Teile der Haltestruktur axialsymmetrisch angeordnet sind. Für diese Teile könnten zuerst die Trapeze mit Punktlastungen approximiert werden und in einem weiteren Schritt könnten die axialsymmetrisch angeordneten Punktlastungen dann mit einem Ring approximiert werden. So könnte man z.B. für jedes Trapez, welches um die z-Achse rotiert wird, eine RingContainer mit diesen Ringen erstellen. Sollte diese Methode funktionieren, so könnte in KASSIOPEIA eine neue Klasse zur Feldberechnung erstellt werden. Diese Klasse sollte dann an Elektroden-Geometrien sowohl Drähte und Kegelstümpfe, als auch Dreiecke bearbeiten können.

⁶Zum Beispiel Rechtecke aus den ELCD33-Eingabedateien

8. Entfernung gespeicherter Elektronen mittels Pin

Für die Durchführung des KATRIN-Experiments wird ein Ultrahochvakuum ($\approx 10^{-11} \text{ mbar}$) benötigt, um Untergrundereignisse minimal zu halten. (Siehe Kapitel 2) Wie hoch der Untergrund tatsächlich ist, werden die ersten Messungen zeigen. Bereits bekannt ist, dass es einige Möglichkeiten gibt, wie ein zu hoher Untergrund im Hauptspektrometer entstehen könnte. Elektronen könnten von den Drähten durch radiale Bewegungen in den Fluss-schlauch und damit zum Detektor gelangen. Diese Untergrundelektronen wären dann von den Signalelektronen nicht mehr zu unterscheiden. Dies führt dazu, dass selbst ein Untergrund im mHz-Bereich die Messungen stören bzw. die Ergebnisse verfälschen würde. Auch könnten durch die Wechselwirkungen von Myonen der kosmischen Strahlung in der Tankwand Elektronen entstehen, welche die Drähte passieren und dann im Spektrometer gespeichert werden. Von diesen gespeicherten Elektronen könnten durch Restgas-Ionisation [Glü05] Sekundärelektronen produziert werden. Diese könnten im Energiebereich der Elektronen aus dem Tritium-Zerfall liegen und somit vom Detektor fälschlicherweise als Signalelektronen detektiert werden. Um dies zu vermeiden, ist es wichtig den Untergrund im Hauptspektrometer möglichst gering zu halten. Für den Fall, dass der Untergrund zu hoch sein sollte gibt es mehrere Ideen zur Untergrund-Reduktion. Eine dieser Ideen ist der mechanische Pin.

Dieses Kapitel befasst sich kurz mit der Speicherung von Elektronen im Hauptspektrometer und präsentiert dann eine Idee, wie diese wieder aus dem Spektrometervolumen entfernt werden könnten. Der Fokus liegt auf den mit KASSIOPEIA durchgeführten Simulationen und deren Ergebnissen.

8.1. Speicherung von Elektronen im Hauptspektrometer

Für ein Spektrometer vom MAC-E-Filter-Typ existieren drei mögliche Elektronen-Fallen [Glü08]. Zwei dieser Fallen können in keinem Spektrometer dieses Typs vermieden werden. Dies sind die innere, magnetische Spiegel-Falle und die Hybrid-Falle. Beim Betrieb des Spektrometers mit zwei lokalen Magnetfeldminima [Rei09] tritt zusätzlich noch eine lokale, magnetische Spiegel-Falle auf [Wan09].

- Innere, magnetische Spiegelfalle: Das Magnetfeld ist an den Enden des Spektrometer-Tanks größer als in der Analysierebene. Daher wird auf dem Weg von der Analysierebene zum Detektor die, in der Analysierebene nahezu longitudinale Bewegung

in eine Radialbewegung umgewandelt. Wird dabei die gesamte Longitudinalenergie eines Elektrons in Transversalenergie umgewandelt bevor dieses den Punkt maximalen Feldes am Ausgang des Spektrometers erreicht hat, so bleibt dieses Elektron im Spektrometer gespeichert.

- Hybrid-Falle: Außen startende Elektronen, deren Energie kleiner ist als das Retardierungspotential werden reflektiert bevor sie die Analysierebene passieren können. Ist zusätzlich der Startwinkel dieser Elektronen ausreichend groß, so werden sie am Rand des Spektrometers vom Magnetfeld der supraleitenden Magnete durch den magnetischen Spiegel-Effekt wieder zurück reflektiert.
- Lokale, magnetische Spiegelfalle: Diese Falle funktioniert im Prinzip wie die innere magnetische Spiegelfalle, nur dass hier die Elektron ausschließlich innerhalb der Magnetfeld-Minima gespeichert sind. In einer solchen Falle gespeicherte Elektronen passieren die Analysierebene nicht.

Des Weiteren kann es, durch große Feldgradienten in bestimmten Bereichen des Spektrometers zur Ausbildung sogenannter Penningfallen kommen. (Siehe Kapitel 2.5)

8.2. Die Idee zur Nutzung eines Pins

Nicht nur im Hauptspektrometer, sondern auch zwischen Haupt- und Vorspektrometer wird eine Penning-Falle entstehen. Siehe auch Kapitel 2.5.4. Grund hierfür sind die Magnetfelder und Retardierungspotentiale der Spektrometer. Gefüllt wird diese Falle durch den Elektronen-Untergrund der beiden Spektrometer.

Björn Hillen führte ein Test-Experiment durch, in welchem er diese Falle nachbaute und diverse Methoden zu ihrem Entleeren testete [Hil10]. Eine dieser Methoden war ein beweglicher Pin, welcher in den Flussschlauch bewegt werden konnte. Elektronen, welche auf den Pin treffen, werden von ihm absorbiert und somit aus der Falle entfernt.

Da dieses Prinzip des Pins sehr gut funktionierte schlug Jochen Bonn die Anwendung eines ähnlichen Konzeptes für das Hauptspektrometer vor [Wei10]. Der Pin ist ein ca. 5 m langes Band mit einem Durchmesser von 3-10mm, das ins Hauptspektrometer eingebaut wird. Nach der Präsentation dieser Idee wurden verschiedene Möglichkeiten, wie dieser Pin realisiert werden könnte, entwickelt [Glü10]. Abbildung 8.2, 8.3 und 8.4 zeigen diese verschiedenen Varianten.

Erste Pin-Variante

Der erste Vorschlag sah vor, dass der Pin durch ein Loch in der Tankwand von oben in das Hauptspektrometer eingeführt werden sollte. Da aber nicht abgeschätzt werden konnte, wie hoch das Risiko beim Bohren des benötigten Loches für die bereits installierten Drahtmodule war, wurde dieser Vorschlag abgelehnt.

Pin als Rute vom Pumpstutzen

Die zweite Variante schlägt vor, den Pin unten am mittleren Pumpstutzen einzuführen und zu befestigen. Dieser Pin ist nun kein Band mehr, sondern eine Rute aus einem stabilen Material.

Weiterentwicklung der Rute

Eine weitere Idee wäre am Ende der Rute noch ein Band zu befestigen, welches senkrecht nach unten ins Spektrometer hängt. Dieses Band wäre neben der Rute noch ein zusätzlicher Elektronenfänger. Zur Stabilisierung dieses Bandes könnte noch ein Kügelchen an seinem Ende befestigt werden.

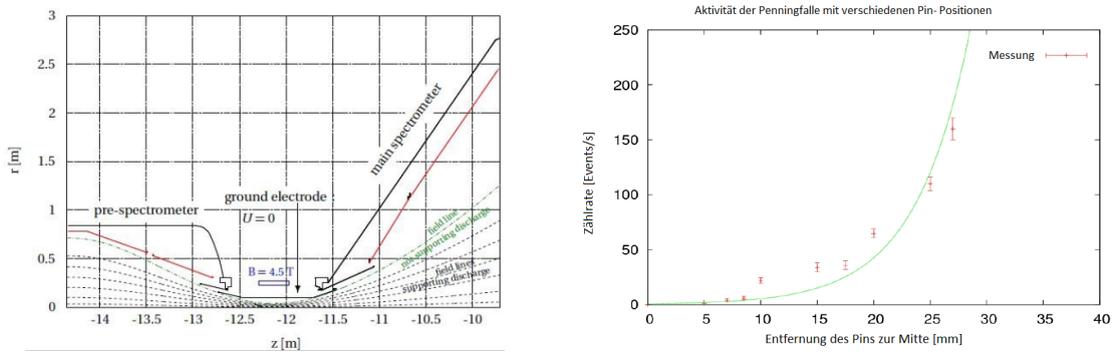


Abbildung 8.1.: Abbildungen aus [Hil10]:*links*: Die Penningfalle zwischen Vor- und Hauptspektrometer entsteht durch die Retardierungspotentiale der beiden Spektrometer und wird durch deren Elektronen-Untergrung gefüllt. Elektronen, deren Energie zu gering ist um die Retardierungspotentiale zu überwinden, werden in dieser Falle gefangen. Durch das Magnetische Feld, in welchem sie sich befinden, werden sie auf eine Zyklotronbahn gezwungen.*rechts*: Absorbtionsrate des Pins: Hier wird die Anzahl der gemessenen Ereignisse in Abhängigkeit des Pinabstandes zur Strahlrohrmitte dargestellt. Es ist klar zu erkennen, dass die Penningfalle nur mit einem Pin nahe der Mitte erfolgreich geleert werden kann.

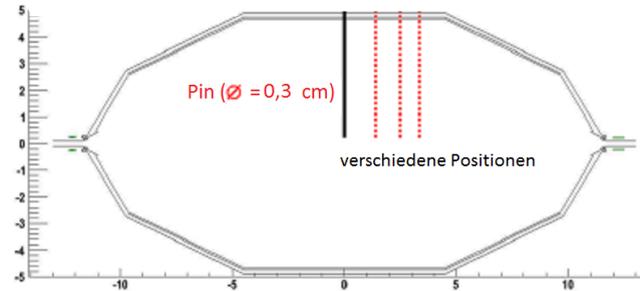


Abbildung 8.2.: Erste Pin-Variante

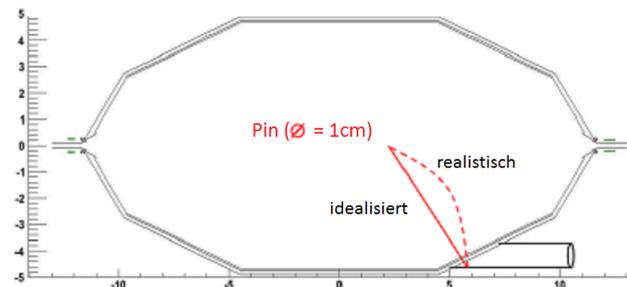


Abbildung 8.3.: Pin-Variante 2

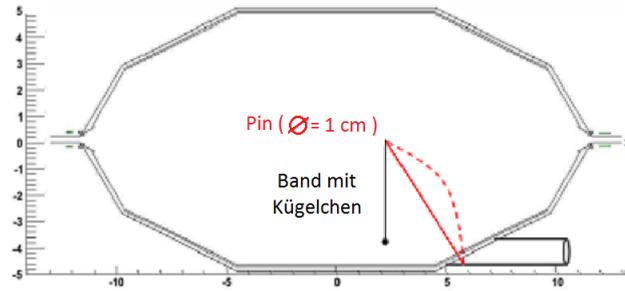


Abbildung 8.4.: Pin-Variante 3

8.3. Simulationen

Zur Vorbereitung auf die Simulationen im Rahmen dieser Diplomarbeit und um sich mit dem KATRIN-Simulationspaket KASSIOPEIA vertraut zu machen, wurden die 3 verschiedenen Pin-Ideen gemeinsam mit Benjamin Jung [Jun11a][Glü10] simuliert. Die gewonnenen Daten wurden anschließend gemeinsam ausgewertet.

8.3.1. Verwendete Geometrien und Felder

Für die Simulationen wurde eine vereinfachte Hauptspektrometer-Geometrie, wie Abbildung 8.5 sie zeigt, verwendet. Die verschiedenen Pins wurden als Zylinder dargestellt. Dies führt dazu, dass für die Pin-Versionen 2 und 3 ein idealisierter Fall simuliert wurde. In der Realität würde sich die Rute durchbiegen. Und eine zylinderförmige Rute könnte man, wie in Kapitel 8.5 gezeigt wird, auch nicht benutzen. Dem Pin wurde in der Simulation kein Potential gegeben. Er wurde nur als geometrisches Objekt betrachtet, an das die Elektronen stoßen können. Neben den drei verschiedenen Pin-Versionen wurden noch verschiedene Standorte getestet. Für Version 1 wurden diverse Lochpositionen simuliert für Version 2 und 3 wurde der Abstand der Pin Spitze zur Analysierebene variiert. Für das Magnetfeld wurde die komplette KATRIN Magnetfeldkonfiguration mit einem lokalen Magnetfeld-Minimum¹ verwendet. Weitere Simulationen wurden für die Konfiguration mit 2 Minima²durchgeführt. Um das elektrische Feld zu erzeugen, wurde die Hauptspektrometergeometrie³ verwendet. Das Feld der Drähte wurde mit `input_mainspec_wire_half.el32` erzeugt. Für jede Konfiguration wurden 500 Elektronen simuliert.

8.3.2. Der Teilchen-Generator

Als Teilchen-Generator wurde ein Volumengenerator benutzt. Dieser erzeugte innerhalb der Drahtelektroden in einem kleineren Volumen Elektronen mit isotroper Winkel- und Energieverteilung. Als Volumen wurde eine identische Geometrie wie in Abbildung 8.5 benutzt. Diese lag innerhalb der verwendeten Hauptspektrometergeometrie und hatte zu dieser einen Abstand von 0,2 m. Die Simulationen wurden für zwei verschiedene Energie-Konfigurationen durchgeführt. Einmal für niederenergetische Elektronen mit einer Energie von 0 bis 30 eV und für Elektronen mit den Energien des Tritium-Zerfallsspektrums.

8.3.3. Abbruch-Bedingungen

Zum Auswerten der Simulationen wurden verstärkt die verschiedenen Abbruchbedingungen der einzelnen Elektronen betrachtet und ausgewertet. Daher war die Wahl passender Abbruchbedingen für eine erfolgreiche Simulationsauswertung sehr wichtig. Die folgenden Abbruchbedingungen wurden zur Simulation des Pins benutzt:

¹Magnetfeld-Konfiguration: `Magfield3KATRIN`, Datei mit den Spulen-Einstellungen:`KATRIN.mag3`

²Spulen-Einstellungen: `ms_magnet_twomimima.mag3`

³verwendete Geometrie: `input_mainspec_full_half.el32`

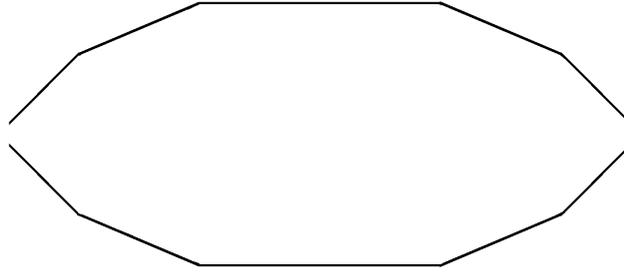


Abbildung 8.5.: Die verwendete Geometrie ist eine vereinfachte Form des Hauptspektrometertanks, zusammengesetzt aus einem Zylinder und vier Kegelstümpfen. Die Drahtelektroden wurden geometrisch nicht berücksichtigt.

- **MaxSteps:** Im Hauptspektrometer existieren auch gespeicherte Elektronen, welche nicht auf den Pin treffen. Diese Elektronen können sich sehr lange im Hauptspektrometervolumen aufhalten ohne dass etwas mit ihnen geschieht. Daher wurde eine maximale Schrittzahl eingeführt. Hat das Teilchen diese maximale Schrittzahl erreicht, wird seine Simulation abgebrochen. Es ist sehr wichtig, dass diese maximale Schrittzahl nicht zu klein gewählt wird, da es sonst passieren kann, dass Elektronen, welche den Pin noch treffen würden, zu früh angehalten werden. Wird die maximale Schrittzahl hingegen zu groß gewählt, so erhöht sich die Rechenzeit unnötigerweise.
- **Z-Position:** Der verwendete Teilchen-Generator produziert nicht nur gespeicherte Teilchen, sondern auch solche, die das Spektrometer z.B. auf der Detektorseite verlassen. Damit Teilchen, die das Spektrometer verlassen und somit nicht gespeichert sind, nicht mehr weiter verfolgt werden, wurde diese Abbruchbedingung genutzt. Sie stoppt Elektronen deren Position jenseits eines gewissen, zuvor eingestellten z-Wertes liegt. In den durchgeführten Simulationen wurden als minimales und maximales z Anfangs- und Endpunkt des Hauptspektrometers gewählt.
- **Vessel-Hit:** Elektronen können das Spektrometer nicht nur in z-Richtung verlassen, sondern auch, indem sie auf die Spektrometerwand treffen und dort absorbiert werden. Diese Elektronen wurden durch eine Geometry-Hit- Abbruchbedingung mit der vereinfachten Geometrie des Hauptspektrometers gestoppt.
- **Pin-Hit:** Diese Abbruchbedingung ist ebenfalls vom Typ Geometry-Hit und erklärt sich von selbst. Sobald Elektronen den Pin erreichen, werden sie gestoppt, da der Pin sie erfolgreich aus dem Spektrometer entfernen würde.

8.4. Auswertung und Ergebnisse

Nach der Durchführung der Simulationen wurden zuerst die Abbruchbedingungen betrachtet. Elektronen die mit den Abbruchbedingungen Vessel-Hit und z-Position gestoppt wurden, konnten aus der Auswertung herausgenommen werden, da diese Elektronen nie im Spektrometer gespeichert waren, aber die Wirksamkeit des Pins bei gespeicherten Elektronen untersucht werden sollte. Als zum Simulationsbeginn gespeicherte Teilchen zählen alle Teilchen, die mit den Abbruchbedingungen MaxTime und Pin-Hit abgebrochen wurden. Wobei diese Annahme nicht ganz korrekt ist, da es auch möglich wäre, dass ein Teilchen, welches nicht gespeichert gewesen wäre, auf den Pin trifft, bevor es durch eine der anderen Abbruchbedingungen entfernt wird. Hierzu könnte man genauere Betrachtungen der

Teilchenlaufzeiten durchführen um zu sehen, nach welcher Zeit, die nicht gespeicherten Teilchen entfernt werden. Alle Elektronen, die erst nach dieser Zeit den Pin treffen, waren mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit vorher im Spektrometer gespeichert. Bei den Elektronen die den Pin vorher treffen könnte es einen Anteil an nicht gespeicherten Elektronen geben. Da die durchgeführten Simulationen nur dazu dienen sollten eine Aussage darüber zu treffen, ob das Prinzip des Pins funktionieren würde, wurden diese genaueren Untersuchungen nicht durchgeführt. Würde man sich dazu entscheiden den Pin zu nutzen, so wären weitere Simulationen sehr empfehlenswert.

8.4.1. Untersuchung der Absorptionsrate

Bei den durchgeführten Simulationen wurde für die Absorptionsrate des Pins folgendes angenommen:

$$\text{Absorptionsrate} = \frac{\text{Pin-Hit}}{\text{Alle gespeicherten Teilchen}} = \frac{N_{Pin}}{N_{gesp}} = \frac{\text{Pin-Hit}}{\text{Pin-Hit} + \text{Max-Steps}} \quad (8.1)$$

Allgemein ist zu sagen, dass alle drei Pin-Varianten die Anzahl der gespeicherten Elektronen reduzieren. Die Diagramme 8.6 und 8.7 zeigen die Absorptionsrate des Pins für die verschiedenen Konfigurationen. Genauere Daten befinden sich in den Tabellen im Anhang.

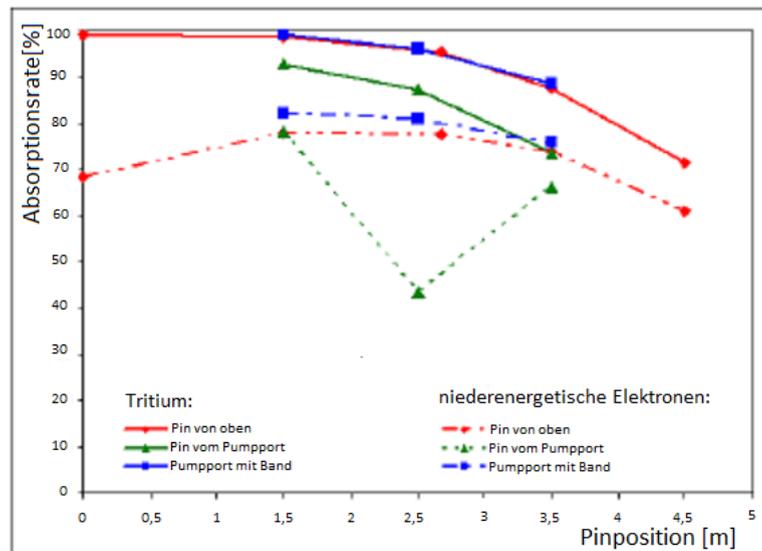


Abbildung 8.6.: Absorptionsrate für verschiedene Pinkonfigurationen und -positionen mit einem Magnetfeldminimum: Das Diagramm zeigt, dass die Absorptionsrate des Pins für Tritium-Zerfallselektronen in allen simulierten Konfigurationen höher ist, als die Absorptionsrate für niederenergetische Elektronen. Dies könnte aber auch, wie in Kapitel 8.4.3 erklärt wird, an der unterschiedlichen Speicherzeit liegen. Weiter haben die Simulationen gezeigt, dass die Ergebnisse für Pin-Version 2 schlechter sind als für die ursprüngliche Version. Der Unterschied zwischen diesen beiden Versionen beträgt immer mindestens 10%. Mit dem zusätzlichen Band jedoch kann die Absorptionsrate des ursprünglichen Pins erreicht werden. Weiter kann man erkennen, dass selbst mit der besten Konfiguration nicht alle gespeicherten Elektronen aus dem Hauptspektrometer entfernt werden können.

Interessant ist der Abfall der Absorptionsrate für Pinversion 2 bei einer Positionierung der Pinspitze im Abstand von 2,5 m zur Analysierebene. Dieser Abfall konnte nur für

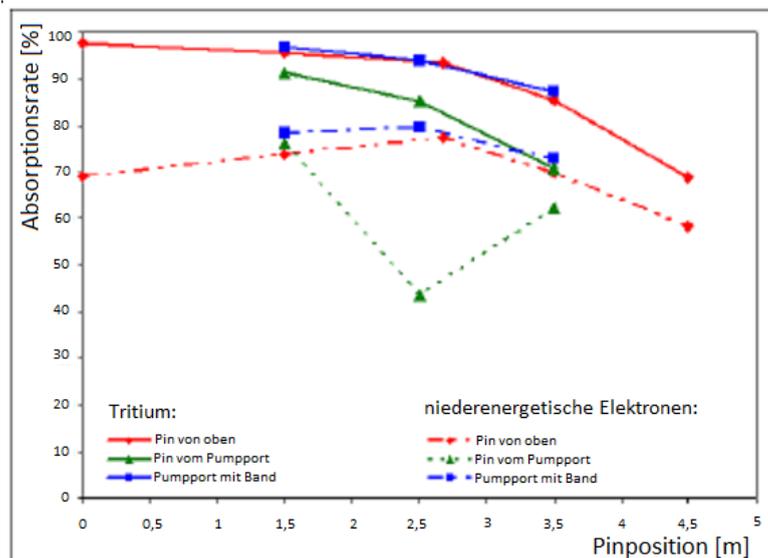


Abbildung 8.7.: Absorbtiionsrate für verschiedene Pin-Konfigurationen und -positionen mit zwei Magnetfeldminima: Vergleicht man dieses Diagramm mit Abbildung 8.6, so ist zu erkennen, dass zwischen den beiden Magnetfeldkonfigurationen kaum ein Unterschied festzustellen ist. Der Pin funktionierte für die Konfiguration mit einem lokalen Minimum minimal besser, jedoch wurden auch für die zweite Konfiguration sehr gute Ergebnisse erzielt. Der Abfall der Absorptionsrate für Pin-Variante 2 bei 2,5, könnte auf einen Fehler in diesem Teil der Simulation hinweisen.

niederenergetische Elektronen festgestellt werden. Eine mögliche Erklärung wäre ein Fehler in diesem Teil der Simulation, zum Beispiel für diese Pin-Geometrie. Sollte man sich für diese Pin-Variante entscheiden müssten hier noch genauere Untersuchungen durchgeführt werden. Für Tritium-Zerfallselektronen sank die Absorptionsrate für alle drei Varianten mit zunehmendem Abstand zur Analysierebene. Pin-Version 1 erzielte in der Analysierebene nahezu 100%. Für niederenergetische Elektronen war die Absorbtiionsrate von Variante 1 bei 1,5 m am besten. Version 2 und 3 wurden erst ab einem Abstand von 1,5 m zur Analysierebene simuliert, da ein Erreichen der Analysierebene mit der Pinspitze technisch kaum realisierbar wäre. Bei den niederenergetischen Elektronen wurde bei diesem Abstand eine maximale Absorptionsrate von ca. 80% mit der dritten Pin-Version erreicht.

8.4.2. Endpositionen

Betrachtet man sich die Endpositionen aller Teilchen in Abbildung 8.8, so ist die Position des Pins gut erkennbar. Vor allem bei Pin-Version 3 lässt sich sehr gut erkennen wieviele zusätzliche Elektronen noch durch das angebrachte Band eingefangen werden. Bei Version 2 enden mehrere Elektronen mitten im Spektrometer, abseits des Pins, während Version 3 eine größere Anzahl an Elektronen fängt.

8.4.3. Betrachtung der Speicherzeit

Betrachtet man die durchschnittliche Speicherzeit für die absorbierten Elektronen, so ist zu erkennen, dass die Tritiumzerfalls-Elektronen schneller vom Pin absorbiert werden, als die niederenergetischen. Dies liegt unter anderem daran, dass sie die Elektronen aus dem Tritiumzerfall aufgrund ihrer höheren Energie schneller durch das Spektrometer bewegen und somit den Pin schneller erreichen. Abbildung 8.9 und Abbildung 8.10 zeigen die Speicherzeitverteilung. Während nach 0,025 s fast keine Tritium-Elektronen mehr durch den

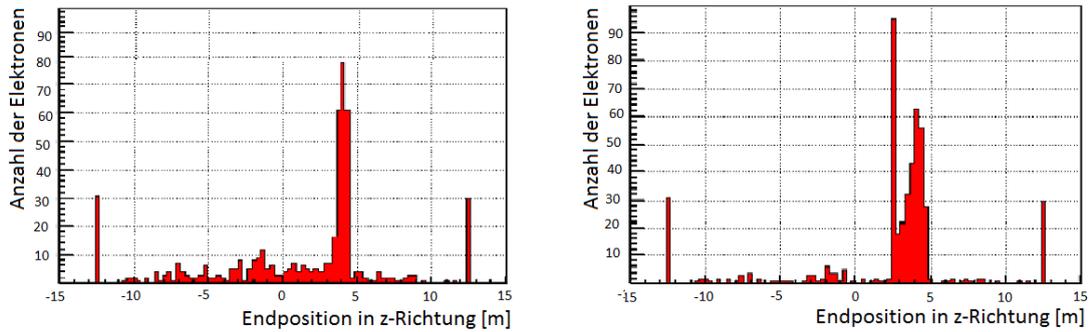


Abbildung 8.8.: Endpositionen der Elektronen für *links:Pin* in Rutenform und *rechts:Pin* in Rutenform mit Bändchen. Es ist deutlich zu erkennen, dass durch das zusätzliche Bändchen noch einige Elektronen mehr entfernt werden. Der höchste Peak in der rechten Abbildung befindet sich genau an der Position des Bändchens. Die Peaks bei -12,5 und +12,5 m gehören zu Teilchen, deren Berechnung mit der Abbruchbedingung z-Position beendet wurde. Die restlichen niedrigen Peaks zeigen die Endpositionen der Teilchen, welche die maximale Schrittzahl erreicht haben. Klar zu erkennen ist, dass die Anzahl der MaxSteps-Elektronen durch das Bändchen reduziert werden kann.

Pin entfernt werden, werden selbst nach 0,07s noch niederenergetische Elektronen entfernt. Abbildung 8.9 könnte darauf hinweisen, dass die maximale Schrittzahl für niederenergetische Elektronen noch etwas zu niedrig gewählt wurde. Würde man noch etwas länger warten, würden sich möglicherweise noch mehr niederenergetische Elektronen entfernen lassen.

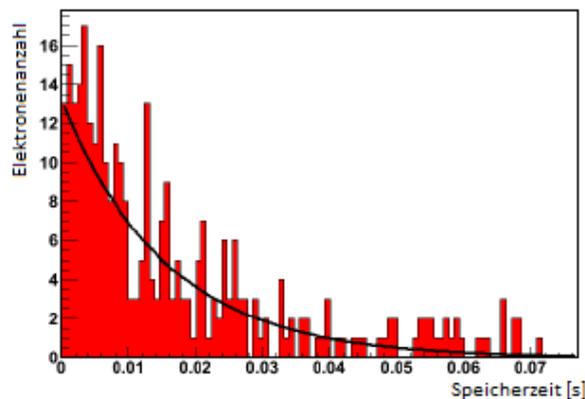


Abbildung 8.9.: Speicherzeit für niederenergetische Elektronen [0-30eV]. Aufgetragen wurden die Anzahl der Elektronen über ihrer Speicherzeit. Verwendet wurden hier nur die Elektronen, welchen durch den Pin entfernt wurden. Es wurde ein exponentieller Fit an die Werte angelegt.

8.5. Technische Realisierbarkeit

Gespräche mit Rainer Gumbsheimer haben gezeigt, dass der Einbau eines Pins in den mittleren Pumpstutzen möglich ist. Die Konzeptzeichnung 8.11 von Rainer Gumbsheimer zeigt einen ersten Entwurf für den Pin.

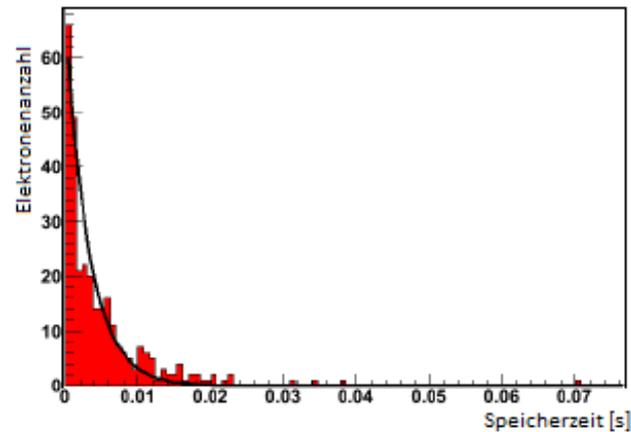


Abbildung 8.10.: Speicherzeit für Tritiumelektronen. Auch hier wieder mit exponentiellem Fit und nur für Elektronen mit der Abbruchbedingung Pin-Hit. Der Vergleich mit 8.9 zeigt, dass Tritiumelektronen sehr viel schneller vom Pin entfernt werden, als niederenergetische Elektronen.

8.5.1. Aufbau

Der Pin würde im mittleren Pumpstutzen befestigt sein. Dort würde er einen Durchmesser von 8-10 cm haben und sich dann zu seiner Spitze hin verzüngen. Ein zylinderförmiger Pin, wie er simuliert wurde, wäre technisch aufgrund seines Eigengewichts und der großen Länge nicht realisierbar. Der Pin muss an seiner Halterung dicker und massiver sein, als an der Spitze. An der Seite sollte er Löcher haben, um sein Gewicht und somit auch sein Durchbiegen auf ein Minimum zu reduzieren. Desweiteren wäre er innen hohl. So wäre, mit einem Loch an der Spitze auch das Einbringen eines Bandes möglich. Als Material wird Edelstahl 1.4435 empfohlen. Mit diesen Eckdaten wäre es realisierbar, den Pin etwa 1,5 -3,5 m von der Analysierebene entfernt enden zu lassen [Jun11a]. Da der Pin durch die Drähte hindurchgeführt wird und somit ihr Feld stört, müsste er auch auf einem gewissen Potential liegen um diese Störung auszugleichen. Jedoch wurde dieses Potential, wie bereits in Unterkapitel 8.3 erwähnt, nicht simuliert.

8.5.2. Zeitverlust

Würde man sich nach den ersten Tests am Hauptspektrometer für die Anwendung des Pins entscheiden, so würde es zu einer Verzögerung der weiteren Testmessungen kommen. Vor dem Einbau müsste wieder Luft ins Spektrometer eingelassen werden und Pumpe und Baffle aus dem mittleren Pumpstutzen entfernt werden. Anschließend müssten Pumpe und Baffle wieder eingebaut werden, das Spektrometer müsste erneut ausgeheizt werden und man müsste das Vakuum im Tank erneut aufbauen. Insgesamt würde der Einbau des Pins mindestens 6 Monate dauern. Jedoch könnte er in der Zeit zwischen den ersten Testmessungen und dem Beginn der eigentlichen Messungen durchgeführt werden. Schlimmer wäre es, wenn bei den Testmessungen kein erhöhter Untergrund festgestellt wird, aber dann nach dem Anschluss der Tritiumquelle zu Beginn der eigentlichen Messungen ein hoher Untergrund durch zu viele Tritium-Moleküle im Hauptspektrometer entstehen würde. Wäre dies der Fall, würde mindestens ein halbes Jahr an Messzeit verloren gehen.

8.6. Fazit

Die Simulationen haben gezeigt, dass der Pin funktioniert. Jedoch würde der Einbau sehr viel Zeit beanspruchen. Somit würde sich der Zeitplan verschieben und die weiteren Messungen könnten erst später starten. Desweiteren würde der Pin einen Schatten auf den

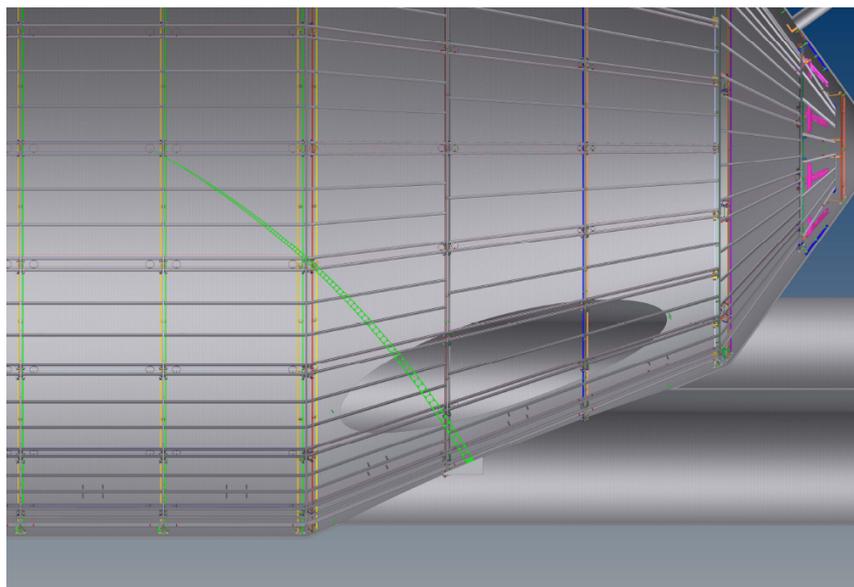


Abbildung 8.11.: Konzeptzeichnung von Rainer Gumbsheimer: Abbildung des hinteren, unteren Teils des Spektrometers im Bereich der Pumpstutzen. In grün sieht man den, zum Ende hin schmaler werdenden Pin mit den seitlichen Löchern.

Detektor werfen, sodass 12 - 18 Detektorpixel für die Auswertung unbrauchbar wären. Durch ein weiteres Ausheizen des Tanks würde außerdem eine sehr hohe Belastung für das empfindliche Drahtsystem entstehen. Aufgrund dieser Nachteile wird der Pin nur eine Notlösung sein, falls der Untergrund an gespeicherten Elektronen höher ist als erwartet und falls dann die anderen Methoden nicht funktionieren sollten. Sollte dieser Fall eintreten, so wird die Durchführung weiterer Simulation, mit Pin-Potential, realer Pin-Geometrie und längerer Laufzeit empfohlen. Auch sollte die Anzahl der simulierten Elektronen vergrößert werden um eine bessere Statistik zu erhalten.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Für das KATRIN Experiment ist eine hochpräzise Simulation von elektrischen und magnetischen Feldern notwendig. Für die Berechnung der Teilchentrajektorien werden pro Teilchenschritt dreizehn Feldberechnungen durchgeführt. Somit müssen diese Berechnungen nicht nur präzise, sondern auch schnell sein.

Besonders zeitintensiv sind Feldberechnungen komplizierter Geometrien, wie des Drahtelektrodensystems des KATRIN Hauptspektrometers. Exakte Elektron-Bahnberechnungen im Bereich dieser Drähte sind jedoch notwendig. Um beispielsweise den Myon-induzierten Untergrund im Detail zu simulieren, müssen die, an der inneren Oberfläche der Tankwand erzeugten, Elektronen durch das Drahtsystem hindurch bis ins Innere des Spektrometers gelangen können.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde eine Methode zur Approximation der Feld- und Potentialberechnungen für das Drahtelektrodensystem des KATRIN Hauptspektrometers entwickelt, in das KATRIN-eigene Simulationspaket KASSIOPEIA implementiert und getestet. Die einzelnen Drahtmodule werden mit Ringen approximiert, deren Feld und Potential mit elliptischen Integralen berechnet werden kann. Ein Drahtmodul besteht aus bis zu 1200 Drähten, welche in Form eines Kegelstumpfes angeordnet sind. Anstatt diese Drähte einzeln analytisch zu berechnen, müssen, durch die Anwendung dieser Approximation, nur wenige Kreise berechnet werden. Um die Genauigkeit und die Geschwindigkeit der Approximation zu testen werden die Ergebnisse mit der analytischen Lösung verglichen.

In einem ersten Schritt wurden diverse Positionen und Ladungsverteilungen für die Ringe getestet. Die Verteilung äquidistanter Ringe mit identischen Ladungen schied dabei nach den ersten Tests aus. Selbst mit großer Ringzahl N konnten keine ausreichend präzisen Werte für Feld und Potential gewonnen werden. Daraufhin wurde die Newton-Cotes-Näherung getestet. Diese arbeitet mit äquidistanten Stützstellen und gewichteten, also unterschiedlichen, Ladungen. Für diese Approximation wurden schon ab 20 Ringen annehmbare Ergebnisse erzielt. Die Berechnungen beschleunigten sich so um den Faktor 20. Dies bot noch weiteren Raum für Verbesserungen. Daher wurde mit der Gauss-Quadratur eine weitere Möglichkeit für die Verteilung der Ringe getestet. Bei dieser Approximation werden sowohl die Ladung der einzelnen Ringe als auch ihre Position variiert. Sowohl die Präzision, als auch die Rechenzeiten dieser Methode waren sehr überzeugend. Im Vergleich zur Newton-Cotes-Näherung lieferte die Gauss-Quadratur bereits für wesentlich kleinere Ringzahlen sehr gute Ergebnisse. Für einen Kegelstumpf aus 1200 Drähten ergibt sich mit $N=5$ eine Beschleunigung der Berechnung, im Vergleich zur analytischen Lösung, um den

Faktor 85. Für große Teile des Hauptspektrometers könnte die Gauss-Quadratur mit $N=3$ verwendet werden. In diesen Bereichen kann die Berechnung sogar um den Faktor 150 beschleunigt werden.

Aufgrund dieser Ergebnisse wurde die Gauss-Quadratur in die KATRIN Simulationssoftware implementiert. Dabei wurde eine Methode entwickelt, welche die dynamische Wahl der Berechnungsmethode erlaubt. In Abhängigkeit vom Abstand wird entweder die Näherung mit 5 oder die mit 3 Ringen gewählt. Für sehr nahe Drahtmodule werden die einzelnen Drähte analytisch berechnet. Erste Tests mit dem Drahtsystem des KATRIN Hauptspektrometers zeigten eine Beschleunigung der Berechnung um den Faktor 100.

Mit der Implementierung der Gauss-Quadratur wurde ein großer Schritt in Richtung schnellerer Berechnungen im Bereich des Drahtelektrodensystems gemacht. Jedoch besteht noch Raum für Verbesserungen. So könnte die Berechnung mit Legendre-Polynomen in die dynamische Berechnungsmethoden-Wahl implementiert werden, wodurch sich die Rechenzeiten für weiter entfernte Module beschleunigen würden.

Auch bieten sich für die Gauss-Quadratur noch weitere mögliche Anwendungsmethoden, abseits des Drahtelektrodensystems, an. So könnten die Felder komplizierter, aus Trapezen zusammengesetzter, Geometrien, wie z.B. dem Haltesystem der Drahtelektroden, mit guter Genauigkeit und relativ schnell simuliert werden.

Literaturverzeichnis

- [A90] H.J.Ache et al., *Fusion Eng Design* 12 (1990) 331
- [A+97] W. W. M. Allison et al., *Measurement of the atmospheric neutrino flavor composition in Soudan 2*, *Physics Letters B* , Volume 391, (1997)
- [A+02a] J.Abdurashitov et al., *Solar neutrino flux measurements by the soviet-american gallium experiment (sage) for half the 22-year solar cycle* , *Journal of Experimental and Theoretical Physics* , Volume 95, Number 2(2002)
- [A+02b] Q. R. Ahmad et al., *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury neutrino observatory* , *Phys. Rev. Lett.* , Volume 89, Issue 1, (2002)
- [A+05a] E. Aliu et al., *A Measurement of Atmospheric Neutrino Oscillation Parameters by Super-Kamiokande RM1*, *Phys. Rev.*, Volume D71 (2005)
- [A+05b] E. Aliu et al., *Evidence for muon neutrino oscillations in an accelerator-based experiment*, *Phys. Rev. Lett.*, Volume 94 (2005)
- [A+06] M.H.Ahn et al., *Measurement of neutrino oscillation by the K2K experiment*, *Phys. Rev. D*, Volume 74, Issue 7(2006)
- [B07] A.Bettini, *GERDA. Germanium Detector Array. Search for Neutrino-less $\beta\beta$ Decay of ^{76}Ge* , *Nuclear Physics B- Proceedings Supplements*, Volume 168, Proceedings of the Neutrino Oscillation Workshop (2007)
- [B+82] G. Battistoni et al., *Fully contained events in the Mont Blanc nucleon decay detector*, *Physics Letters B*, Volume 118, Issue 4-6 (1982)
- [B+89] C. Berger et al., *Study of Atmospheric Neutrino Interactions with the Frejus Detector*, *Phys. Lett.*, Volume B227, (1989)
- [Beam80] G. Beamson, H.Q. Porter, D.W. Turner, *The collimation and magnifying properties of a superconducting field photoelectron spectrometer*, *Journal of Physics E:Scientific Instruments*, Volume 13 (1980)
- [Beu] R. Beuslink, J.K. Sedbeer, Y.A. Shitov, *SUPERNEMO*, Imperial College London, Research: High Energy Physics, online:
<http://www.imperial.ac.uk/research/hep/research/supernemo.htm>
- [Co56] C.L.Cowan, F.Reines, F.B. Harrison, H.W. Kruse, A.D.McGuire *Detection of the Free Neutrino: a Confirmation* , *Science*, Volume 124, Number3212 (1956)
- [D85] M.DoI, T.Kotani,E. Takasugi, *Double Beta Decay and Majorana Neutrino*, *Prog. Theor. Phys. Supplement No. 83* (1985)
- [Dav94] *A review of the homestake solar neutrino experiment* R.Davis, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Volume32(1994)

- [E+87] S. R. Elliot et al., *Direct evidence for two-neutrino double-beta decay in ^{82}Se* , Phys. Rev. Lett., Volume 59 (1987)
- [Eng80] H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press(1980)
- [Eng93] G.Engeln-Müller, F. Reutter, *Numerik-Algorithmen mit ANSI C-Programmen*, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim (1993)
- [F87] A. Faessler, *Grand unified theories and the double beta- decay*, Physics, Volume 279, Springer Berlin/Heidelberg(1987)
- [F99] E.Fiorini, *CUORE: a cryogenic underground observatory for rare events*, Physics Reports, Volume 307, Issues 1-4 (1999)
- [F+98] Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos* ,Phys. Rev. Lett., Volume 81, Number 8(1998)
- [GGN03] M.C.Gonzalez-Garcia and Y.Nir, *Neutrino masses and mixing: evidence and implications* ,Rev. Mod. Phys. , Volume 75, Number 2(2003)
- [Glü02] F.Glück ,*Runge-Kutta method for numerical solution of differential equations- ytem*, online: <https://fuzzi.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d479152/rungekutta.pdf>(apr. 2002)
- [Glü05] F. Glück, *Background theory: radial motion of electrons from spectrometer electrodes into the fluxtube*,(2005)
- [Glü06] Ferenc Glück, *C-programs for electromagnetic design*, online: <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/34401>(2006)
- [Glü08] F. Glück, *Background electrons in MAC-E filters*, Vortrag: DPG meeting(2008)
- [Glü09] F.Glück, *Axisymmetric electric field calculation with zonal harmonic expansion*, (2009)
- [Glü10] F. Glück, B. Jung, S. Mertens, S. Schnetzer, N. Wandkowsky, *Background reduction with Pin (updated version)*,(2010)
- [Gor10] R.Gornea und EXO-Kollaboration, *Search for neutrino-less double beta-decay with EXO*, Journal of Physics: Conference Series, Volume 259, Number 1(2010)
- [H+88] K. S. Hirata et al., *Experimental Study of the Atmospheric Neutrino Flux*, Phys. Lett., Volume B205 (1988)
- [H+99] W.Hampel et al., *Galex solar neutrino observations: results for galex iv*, Physics Letters B , Volume 447, Number 1-2(1999)
- [Hil10] B. Hillen, *Pre spectrometer measurements: Penning trap between the spectrometers*, Vortrag: Collaboration Meeting(Okt. 2010)
- [Höt09] Markus Hötzel, *Berechnung von KATRIN Messspektren unter Einbeziehung der Eigenschaften der fensterlosen gasförmigen Tritiumquelle*, Diplomarbeit, KIT(2009)
- [Jun11a] B. Jung, S. Schnetzer, *Pin Simulations-Electron Background Reduction with Pin*, Vortrag: Collaboration Meeting(März 2011)
- [Jun11b] B.Jung, *Simulationen des Myon-induzierten Untergrundes und dessen Speicherwahrscheinlichkeit am KATRIN Hauptspektrometer*,Diplomarbeit, KIT (2011)
- [KASS] KATRIN-Simulation-Group *The Comprehensive Guide to KASSIOPEIA*,(2010)
- [KAT05] KATRIN Collaboration, *KATRIN Design Report 2004*, FZKA **7090** (2005)

- [Kay03] B.Kayser, *Neutrino Mass, Mixing and Flavour Change a*, Neutrino Mass, Springer Tracts in Modern Physics , Volume 190/2003 (2003)
- [KK02] H.V. Klapdor-Kleingrothaus et al., *Evidence for neutrinoless Double beta decay*, Mod. Phys. Lett. A, Volume 16 (2002)
- [Kyt05] P. K. Kythe, M.R.Schäfer, *Handbook of Computational Methods for Integration*, Chapman & Hall/CRC(2005)
- [Käf09] Wolfgang Käfer, *KPAGE- a PArticle Generator for KATRIN AND Towards a Global KATRIN Simulation*, Vortrag: Collaboration Meeting(Okt. 2009)
- [Käf10] Wolfgang Käfer, Markus Hötzel, *SSC and KPAGE*, Vortrag, KATRIN simulation workshop(2010)
- [Las06] M. G. T. Lasserre, *Double chooz, a search for the neutrino mixing angle theta-13*, Abstract (2006)
- [Laz04] Predrag Lazic, Hrvoje Stefancic, Hrvoje Abraham, *The Robin Hood method A novel numerical method for electrostatic problems based on a non-local charge transfer*, Journal of Computational Physics, Volume 213, Issue 1(2006)
- [Laz08] Predrag Lazic, Hrvoje Stefancic, Hrvoje Abraham , *The Robin Hood method A new view on differential equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 32, Issue 1(2008)
- [Lei10] B. Leiber, *Non-axially symmetric field and trajectory calculations for the KATRIN-experiment*, Diplomarbeit, KIT(2010)
- [Lew05] R.J. Lewis, H.H.Telle, *Hydrogen Isotopomer Raman Spectroscopy for KATRIN, Intermediate Report 2005*, online: <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d173321/10-ME-3200-0.pdf> (2005)
- [Lob85] V.M. Lobashev, P.E. Spivak, *A method for measuring the electron antineutrino rest mass*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipmente, Volume 240, Issue 2 (1985)
- [P+92] A.Picard et. al, *A solenoid retarding spectrometer with high resolution and transmission for keV electrons*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, Volume 63, Issue 3 (1992)
- [Rei09] Jan Reich, *Magnetfeldmessungen und Designarbeiten für das EMCS Luftspulensystem am KATRIN Hauptspektrometer*, Diplomarbeit, KIT(2009)
- [Ren11] Pascal Renscler, *Entwicklung und Simulation von KATRIN-Quellmonitor-Detektoren*, Dissertation, KIT(2011)
- [Schl09] Magnus Schlösser, *First Laser Raman Measurements with Tritium for KATRIN and Studies of systematic Effects of the LARA-Setup*, Diplomarbeit, KIT(2009)
- [SKG98] Super-Kamiokande Collaboration, *Study of the Atmospheric Neutrino Flux in the Multi-gev Energy Range*, Phys.. Lett. B, Volume 436 (1998)
- [St10] M. Sturm, *Aufbau und Test des Inner-Loop-Systems der Tritiumquelle von KATRIN*, Dissertation, KIT(2010)
- [Wan09] Nancy Wandkowsky, *Design and Background Simulations for the KATRIN Main Spectrometer and Air Coil Sytem*, Diplomarbeit, KIT(2009)

[Wei10] Ch.Weinheimer, *Main spectrometer commissioning measurements*, Vortrag:
Collaboration Meeting(Okt. 2010)

[Zyk] Lizenz unter:
http://de.wikipedia.org/wiki/GNU-Lizenz_f%C3%BCr_freie_Dokumentation?uselang=de

Anhang

A. Wertetabellen

A.1. Tabellen zu Kapitel 6 und kurzer Überblick zur entworfenen Näherung

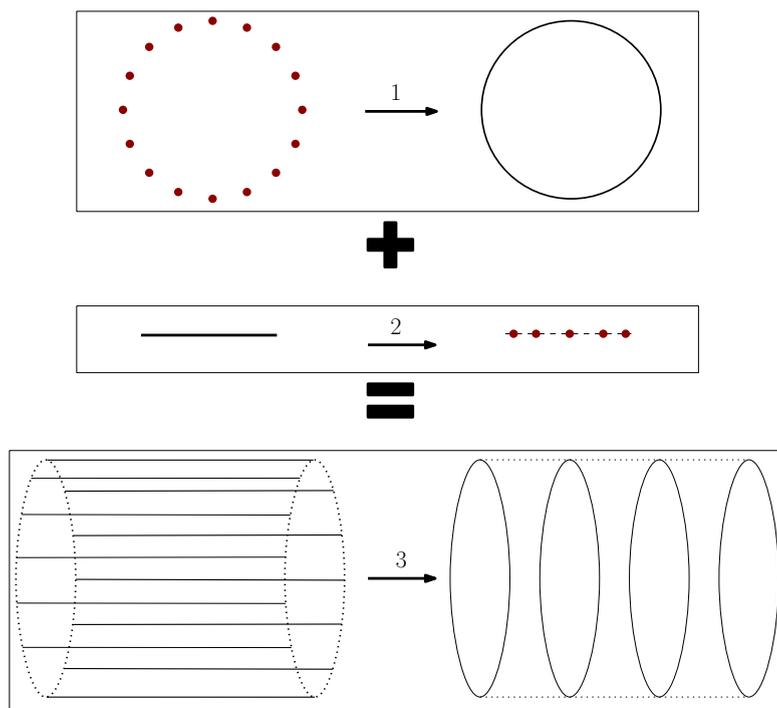


Abbildung A.1.: Überblick zur Näherung für Drahtsegmentringe mittels Gauss-Quadratur: 1) Ein Ring aus N gleichverteilten, identischen Punktladungen q kann mittels elliptischer Integrale mit einem infinitesimal dünnen Ring der Ladung $N \cdot q$ genähert werden. 2) Ein Drahtsegment kann mittels Punktladungs-Approximation durch mehrere Gauss-verteilte Punktladungen ersetzt und berechnet werden. 3) Kombiniert man 1) und 2), so lässt sich ein Ring aus Drahtsegmenten mit mehreren Ringen nähern. Position und Ladung dieser Ringe wird mithilfe der Tabelle zur Gauss-Quadratur 6.2 bestimmt. Elektrisches Feld und Potential der Ringe wird anschließend mit den elliptischen Integralen berechnet.

Tabelle A.1.: Abweichung zwischen der exakten Potential- und Feldberechnung von der Näherung mit elliptischen Integralen für einen Ring aus Punktladungen: ε (Gleichungen 6.10 und 6.11) in Abhängigkeit von d/a . d ist der Abstand zum Ring, a der Abstand zweier benachbarter Punktladungen.

d/a	ε_ϕ	ε_E
1.96	-1.56e-12	-2.53e-10
2.28	1.23e-13	-4.66e-12
2.61	6.17e-14	-8.12e-14
2.93	4.07e-14	2.1e-16
3.25	1.01e-13	2.44e-15
3.58	9.48e-15	2.94e-15
3.9	8.84e-15	2.65e-15
4.23	-1.47e-15	3.02e-15
4.55	2.47e-14	2.44e-15
4.88	5.79e-14	3.65e-15
5.2	1.52e-14	2.22e-15
5.53	3.89e-14	2.75e-15
5.85	2.44e-14	-6.24e-16
6.17	1.17e-14	1.1e-15
6.5	2.64e-14	2.54e-15
6.82	-5.76e-15	7.26e-16
7.15	2.59e-14	1.77e-15
7.47	2.56e-14	2.38e-15
7.8	4.56e-15	2.21e-15
8.12	1.09e-14	2.15e-15
8.45	8.66e-15	2.24e-15
8.77	1.09e-15	1.08e-15
9.1	4.72e-15	8.02e-16
9.42	2.23e-14	2.82e-15
9.75	9.74e-15	1.03e-15
10.1	7.08e-15	1.77e-15
10.4	1.49e-14	1.64e-15
10.7	-3.27e-16	5.65e-16
11	-8.22e-16	-1.36e-15
11.4	4.97e-16	1.99e-16
11.7	-4.67e-15	1.64e-15

Tabelle A.2.: Abweichung ε_ϕ der Potentialberechnung mittels Gaussquadratur von der Berechnung mit Newton-Cotes-Näherung für $N=50$ (Einteilung des Elements in 50 Ringe) in Abhängigkeit vom kürzesten Abstand zum Drahtsegment. Das Drahtstück hatte eine Länge von 0,03 m.

d[m]	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=8
0.1	-0.0057	-2.61e-05	-1.15e-07	-5.02e-10	-2.18e-12	-9.56e-15	-9.93e-16
0.35	-0.000563	-2.54e-07	-1.1e-10	-4.79e-14	-9.9e-16	-5.94e-16	-1.58e-15
0.6	-0.000198	-3.15e-08	-4.82e-12	-1.17e-15	-1.17e-15	-5.01e-16	-1.5e-15
0.85	-0.0001	-8.04e-09	-6.22e-13	-2.35e-16	-7.04e-16	-2.35e-16	-1.06e-15
1.1	-6.03e-05	-2.91e-09	-1.36e-13	-4.54e-16	-1.06e-15	-4.54e-16	-1.36e-15
1.35	-4.03e-05	-1.3e-09	-4.07e-14	-1.85e-16	-9.26e-16	-3.7e-16	-1.3e-15
1.6	-2.88e-05	-6.62e-10	-1.49e-14	0	-6.57e-16	-2.19e-16	-8.76e-16
1.85	-2.16e-05	-3.72e-10	-6.45e-15	-1.27e-16	-6.33e-16	-1.27e-16	-1.14e-15
2.1	-1.68e-05	-2.25e-10	-3.01e-15	-2.87e-16	-8.61e-16	-2.87e-168	-1.15e-15
2.35	-1.34e-05	-1.44e-10	-1.93e-15	-4.81e-16	-9.63e-16	-6.42e-16	-1.6e-15
2.6	-1.1e-05	-9.62e-11	-1.42e-15	-5.32e-16	-1.06e-15	-5.32e-16	-1.6e-15
2.85	-9.14e-06	-6.68e-11	-5.83e-16	-1.94e-16	-5.83e-16	-1.94e-16	-1.17e-15
3.1	-7.73e-06	-4.78e-11	-4.23e-16	0	-6.34e-16	-2.11e-16	-1.06e-15
3.35	-6.62e-06	-3.51e-11	-4.57e-16	-3.42e-16	-6.85e-16	-3.42e-16	-1.37e-15
3.6	-5.74e-06	-2.64e-11	-2.45e-16	-2.45e-16	-6.13e-16	-1.23e-16	-1.23e-15
3.85	-5.02e-06	-2.02e-11	0	0	-5.24e-16	-1.31e-16	-1.18e-15
4.1	-4.43e-06	-1.57e-11	-1.4e-16	1.4e-16	-5.58e-16	-1.4e-16	-9.77e-16
4.35	-3.94e-06	-1.24e-11	-5.92e-16	-2.96e-16	-1.04e-15	-4.44e-16	-1.48e-15
4.6	-3.52e-06	-9.92e-12	-4.7e-16	-3.13e-16	-9.39e-16	-3.13e-169	-1.41e-15
4.85	-3.17e-06	-8.03e-12	-4.95e-16	-3.3e-16	-8.25e-16	-4.95e-169	-1.32e-15
5.1	-2.87e-06	-6.57e-12	-1.73e-16	0	-6.94e-16	-1.73e-16	-1.21e-15

Tabelle A.3.: Abweichung ε_{phi} der Potentialberechnung mittels Gaussquadratur von den Ergebnissen der analytischen Berechnung mittels ELC33 in Abhängigkeit vom kürzesten Abstand zum 0,03 m langen Drahtsegment.

d[m]	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=8
0.1	0.0057	2.61e-05	1.15e-07	5.02e-10	2.18e-12	9.56e-15	9.93e-16
0.35	0.000563	2.54e-07	1.1e-10	4.87e-14	1.78e-15	1.39e-15	2.38e-15
0.6	0.000198	3.15e-08	4.82e-12	-1.67e-16	-1.67e-16	-8.34e-16	1.67e-16
0.85	0.0001	8.04e-09	6.2e-13	-1.76e-15	-1.29e-15	-1.76e-15	-9.39e-16
1.1	6.03e-05	2.91e-09	1.31e-13	-4.84e-15	-4.24e-15	-4.84e-15	-3.93e-15
1.35	4.03e-05	1.3e-09	3.7e-14	-3.52e-15	-2.78e-15	-3.33e-15	-2.41e-15
1.6	2.88e-05	6.62e-10	3.94e-15	-1.1e-14	-1.03e-14	-1.07e-14	-1.01e-14
1.85	2.16e-05	3.72e-10	2.91e-15	-3.42e-15	-2.91e-15	-3.42e-15	-2.4e-15
2.1	1.68e-05	2.25e-10	1.09e-14	8.18e-15	8.75e-15	8.18e-15	9.04e-15
2.35	1.34e-05	1.44e-10	1.22e-14	1.07e-14	1.12e-14	1.09e-14	1.19e-14
2.6	1.1e-05	9.63e-11	1.63e-14	1.54e-14	1.6e-14	1.54e-14	1.65e-14
2.85	9.14e-06	6.68e-11	1.07e-14	1.03e-14	1.07e-14	1.03e-14	1.13e-14
3.1	7.73e-06	4.78e-11	2.32e-15	1.9e-15	2.54e-15	2.11e-15	2.96e-15
3.35	6.62e-06	3.51e-11	-1.71e-15	-1.83e-15	-1.48e-15	-1.83e-15	-7.99e-16
3.6	5.74e-06	2.64e-11	1.3e-14	1.3e-14	1.34e-14	1.29e-14	1.4e-14
3.85	5.02e-06	2.02e-11	1.44e-14	1.44e-14	1.49e-14	1.46e-14	1.56e-14
4.1	4.43e-06	1.57e-11	-3.35e-14	-3.38e-14	-3.31e-14	-3.35e-14	-3.27e-14
4.35	3.94e-06	1.24e-11	-6.37e-15	-6.66e-15	-5.92e-15	-6.51e-15	-5.48e-15
4.6	3.52e-06	9.89e-12	-2.8e-14	-2.82e-14	-2.75e-14	-2.82e-14	-2.71e-14
4.85	3.17e-06	8e-12	-3.12e-14	-3.14e-14	-3.09e-14	-3.12e-14	-3.04e-14
5.1	2.87e-06	6.57e-12	-3.47e-15	-3.64e-15	-2.95e-15	-3.47e-15	-2.43e-15

A.2. Tabellen zu Kapitel 8

Hier stehen die Wertetabellen für die Absorptionsraten der verschiedenen Pinvarianten. Die Vorstellung der drei simulierten Ideen zur Realisierung des Pin-Konzepts ist in Kapitel 8.2 zu finden. Bei den verwendeten Magnetfeld-Konfigurationen steht 1M für die Konfiguration mit einem Minimum und 2M für zwei Magnetfeldminima (Siehe Kapitel 8.3.1).

Tabelle A.4.: Absorptionsrate und mittlere Speicherzeit für Pinvariante 1 in Abhängigkeit von Pinposition und Energie- und Magnetfeldkonfiguration.

Energie	Position	Magnetfeld. Konfig.	N (gesp.) [%]	Absorptions- rate [%]	mittl. Speicherzeit [ms]
0-30eV	0	1M	87.4	68.4	15
0-30eV	0	2M	85.63	69.0	15
0-30eV	1.5	1M	87.4	77.8	14
0-30eV	1.5	2M	86.2	77.4	16
0-30eV	2.68	1M	87.4	77.6	15
0-30eV	2.68	2M	85	77.4	15
0-30eV	3.5	1M	87.4	73.7	12
0-30eV	3.5	2M	86.2	69.8	14
0-30eV	4.5	1M	87.4	61.1	13
0-30eV	4.5	2M	86.2	58.5	15
<hr/>					
Tritiumzerfall	0	1M	57.75	99.1	2.5
Tritiumzerfall	0	2M	60.8	97.7	2.8
Tritiumzerfall	1.5	1M	57.4	98.6	3.2
Tritiumzerfall	1.5	2M	62.8	95.5	3.3
Tritiumzerfall	2.68	1M	56.75	95.1	2.7
Tritiumzerfall	2.68	2M	60.6	93.4	3.8
Tritiumzerfall	3.5	1M	58.8	87.4	2.8
Tritiumzerfall	3.5	2M	65	85.2	1.7
Tritiumzerfall	4.5	1M	60.2	71.4	2.2
Tritiumzerfall	4.5	2M	64.6	68.7	1.7

Tabelle A.5.: Absorptionsrate und mittlere Speicherzeit für Pinvariante 2 in Abhängigkeit von Pinposition und Energie- und Magnetfeldkonfiguration. Die Position gibt an welcher z-Position sich die Spitze des Pins befindet. Für die Rute mit dem Endpunkt bei 2,5 m wurde zusätzlich noch eine Auslenkung in y-Richtung simuliert. Somit sollte getestet werden, ob eine Schwingung der Rute sich auf die Absorptionsrate auswirkt.

Energie	Position	Magnetfeld. Konfig.	N (gesp.) [%]	Absorptions- rate [%]	mittl. Speicherzeit [ms]
0-30eV	1.5	1M	87.4	78	10.4
0-30eV	1.5	2M	86.2	76.1	11.3
0-30eV	2.5	1M	87.4	43.48	13.1
0-30eV	2.5	2M	86.2	43.39	13.01
0-30eV	2.5+0.2y	1M	87.4	42.56	12.9
0-30eV	2.5+0.2y	2M	86.2	43.62	12.8
0-30eV	3.5	1M	87.4	66.13	8.3
0-30eV	3.5	2M	86.2	62.18	13.7
Tritiumzerfall	1.5	1M	61.8	92.57	—
Tritiumzerfall	1.5	2M	67.2	91.37	—
Tritiumzerfall	2.5	1M	61	87.21	1.5
Tritiumzerfall	2.5	2M	65.4	85.01	1.1
Tritiumzerfall	2.5+0.2y	1M	59	86.78	1.4
Tritiumzerfall	2.5+0.2y	2M	63.75	87.84	1.4
Tritiumzerfall	3.5	1M	61.2	73.53	1.5
Tritiumzerfall	3.5	2M	68.2	70.68	1.1

Tabelle A.6.: Absorptionsrate und mittlere Speicherzeit für Pinvariante 3 in Abhängigkeit von Pinposition und Energie- und Magnetfeldkonfiguration. Die Position gibt an welcher z-Position sich die Spitze des Pins befindet.

Energie	Position	Magnetfeld. Konfig.	N (gesp.) [%]	Absorptions- rate [%]	mittl. Speicherzeit [ms]
0-30eV	1.5	1M	87.4	82.15	9.4
0-30eV	1.5	2M	86.2	78.19	8.5
0-30eV	2.5	1M	87.4	80.78	10.5
0-30eV	2.5	2M	86.2	79.35	8.6
0-30eV	3.5	1M	87.4	75.74	8.8
0-30eV	3.5	2M	86.2	72.85	10.9
Tritiumzerfall	1.5	1M	67.2	98.96	0.44
Tritiumzerfall	1.5	2M	73.74	96.66	0.42
Tritiumzerfall	2.5	1M	65.6	95.88	0.53
Tritiumzerfall	2.5	2M	71.5	93.85	0.44
Tritiumzerfall	3.5	1M	66.6	88.44	0.53
Tritiumzerfall	3.5	2M	72.3	87.28	0.73

B. Programm-Code

Mit der Hilfe von Benjamin Leiber wurde eine neue Klasse in KASSEIOPEIA implementiert. Diese Klasse macht es möglich Feld- und Potentialberechnungen für mittels Gauss-Quadratur verteilte Ringe durchzuführen.

Im Konstruktor der Klasse ELCDRingContainer werden zwei Felder vom Typ ELCCRing erstellt. In diesen Feldern werden die Ringe für nahe und ferne Berechnungen gespeichert. Position und Ladung der Ringe werden mithilfe der Funktionen “GetNodesGauss(N,i)” und “GetWeightGauss(N,i)” bestimmt:

```

ELCDRingContainer::ELCDRingContainer(ELCDElement* element, Int_t nrot)
{
  fNearRings = new ELCDRing*[5];
  fRemoteRings = new ELCDRing*[3];
  TVector3 h = element->GetCentre();
  TVector3 pa = ((ELCDWire*)element)->GetPointA();
  TVector3 pb = ((ELCDWire*)element)->GetPointB();
  Double_t l = (pb.Z()-pa.Z())/2.;
  Double_t ra = sqrt(pa.X()*pa.X()+pa.Y()*pa.Y());
  Double_t rb = sqrt(pb.X()*pb.X()+pb.Y()*pb.Y());
  fPotential = element->GetPotential();
  Double_t Q = element->GetCharge() * (Double_t) nrot;
  fZ = h.Z();
  fRa = ra;
  fRb = rb;
  fHalfLength = l;
  Double_t surface = (fRa + fRb) * M_PI * sqrt( (fRa-fRb) * (fRa-fRb) + 4. * fHalfLength * fHalfLength);
  fSigma = Q / surface;
  Double_t testcharge1=0;
  Double_t testcharge2=0;
  for(int i = 0; i < 5; i++){
    Double_t xnode = element->GetNodesGauss(5,i);
    Double_t z = h.Z() + xnode * l;
    Double_t r = ((z-pa.Z()) * rb + (pb.Z()-z) * ra) / (pb.Z() - pa.Z());
    Double_t charge = GetWeightGauss(5,i) * Q/2.;
    testcharge1+=charge;
    fNearRings[i] = new ELCDRing(r, z, fPotential, charge);
  }
  for(int i = 0; i < 3; i++){
    Double_t xnode = element->GetNodesGauss(3,i);
    Double_t z = h.Z() + xnode * l;
    Double_t r = ((z-pa.Z()) * rb + (pb.Z()-z) * ra) / (pb.Z() - pa.Z());
    Double_t charge = GetWeightGauss(3,i) * Q/2.;
    testcharge2+=charge;
    fRemoteRings[i] = new ELCDRing(r, z, fPotential, charge);
  }

  Double_t delangle = 2.0 * M_PI / (Double_t) (nrot);
  for(Int_t i=0;i < nrot; i++){
    Double_t angle = delangle * (Double_t) i;
    fSubElements.push_back(element->Clone(angle));
  }
}

```

Die Funktion “GetEnPhiElement(p)” wählt in Abhängigkeit von Abstand des Feldpunktes zum aktuellen Drahtmodul die passende Berechnungsmethode aus. Sehr nahe am Modul werden elektrisches Feld und Potential der einzelnen Drähte des Moduls analytisch berechnet. Ist der Abstand ausreichend groß werden elliptischer Integrale für die Berechnungen genutzt:

```

struct EnPhi  ELCDRingContainer::GetEnPhiElement(const TVector3 &p)
{
    Double_t dist = fabs(p.Z()-fZ); |
    struct EnPhi result;
    result.Phi = 0.;
    result.E = (0.,0.,0.);

    if(dist > 100.*fHalfLength){
        for(int i = 0; i < 3; i++){
            struct EnPhi tempresultRemote = fRemoteRings[i]->GetEnPhiElement(p);
            result.Phi += tempresultRemote.Phi;
            result.E += tempresultRemote.E;
        }
    } else
        if(dist > 6.*fHalfLength){
            for(int i = 0; i < 5; i++){
                struct EnPhi tempresultNear = fNearRings[i]->GetEnPhiElement(p);
                result.Phi += tempresultNear.Phi;
                result.E += tempresultNear.E;
            }
        } else{
            for(unsigned int i = 0; i < fSubElements.size(); i++){
                struct EnPhi tempresult = fSubElements.at(i)->GetEnPhiElement(p);
                result.Phi += tempresult.Phi;
                result.E += tempresult.E;
            }
        }
    return result;
}

```

Die Funktion “GetWeightGauss(N,i)” enthält die Gauss-Gewichte, welche zur Berechnung der Ladungsverteilung genutzt werden. Je nach Ringanzahl N und Nummer i des aktuellen Rings gibt sie den passenden Gewichtungsfaktor zurück:

```

inline Double_t ELCDElement::GetNodesGauss(int N,int i)
{
    Double_t node1=0.;
    Double_t node2=1./sqrt(3);
    Double_t node3[2]={0.,sqrt(0.6)};
    Double_t node4[2]={0.339981043584856,0.861136311594053};
    Double_t node5[3]={0.,0.538469310105683,0.906179845938664};
    Double_t node6[3]={0.238619186083197,0.661209386466265,0.932469514203152};
    Double_t node7[4]={0.,0.404845151377397,0.741531185500394,0.949107912342759};
    Double_t node8[4]={0.183434642495650,0.525532409916329,0.796666477413627,0.960289856497536};
    Double_t node16[8]={0.09501250983763744,0.28160355077925891,0.45801677765722739,
        0.61787624440264375,0.75540440835500303,0.86563120238783174,
        0.94457502307323258,0.98940093499164993};
    Double_t** nodes = new Double_t* [9];
    nodes[0] = &node1;
    nodes[1] = &node2;
    nodes[2] = node3;
    nodes[3] = node4;
    nodes[4] = node5;
    nodes[5] = node6;
    nodes[6] = node7;
    nodes[7] = node8;
    nodes[8] = node16;
    Double_t x = 0.;
    if(N == 16){
        N = 9;
    }
    if(N%2 == 0){
        if(i<=((0.5*N)-1)){
            x = nodes[N-1][i];
        } else {
            x=-nodes[N-1][N-i-1];
        }
    } else{
        if(i==0){
            x=nodes[N-1][0];
        } else {
            if(i<=0.5*(N-1)){
                x=nodes[N-1][i];
            } else{
                x=-nodes[N-1][N-i];
            }
        }
    }
    delete [] nodes;
    return x;
}

```

Die Funktion “GetNodesGauss(N,i)” enthält die Gauss-Knotenpunkte, welche zur Bestimmung der Ringpositionen benötigt werden. Je nach Ringanzahl N und Nummer i des aktuellen Rings gibt sie den passenden Faktor zurück:

```

inline Double_t ELCDElement::GetWeightGauss(int N,int i)
{
    Double_t weight1=2.;
    Double_t weight2=1.;
    Double_t weight3[2]={8./9.,5./9.};
    Double_t weight4[2]={0.652145154862546,0.347854845137454};
    Double_t weight5[3]={0.568888888888889,0.478628670499366,0.236926885056189};
    Double_t weight6[3]={0.467913934572691,0.360761573048139,0.171324492379170};
    Double_t weight7[4]={0.417959183673469,0.381830050505119,0.279705391489277,0.129484966168870};
    Double_t weight8[4]={0.362683783378362,0.313706645877887,0.222381034453374,0.101228536290376};
    Double_t weight16[8]={0.18945061045506850,0.18260341504492359,0.16915651939500254,
        0.14959598881657673,0.12462897125553387,0.095158511682492785,
        0.062253523938647893,0.027152459411754095};
    Double_t** weight = new Double_t* [9];
    weight[0] = &weight1;
    weight[1] = &weight2;
    weight[2] = weight3;
    weight[3] = weight4;
    weight[4] = weight5;
    weight[5] = weight6;
    weight[6] = weight7;
    weight[7] = weight8;
    weight[8] = weight16;
    Double_t x = 0.;
    if(N == 16){
        N = 9;
    }
    if(N%2==0){
        if(i<=(0.5*N-1)){
            x = weight[N-1][i];
        }else{
            x = weight[N-1][N-i-1];
        }
    }else{
        if(i==0){
            x = weight[N-1][0];
        }else{
            if(i<=0.5*(N-1)){
                x = weight[N-1][i];
            }else{
                x = weight[N-1][N-i];
            }
        }
    }
    delete [] weight;
    return x;
}

```


Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

- Prof. Dr. Guido Drexlin danke ich für die Ermöglichung dieser Arbeit und die sehr interessante Aufgabenstellung.
- Dr. Ferenc Glück danke ich für die gute Betreuung während der Durchführung meiner Arbeit, für die Bereitstellung seiner C-Programme und für die Beantwortung aller meiner Fragen zur Feld- und Potentialberechnung.
- Susanne Mertens, Benjamin Leiber, Markus Hötzel und Wolfgang Käfer danke ich für die Beantwortung meiner vielen C++- und ROOT-Fragen.
- Für das Korrekturlesen dieser Arbeit gilt mein Dank Dr. Ferenc Glück, Markus Hötzel und Susanne Mertens.
- Nochmals möchte ich mich bei allen, auch den nicht namentlich genannten, Kollegen für die Unterstützung bei dieser Arbeit, die Hilfsbereitschaft und die angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken.

Ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern und meinem Onkel Jakob Schnetzer und seiner Frau Christel für die Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit.