
Berechnung von KATRIN Messspektren unter Einbeziehung der Eigenschaften der fensterlosen gasförmigen Tritiumquelle

Markus Hötzel



Institut für Experimentelle Kernphysik
Universität Karlsruhe (TH)

**Berechnung von KATRIN Mess-
spektren unter Einbeziehung der
Eigenschaften der fensterlosen
gasförmigen Tritiumquelle**

Diplomarbeit

vorgelegt

von

Markus Hötzel

**Institut für Experimentelle Kernphysik
Universität Karlsruhe (TH)**

Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Neutrinos und ihre Eigenschaften	2
1.2	Neutrinos in der Kosmologie und Astrophysik	3
1.3	Bestimmung der Neutrinomasse aus dem Betazerfall	8
1.4	Bestimmung der Neutrinomasse aus dem Doppelbetazerfall	11
2	Das KATRIN Experiment	15
2.1	Messprinzip	15
2.1.1	MAC-E-Filter	15
2.1.2	Integriertes Betaspektrum und Ableitung der Neutrinomasse	17
2.2	Tritiumquelle	19
2.3	Transportsektion	22
2.4	Vor- und Hauptspektrometer	22
2.5	Detektor	24
2.6	Monitoring	25
2.7	Sensitivität und systematische Unsicherheiten	25
3	Modellierung und Implementierung der Quellparameter	27
3.1	Status bisheriger Analysen und Ziele dieser Arbeit	27
3.2	Modifikationen des differentiellen Betaspektrums	28
3.2.1	Strahlungskorrekturen	29
3.2.2	Tritiumreinheit	29
3.2.3	Final State Distribution	30
3.2.4	Dopplerverbreiterung	33

3.3	Parameter der Quelle	35
3.3.1	Magnetfeld	35
3.3.2	Temperaturprofil	36
3.3.3	Geschwindigkeitsprofil der Tritiummoleküle	39
3.3.4	Dichteprofil der Tritiummoleküle	42
3.4	Räumliche Unterteilung der Quelle	44
3.5	Antwortfunktion und integriertes Spektrum	46
3.5.1	Transmissionsfunktion und Spektrometerparameter	47
3.5.2	Energieverluste der Elektronen	49
3.5.3	Streuwahrscheinlichkeiten	50
3.6	Weiteres Vorgehen	54
4	Diskussion von berechneten integrierten Spektren	57
4.1	Integriertes Spektrum	57
4.2	Neutrinomasse	59
4.3	Final State Distribution und Tritiumreinheit	60
4.4	Quellmagnetfeld	62
4.5	Magnetfeld in der Analysierebene	62
4.6	Einfluss auf Systematik	63
5	Zusammenfassung	65
A	Anhang	67
A.1	Eingabeparameter	67
A.2	Auszug aus dem Quellcode	68
A.3	Programmablauf	69
	Literaturverzeichnis	74

1. Einführung

Von der Postulierung des Neutrinos 1930 durch Pauli bis zu seinem experimentellen Nachweis durch Cowan und Reines vergingen 26 Jahre [1]. Nachdem Neutrinos lange Zeit als masselos angenommen wurden, konnte weitere 42 Jahre später durch den Nachweis von Neutrinooszillationen am Super-Kamiokande-Experiment experimentell bestätigt werden, dass Neutrinos eine von Null verschiedene Masse besitzen [2]. Dabei konnten aber keine absoluten Massen, sondern nur Massendifferenzen zwischen verschiedenen Masseneigenzuständen bestimmt werden.

Parallel zur Suche nach Übergängen zwischen verschiedenen Neutrino flavours wurde versucht, die Masse des Elektronantineutrinos zu bestimmen, im Wesentlichen durch die Untersuchung des Tritiumbetazerfalls. Bis heute sind aus diesen Messungen jedoch nur Obergrenzen hervorgegangen [3]:

$$m_\nu < 2,2 \text{ eV}^1. \quad (1.1)$$

Das Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment KATRIN [4] wird die Masse des Elektronantineutrinos durch die kinematische Untersuchung des Tritiumbetazerfalls mit bisher unerreichter Präzision bestimmen können. Die Messungen werden eine experimentelle Empfindlichkeit $m_\nu < 200 \text{ meV}$ (90% C.L.) erreichen. Für die präzise Messung der Neutrinomasse müssen die Komponenten des Experiments sehr hohen Anforderungen entsprechen. Erste Simulationen und Modellierungen des Gesamtexperiments definieren diese Anforderungen. Hierbei zeigte sich, dass das Verständnis der Eigenschaften der komplexen Tritiumquelle für eine erfolgreiche Messung von herausgehobener Bedeutung ist.

Im Rahmen dieser Arbeit sollten die separaten Modelle der physikalischen Parameter, die die Tritiumquelle von KATRIN charakterisieren, zu einer gemeinsamen Beschreibung der gesamten Quelle zusammengefasst und dabei wesentlich verfeinert werden. Mit einem solchen umfassenderen Modell können die erwarteten Messspektren präzise berechnet werden und speziell die Einflüsse der verschiedenen Quellparameter auf die Messung untersucht werden.

Nach der weitergehenden Einführung in diesem Kapitel wird in Kapitel 2 das KATRIN Experiment mit seinen einzelnen Komponenten vorgestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein vollständig neues Programm entwickelt, das ein wesentlich detaillierteres Modell der Quelle verwendet, um die Messspektren zu berechnen. Die Implementierung der Quellparameter in dieses Programm und die Berechnung der Messspektren wird in Kapitel 3 diskutiert. Erste Untersuchungen der Einflüsse einzelner Quellparameter auf die KATRIN-Messspektren werden in Kapitel 4 diskutiert.

¹Massen werden in eV angegeben. Sie sind aber noch durch c^2 zu dividieren. In wichtigen Formeln wird c jedoch mitangegeben. Es gilt $1 \text{ eV}/c^2 = 1,782661758 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$.

1.1 Neutrinos und ihre Eigenschaften

Die Postulierung des Neutrinos beruhte auf der unzureichenden Beschreibung des Betazerfalls, da bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton und ein Elektron

$$n \rightarrow p + e^- \quad (1.2)$$

die Energieerhaltung nur monoenergetische Elektronen zulassen würde. Die Messungen zeigten jedoch ein kontinuierliches Elektronenspektrum. Außerdem wäre in diesem Fall die Drehimpulserhaltung verletzt: Da Neutron und Proton gleichen Spin besitzen und das Elektron ein Spin 1/2-Teilchen ist, muss ein weiteres Teilchen an der Umwandlung beteiligt sein [1]. Pauli postulierte deshalb - trotz anfänglicher Zweifel - ein drittes Teilchen, das er zunächst Neutron nannte, und das später von Enrico Fermi in Neutrino umbenannt wurde. Durch dieses beim Neutronzerfall

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.3)$$

emittierte Teilchen ist es möglich, die freiwerdende Energie auf zwei Leptonen zu verteilen, sodass das gemessene Spektrum beschreibbar wird (siehe Kap. 1.3).

Es stand schon früh fest, dass Neutrinos ungeladen, sehr leicht und auch nur mit großem Aufwand nachweisbar sein mussten, denn sonst wären sie schon früher entdeckt worden. Der erste Nachweis gelang erst 1956 durch Cowan und Reines [5]. In geringem Abstand von einem Kernreaktor, von dem Antineutrinos emittiert werden, konnten sie den inversen Betazerfall

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (1.4)$$

durch zeitverzögerte Detektion der Annihilationsstrahlung des Positrons mit einem Elektron und der Gammastrahlung eines durch Neutroneneinfang angeregten Cd-Kerns nachweisen [1].

An dieser Stelle sei in einem kurzen Überblick die Rolle der Neutrinos im Standardmodell der Teilchenphysik dargestellt: Zu jedem geladenen Lepton - Elektron, Myon und Tau - existiert ein Neutrino. Damit existieren also drei Neutrino-Flavours: Elektron-Neutrino, Myon-Neutrino und Tau-Neutrino. Zu den Antiteilchen wie dem Positron gibt es die entsprechenden Antineutrinos. Die Tatsache, dass in Gl. (1.3) ein Antineutrino geschrieben wird, liegt an der Leptonenzahlerhaltung. Wenn ein Elektron mit der Leptonenzahl $L = +1$ entsteht, muss auch ein Antiteilchen mit $L = -1$ erzeugt werden. Das Elektron-Neutrino kommt daher nicht in Frage, es bleibt das Elektron-Antineutrino. Hervorzuheben ist, dass Neutrinos im Standardmodell keine Masse besitzen. Sie nehmen als ungeladene Teilchen nur an der schwachen Wechselwirkung teil. Ihr Wirkungsquerschnitt mit Materie ist sehr klein, und liegt z.B. für die Streuung von MeV Neutrinos an Elektronen nur in der Größenordnung 10^{-42} cm^2 [1].

Dass Neutrinos doch Masse besitzen, folgt aus der Beobachtung von Neutrinooszillationen. Bei den Fusionsreaktionen in der Sonne entsteht ein großer Fluss von Elektron-Neutrinos, den man auf der Erde nachweisen kann. Erste Experimente konnten jedoch nur eine um einen Faktor 2-3 geringere Rate an Elektron-Neutrinos messen [6]. Da sich die Berechnung der Reaktionen in der Sonne und damit der erwartete Neutrinofluss bestätigte [7], ergab sich das sogenannte „solar neutrino problem“. Einer der schon früh

vorgeschlagenen Lösungswege ging davon aus, dass die Elektronneutrinos auf ihrem Weg von der Sonne zum Detektor in einen anderen Flavourzustand oszilliert sein mussten.

Die Umwandlung eines Neutrino Flavours in einen anderen wird als Neutrinooszillation bezeichnet. Die Flavoureigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$ mit $\alpha = e, \mu, \tau$ sind damit Superpositionen der Masseneigenzustände $|\nu_i\rangle$ mit $i = 1, 2, 3$ der Neutrinos

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle. \quad (1.5)$$

$U_{\alpha i}$ sind die Matrixelemente der Neutrino-Mischungsmatrix. Neutrinos können sich, wenn es unterschiedliche Masseneigenzustände gibt, ineinander umwandeln. Dies setzt jedoch voraus, dass mindestens zwei Massen unterschiedlich sind.

Das SNO-Experiment [8] konnte aufgrund seiner Sensitivität auf alle drei Neutrino-flavour zeigen, dass die Gesamtzahl aller Neutrinos dem erwarteten Fluss der Sonne entspricht und dass Neutrinos in der Tat Flavourooszillationen unterliegen.

Durch Messungen u.a. am Super-Kamiokande Experiment, das die Neutrinooszillationen erstmals nachweisen konnte, lassen sich jedoch nur Quadrate der Massendifferenzen Δm^2 zwischen den einzelnen Masseneigenzuständen bestimmen. Aus der Untersuchung der Oszillation atmosphärischer Neutrinos $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ ergibt sich [2]

$$5 \cdot 10^{-4} \text{eV}^2 < \Delta m_{\text{atmos}}^2 < 6 \cdot 10^{-3} \text{eV}^2 \quad (2\sigma), \quad (1.6)$$

aus Messungen der Oszillation solarer Neutrinos $\nu_e \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}$ [9]

$$5 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2 < \Delta m_{\text{solar}}^2 < 12 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2 \quad (1\sigma). \quad (1.7)$$

Diese Massendifferenzen erlauben jedoch keine Rückschlüsse auf die absoluten Neutrinomassen. Es sind prinzipiell zwei Szenarien denkbar, die in Abb. 1.1 diskutiert werden. Für die Theorie ist eine Unterscheidung zwischen dem quasi-degenerierten Fall ($\Delta m^2 \ll m_i^2$) und dem hierarchischen Fall ($\Delta m^2 \approx m_i^2$) von entscheidender Bedeutung.

1.2 Neutrinos in der Kosmologie und Astrophysik

Die Kosmologie und Astrophysik bieten in Ergänzung zu Laborexperimenten die Möglichkeit, die Summe der Neutrinomasseneigenzustände zu bestimmen oder einzuschränken. Hierzu werden Informationen genutzt, die aus der Zeit kurz nach dem Urknall stammen und den Einfluss der Neutrinos auf die Strukturbildung des Universums wiedergeben. Die Untersuchung der kosmischen Hintergrundstrahlung und der Strukturen des heutigen Universums setzen modellabhängige Obergrenzen für die Neutrinomasse, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt wird.

Kosmische Hintergrundstrahlung

Die Untersuchung der kosmischen Hintergrundstrahlung ermöglicht Aussagen über die totale Energiedichte des Universums und die verschiedenen Beiträge von Baryonen,

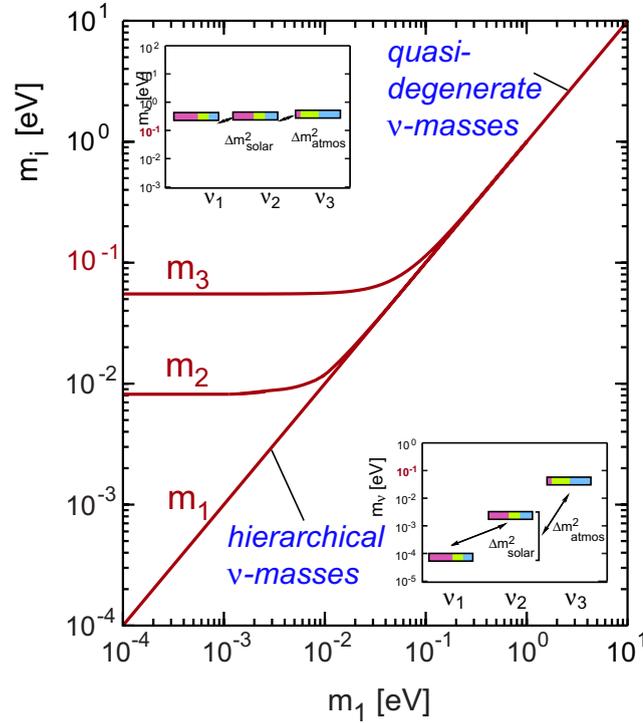


Abbildung 1.1: **Neutrinomassenszenarien: quasi-degeneriert oder hierarchisch geordnet** [4]. Beim quasi-degenerierten Fall ($m_1 > 200 \text{ meV}$) sind alle Neutrinomassen ungefähr gleich schwer, so dass die Masse des leichtesten Neutrinos der fundamentalen Größenordnung aller Neutrinomassen entspricht. Die anderen Massen werden entsprechend der Ergebnisse in Gl. (1.6, 1.7) angeordnet. Das hierarchische Szenario setzt eine sehr kleine Masse des leichtesten Neutrinos voraus, die anderen Massen unterscheiden sich dann um mehrere Größenordnungen von der kleinsten Masse m_1 .

dunkler Materie und dunkler Energie. Durch eine Kopplung mit weiteren kosmologischen Daten sind so Rückschlüsse auf die Neutrinomasse möglich [10, 11].

Mit modernen Satelliten wie WMAP und Planck ist heute aus allen Richtungen ein ideales Schwarzkörperspektrum mit einer Temperatur $T = 2,735 \pm 0,025 \text{ K}$ messbar [12]. Die Hintergrundstrahlung wurde ca. 380000 Jahre nach dem Urknall emittiert. Durch die Rekombination der Elektronen mit Protonen zu atomarem Wasserstoff streuten die vorhandenen Photonen nicht mehr an den Elektronen und entkoppelten damit. Da die Temperatur zu diesem Zeitpunkt im gesamten Universum nahezu identisch war und sich die Photonen im thermischen Gleichgewicht mit der Materie befanden, wurde ein ideales Schwarzkörperspektrum emittiert. Aufgrund der Expansion des Universums wurden die Photonen über ihre Flugzeit von ca. 13,5 Milliarden Jahren rotverschoben.

Es existieren jedoch zwischen verschiedenen Richtungen kleine Temperaturunterschiede ΔT auf der μK -Skala (siehe Abb 1.2). Diese Anisotropien lassen sich durch die primären Dichteunterschiede zur Entstehungszeit der kosmischen Hintergrundstrahlung erklären.

Photonen, die in zufälligen Dichtefluktuationen entkoppelten, sind stärker rotverschoben, da sie ein größeres Gravitationspotential überwinden mussten. Photonen, die in Bereichen geringerer Dichte entstanden, sind dementsprechend weniger stark verschoben. Eine genaue Beschreibung der Bildung solcher Fluktuationen findet sich in [10]. Verschiedene Parameter, wie der Anteil der Baryonen Ω_b an der Gesamtenergiedichte

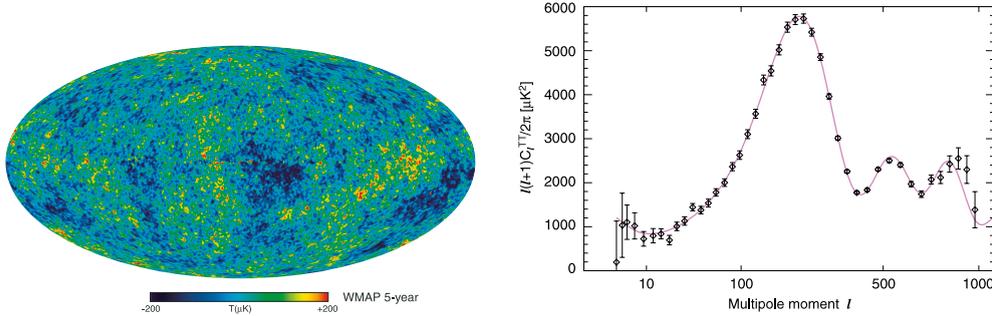


Abbildung 1.2: a) **WMAP-Himmelskarte** [13] und b) **Leistungsspektrum der Temperaturfluktuationen** [14]. Die von WMAP gemessenen Temperaturunterschiede auf der μK -Skala sind in der CMB-Himmelskarte aufgetragen. Die Untersuchung der Korrelation dieser Fluktuationen mittels einer Multipolentwicklung liefert das Leistungsspektrum der Koeffizienten C_l . Die Lage des akustischen Peaks bei $l \approx 200$ ist bestimmt durch die Gesamtenergiedichte des Universums, die Amplitude des Peaks wird durch den Anteil der baryonischen Materie im Universum festgelegt (siehe auch [10]).

te des Universums, der Anteil der gesamten Materie² Ω_m und auch der Anteil der Neutrinos Ω_ν beeinflussen die Dichtefluktuationen und die ihnen zugrunde liegenden akustischen Oszillationen. Eine Multipolentwicklung der Temperaturfluktuationen ergibt das Leistungsspektrum in Abb. 1.2. Die Position und die Amplitude der Maxima und Minima hängen u.a. von oben genannten Parametern ab.

Die WMAP-Kollaboration ermittelte daraus folgende Parameter [15]:

$$\Omega_{\text{tot}} = 1,02 \pm 0,02 \quad (1.8)$$

$$\Omega_m = 0,27 \pm 0,04 \quad (1.9)$$

$$\Omega_b = 0,044 \pm 0,004 \quad (1.10)$$

$$\Omega_\nu < 0,015. \quad (1.11)$$

Neutrinos tragen nach dieser Analyse nur zu einem kleinen Teil zur Gesamtdichte des Universums bei. Für den kosmischen Neutrinohintergrund, der bei der Entkopplung der Neutrinos ähnlich dem zuvor beschriebenen kosmischen Hintergrund der Photonen entsteht, ergibt sich folgende Relation für die Summe der Neutrinomassen $\sum_\nu m_\nu$:

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum_\nu m_\nu}{94 \text{ eV}} \quad (1.12)$$

²Als Materie wird hier die Summe aus baryonischer und dunkler Materie bezeichnet.

mit der Hubble-Konstanten h . Als Obergrenze für die Summe der Neutrinomassen ergibt sich bei ausschließlicher Verwendung von WMAP-Daten [15]

$$\sum_{\nu} m_{\nu} < 1,3 \text{ eV} \quad (95\% \text{C.L.}). \quad (1.13)$$

Strukturbildung

Relativistische Neutrinos aus dem Urknall beeinflussen die Entwicklung von Masseansammlungen im frühen Universum. Aufgrund ihrer schwachen Wechselwirkung mit Materie können sie leicht aus kleinen Masseansammlungen entkommen und somit Dichteunterschiede ausgleichen. Man spricht daher von Neutrinos als heißer dunkler Materie, die zu einem charakteristischen Auswaschen der Strukturen auf kleinen Skalen führt. Je größer die Neutrinomasse ist, desto größer ist der Anteil Ω_{ν} an der Gesamtenergiedichte Ω_{tot} des Universums, was bei gemessenem Ω_{tot} aus Gl. (1.8) kleinere Werte für den Baryonen- und den Dunkle-Materie-Anteil bedeutet. Diese beiden letzten Größen definieren jedoch, wie und wie schnell sich die Strukturen ausbilden.

Durch Untersuchungen der heutigen Struktur des Universums mit Galaxiensurveys wie dem Sloan Digital Sky Survey SDSS [16] oder dem 2dF Galaxy Redshift Survey [17] lässt sich ein Leistungsspektrum $P(k)$ für die Korrelation des Dichtekontrasts ermitteln, das in Abb. 1.3 gezeigt ist. Die Leistung bei großen Wellenzahlen k , d.h. kleinen Strukturen, nimmt bei zunehmender Neutrinomasse ab. Um eine gute Sensitivität für

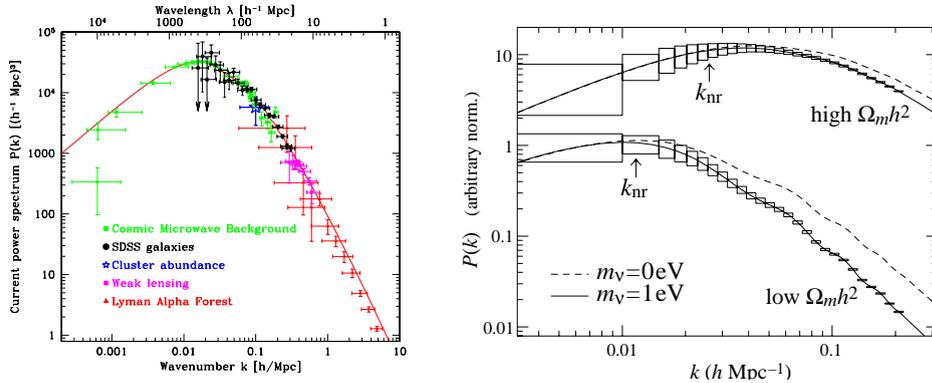


Abbildung 1.3: a) Leistungsspektrum des Dichtekontrasts [18] und b) Einfluss der Neutrinomasse bei kleinen Skalen [19]. Das Leistungsspektrum wird bei kleinen Skalen, also großem k , umso stärker unterdrückt, je größer die Neutrinomasse und damit Ω_{ν} ist: $\frac{\Delta P}{P} \approx -8 \frac{\Omega_{\nu}}{\Omega_M}$.

die Summe der Neutrinomassen zu erhalten, werden i.a. die Resultate aus verschiedenen kosmologischen Betrachtungen kombiniert. Exemplarisch sei hier eine Analyse von Tegmark et al. [20] angegeben, die die Resultate von WMAP und SDSS verwendet:

$$\sum_{\nu} m_{\nu} < 1,7 \text{ eV} \quad (95\% \text{C.L.}). \quad (1.14)$$

Unter Verwendung von Supernova-Entfernungsmessungen und der Untersuchung sogenannter Baryonic Acoustic Oscillations zur Bestimmung der Hubble-Konstanten ergibt sich eine Obergrenze [15]

$$\sum_{\nu} m_{\nu} < 0,67 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}) \quad (1.15)$$

Es lassen sich in der Literatur zahlreiche weitere kosmologische Analysen finden. Dabei ergeben sich je nach Berücksichtigung einzelner Ergebnisse und je nach verwendeten Modellen verschiedene Grenzen für die Neutrinomasse. Es sei abschließend hervorgehoben, dass einige Resultate sehr stark modellabhängig sind, und insbesondere eine starke Antikorrelation zwischen der Zustandsgleichung w der dunklen Energie und der Neutrinomasse existiert [21].

Supernova-Neutrinos

Auch die Beobachtung von Supernova-Neutrinos aus dem Kernkollaps eines massereichen Sterns ermöglicht Rückschlüsse auf die Neutrinomasse, indem Flugzeitunterschiede betrachtet werden [1].

Bei einer Supernova Explosion (Typ II) entstehen $\sim 10^{58}$ hochenergetische Neutrinos, die noch in einer Entfernung >10 kpc auf der Erde nachgewiesen werden können. Der Fusionsprozess im Innern des Sterns stoppt bei der Massenzahl $A = 52 - 56$. Dem Gravitationsdruck der äußeren Schichten wirkt dann nur noch der Entartungsdruck der Elektronen entgegen. Beim Überschreiten der Chandrasekhar-Masse $M_{Ch} \approx 1,4 M_{\odot}$ kollabiert der Kern in 100 ms. Durch Neutronisation



verschwinden die Elektronen und ein kompakter Neutronenstern entsteht. Die Neutrinos tragen den größten Teil ($\sim 99\%$) der freiwerdenden Gravitationsenergie. Die entstehende Schockwelle durchläuft den Kern von innen nach außen und sprengt nach einer Neutrinoheizphase die äußere Hülle ab, die dann als Explosion sichtbar wird.

Die bei der Neutronisation entstehenden Neutrinos werden in einem ca. 10 Sekunden andauernden Puls emittiert. Dabei ist die Dichte im Kern so groß, dass die Neutrinos häufig streuen und der innere Kern für die Neutrinos trotz ihres geringen Wirkungsquerschnitts undurchsichtig ist. Hierdurch wird die Neutrinopulsstruktur stark modellabhängig.

Aus der Beobachtung von insgesamt 19 Neutrinoereignissen im Kamiokande-Experiment [22] und im IMB-Detektor [23] konnten bei der Supernova 1987A durch die Messung der Energien und Auftreffzeiten Aussagen über die Neutrinomasse gemacht werden. Die Masse der Neutrinos m_{ν} beeinflusst die Flugzeit T_{ν} auf dem Weg von der SN1987A zur Erde ($L_{\nu} = 1,5 \cdot 10^{18}$ km):

$$T_{\nu} = \frac{L_{\nu}}{v} = \frac{L_{\nu}}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{m_{\nu}^2 c^4}{E_{\nu}^2}}} \approx \frac{L_{\nu}}{c} \left(1 + \frac{m_{\nu}^2 c^4}{2E_{\nu}^2} \right) \quad \text{für} \quad \frac{m_{\nu}^2 c^4}{E_{\nu}^2} \ll 1 \quad (1.17)$$

Betrachtet man die Zeitdifferenz Δt zwischen dem Auftreffen von zwei Neutrinos mit unterschiedlichen Energien E_1 und E_2 , wobei $E_1 > E_2$ sei, ergibt sich

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t_0 + \frac{L_{\nu} m_{\nu}^2 c^3}{2} \left(\frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_1^2} \right) \quad (1.18)$$

mit der unbekanntem Größe Δt_0 , die den unterschiedlichen Emissionszeitpunkt der Neutrinos berücksichtigt. Für die Messungen der SN1987A-Neutrinos wird in [24]

$$m(\nu_e) < 5,7 \text{ eV} \quad (95\% \text{C.L.}). \quad (1.19)$$

als Obergrenze für die Masse des Neutrinos angeben.

Bei zukünftigen Messungen von Supernova-Neutrinos hängen die Ergebnisse für m_ν vom Verständnis der Supernova-Neutrinoemission ab, d.h. Δt_0 sollte durch genaue Modellierung der Abkühlphase des Protoneutron-Sterns eingeschränkt sein.

1.3 Bestimmung der Neutrinomasse aus dem Betazerfall

Die einzige modellunabhängige Methode zur Bestimmung der Neutrinomasse ist die kinematische Untersuchung des Betazerfalls in Gl. (1.3). Durch die Energie- und Impulserhaltung lässt sich aus einer Phasenraumbetrachtung das differentielle Betaspektrum mit einer Endpunktsenergie E_0 wie folgt beschreiben:

$$\frac{dN}{dE} = C \cdot F(Z, E) \cdot p_e \cdot (E + m_e c^2) (E_0 - E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - m_\nu^2 c^4} \Theta(E_0 - E - m_\nu c^2). \quad (1.20)$$

Hierbei ist C eine Konstante

$$C = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} (g_V^2 + 3g_A^2) \quad (1.21)$$

mit der Fermikonstanten G_F , dem Cabibbo-Winkel θ_C und den Kopplungskonstanten der schwachen Wechselwirkung g_V und g_A . $F(Z, E)$ bezeichnet die Fermifunktion. Die restlichen Größen wie der Impuls p_e und die kinetische Energie E des Elektrons sind rein kinematische Größen. Die Heaviside-Funktion Θ garantiert die Energieerhaltung. Die Parameter, die das Spektrum charakterisieren, sind der Endpunkt E_0 und das Quadrat der Neutrinomasse m_ν^2 . Als Endpunkt bezeichnet man die maximal mögliche kinetische Energie des Elektrons bei verschwindender Neutrinomasse $m_\nu = 0$, also die beim Zerfall freiwerdende Energie Q abzüglich der Elektronruheenergie $m_e c^2$. Bei nicht-verschwindender Neutrinomasse endet das Spektrum unterhalb E_0 , da auch noch die Ruheenergie des Neutrinos $m_\nu c^2$ aufgebracht werden muss. Diese Änderung würde bei Kenntnis der Zerfallsenergie Q und Messung des Endpunkts des Spektrums schon ausreichen um die Neutrinomasse zu bestimmen. Da diese Größen jedoch nicht genau genug bekannt und experimentell schwierig zu bestimmen sind, betrachtet man den Einfluss der Neutrinomasse auf die Form des Spektrums nahe des Endpunkts (vgl. Abb. 1.4). Hierfür müssen auch minimalste Korrekturen des Spektrums beachtet werden. Die beim Zerfall auf das Elektron übertragene Energie wird durch die Coulombwechselwirkung modifiziert, da das Elektron mit dem Coulombfeld des Kerns wechselwirkt. Durch die Fermifunktion $F(Z, E)$ [25] wird dieser Effekt beschrieben:

$$F(Z, E) = \frac{x}{1 - e^{-x}}, \quad x = \frac{2\pi Z\alpha}{\beta} \quad (1.22)$$

mit der Feinstrukturkonstanten α und $\beta = v_e/c$. Die empirischen Werte $a_0 = 1,002037$ und $a_1 = -0,001427$ [26] führen zu folgender verwendeter Parametrisierung für die Fermifunktion

$$F(Z, E) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \cdot (a_0 + a_1\beta). \quad (1.23)$$

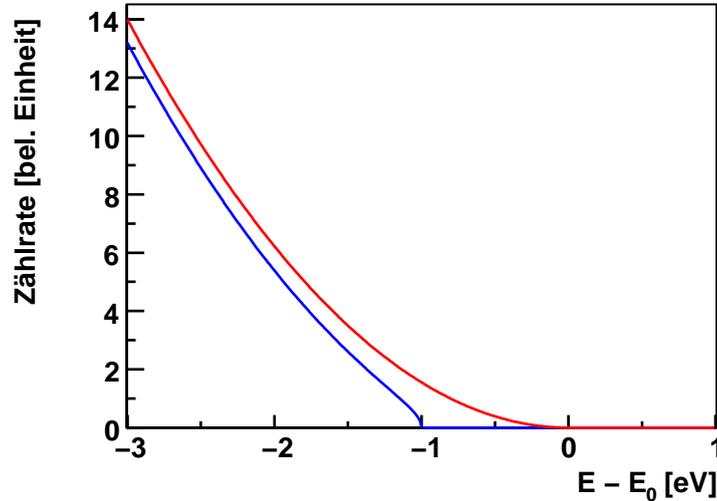


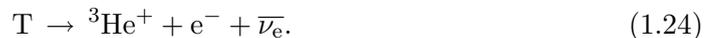
Abbildung 1.4: **Einfluss der Neutrinomasse auf die Endpunktsregion des differentiellen Betaspektrums** für $m_\nu = 0 \text{ eV}$ (rot) und $m_\nu = 1 \text{ eV}$ (blau). Je größer die Neutrinomasse ist, desto niedriger liegt der Endpunkt des Spektrums und desto stärker unterscheidet sich auch der Verlauf der Spektren in diesem Bereich.

Der Einfluss der Fermifunktion nahe des Endpunkts ist jedoch gering, da sie über das enge Messintervall von $\sim 50 \text{ eV}$ nahezu konstant ist.

Eine weitere Korrektur des Betaspektrums sind die Strahlungskorrekturen f_{rad} , die in Gl. (1.20) noch nicht angegeben sind und in Kap. 3.2.1 genauer diskutiert werden. Sie sind energieabhängig und besonders nahe des Endpunkts zu berücksichtigen.

Tritium als Betastrahler

Obwohl es viele natürliche Betastrahler gibt, benutzte die Mehrzahl der bisherigen Experimente zur Bestimmung der Neutrinomasse den Tritiumbetazerfall



Auch das KATRIN Experiment wird Tritium verwenden. Dies hat folgende Gründe:

- Tritium ist als Wasserstoffisotop in seinen elektromagnetischen und chemischen Eigenschaften dem gut studierten Wasserstoff sehr ähnlich. Viele für Wasserstoff schon bekannte Vorgänge lassen sich einfach auf Tritium übertragen, wenn man die größere Kernmasse berücksichtigt.
- Das Elektronenspektrum soll nahe des Endpunkts vermessen werden. In diesem Bereich ist die Zählrate nur sehr gering. Die integrale Rate in einem kleinen Intervall um E_0 skaliert mit $1/E_0^3$, was nur bei einem niedrigen Endpunkt noch relativ viele hochenergetische Ereignisse liefert. Der Endpunkt von Tritium ist mit $E_0 \approx 18,6 \text{ keV}$ der zweitniedrigste aller Betastrahler.

- Die Halbwertszeit von Tritium beträgt $t_{1/2} = 12,3$ Jahre. Aufgrund seiner hohen Zerfallswahrscheinlichkeit genügt daher eine relativ kleine Menge Tritium, um eine ausreichende Quellaktivität zu erreichen.
- Die Fermifunktion in Gl. (1.23) ist aufgrund der niedrigen Kernladung $Z = 2$ des entstehenden Tochterkerns ${}^3\text{He}$ einfach zu bestimmen. Darüber hinaus ist der Effekt von inelastischen Streuungen an einem Quellmaterial mit kleinem Z gering.
- Die Kernstruktur von Tritium mit einem Proton und zwei Neutronen ist sehr einfach darstellbar, so dass bei der Berechnung des Kernmatrixelements $|M|$ keine Korrekturen nötig sind. Es handelt sich um einen übererlaubten Übergang.
- Wird molekulares Tritium T_2 verwendet, ist die Berechnung des Betaspektrums für den Zerfall



in analoger Weise möglich, wenn die Endzustandsverteilung des ionisierten Moleküls ${}^3\text{HeT}^+$ entsprechend berücksichtigt wird. Diese sogenannte Final State Distribution (FSD) wird in Kap. 3.2.3 diskutiert.

Betazerfallsexperimente mit Tritium

Schon seit mehr als 50 Jahren werden Tritium-Betazerfallsexperimente durchgeführt um die Neutrinomasse zu bestimmen. Die Vorgänger-Experimente von KATRIN waren das Mainz-Experiment [27] und das Troitsk-Experiment [28], die beide elektrostatische Spektrometer verwendeten, sich aber in ihren Tritiumquellen unterschieden.

In Mainz wurde eine feste Quelle verwendet, bei der molekulares Tritium auf ein Substrat aufgetragen wurde und dort kondensierte. Eine Quelle dieser Art ist kompakt, aber aufwendig in der Herstellung. Ein grundlegendes Problem einer quench-kondensierten Tritiumquelle ist ihre Selbstauffladung, da die Betaelektronen emittiert werden, die positiven Ionen aber im Quellpräparat verbleiben [29]. Das Troitsk-Experiment verwendet eine fensterlose gasförmige Tritiumquelle, die eine differentielle Pumpstrecke benötigt, um das Tritium zwischen Quelle und Spektrometer zu entfernen. Die Quelle ist 3 m lang und hat einen Durchmesser von 50 mm. Die Vorteile einer gasförmigen Quelle sind ihre hohe Aktivität und ihre geringen systematischen Effekte. Wenn die Quelle entsprechend groß gestaltet wird, kann die Luminosität maximiert werden. Hervorzuheben ist ferner, dass der Zerfall von freiem molekularem Tritium untersucht werden kann. Als technischer Nachteil kann die Notwendigkeit der Pumpstrecken gesehen werden. Außerdem müssen die größere Dopplerverbreiterung aufgrund der Bewegung der Tritiummoleküle und die Energieverluste der Elektronen durch Stöße mit den Molekülen berücksichtigt werden.

Das Mainz-Experiment ermittelte ein mit Null verträgliches Neutrinomassenquadrat m_ν^2 und konnte damit eine Obergrenze für die Neutrinomasse angeben [29]

$$m_{\nu_e}^2 = (-0,6 \pm 2,2_{\text{stat}} \pm 2,1_{\text{syst}}) \text{ eV}^2 \quad (1.26)$$

$$m_{\nu_e} < 2,3 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}). \quad (1.27)$$

Das Troitsk-Experiment veröffentlichte unter Berücksichtigung der Troitsk-Stufenfunktion in [28] folgendes Resultat:

$$m_{\nu_e}^2 = (-2,3 \pm 2,5_{\text{stat}} \pm 2,0_{\text{syst}}) \text{ eV}^2 \quad (1.28)$$

$$m_{\nu_e} < 2,05 \text{ eV} \quad (95\% \text{C.L.}) \quad (1.29)$$

Rhenium als Betastrahler

Neben Tritium ist auch die Untersuchung des Betazerfalls von Rhenium aussichtsreich, um die Neutrinomasse zu bestimmen. ^{187}Re besitzt mit $Q = 2,47 \text{ keV}$ den niedrigsten Endpunkt aller Betastrahler und gewährleistet damit einen großen Anteil Elektronen nahe des Endpunkts. Ein wesentlicher Nachteil ist jedoch die große Halbwertszeit mit $4,32 \cdot 10^{10}$ Jahren, was große Mengen Rhenium für eine ausreichende Aktivität erfordert.

Das Milano Experiment [30] hat mit Hilfe von Mikrokalorimetern das Rhenium-Betaspektrum gemessen. Hierzu wurden Arrays von 10 Mikrokalorimetern verwendet. Die Halbleiterverbindung AgReO_4 , jeweils 250 bis 300 μg pro Kalorimeter, ist dabei gleichzeitig Quelle und Detektor. Zur Bestimmung der freiwerdenden Energie bei einem Betazerfall wird der Temperaturanstieg der bei niedrigen Temperaturen gehaltenen Mikrokalorimeter durch Thermistoren gemessen. In [30] wird aus der Messung von $\approx 6,2 \cdot 10^6$ ^{187}Re -Zerfällen angegeben:

$$m_{\nu_e}^2 = (-112 \pm 207_{\text{stat}} \pm 90_{\text{syst}}) \text{ eV}^2 \quad (1.30)$$

$$m_{\nu_e} < 15 \text{ eV} \quad (90\% \text{C.L.}) \quad (1.31)$$

In Zukunft wird das MARE-Experiment (Microcalorimeter Array for a Rhenium Experiment) [31] metallisches Rhenium oder AgReO_4 für weitergehende Studien einsetzen. Es werden viele kleine Kristalle als Bolometer verwendet, deren Temperatur sich bei einem Nachweis eines Betazerfallselektrons erhöht. Der große Vorteil eines solchen Experiments ist der modulare Aufbau, da sich die Masse durch Hinzufügen neuer Kristalle immer weiter erhöhen lässt.

Die erste Phase MARE-I soll eine Sensitivität von $m_{\nu} = 3 \text{ eV}$ nach drei Jahren Messzeit aufweisen. MARE-II soll dann mit einer wesentlich größeren Anzahl an Kalorimetern eine sub-eV-Sensitivität erreichen und damit den mit KATRIN zugänglichen Parameterbereich der Neutrinomasse mit völlig anderer Systematik untersuchen.

1.4 Bestimmung der Neutrinomasse aus dem Doppelbetazerfall

Der Doppelbetazerfall bezeichnet die gleichzeitige Umwandlung von zwei Neutronen in zwei Protonen, Elektronen und Neutrinos

$$2n \rightarrow 2p + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (1.32)$$

Dieser Prozess wird als neutrinobehafteter Doppelbetazerfall $2\nu\beta\beta$ bezeichnet, bei dem der einfache Betazerfall quasi doppelt abläuft. Die Energie der Elektronen ist kontinuierlich über ein Spektrum zwischen $E_{\text{min}} = 2m_e$ und $E_{\text{max}} = M_i - M_f$ mit den

Kernmassen M_i vor bzw. M_f nach dem Zerfall verteilt [1]. Beim neutrinolosen Doppelbetazerfall $0\nu\beta\beta$ wird jedoch das Neutrino, das beim Betazerfall des ersten Kerns entsteht, als virtuelles Austauschteilchen beim Zerfall des zweiten Kerns absorbiert:

$$2n \rightarrow 2p + 2e^- . \quad (1.33)$$

Hier ist als Summe der Elektronenenergien nur die feste Energie E_{\max} möglich. Im Spektrum sollte der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall daher als monoenergetische Linie am Endpunkt des kontinuierlichen Spektrums des $2\nu\beta\beta$ -Zerfalls sichtbar sein.

Erschwert wird die Messung durch extrem kleine Zählraten. Zum einen ist der $2\nu\beta\beta$ -Zerfall im Vergleich zum einfachen Betazerfall schon stark unterdrückt, zum anderen ist der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall nochmals um viele Größenordnungen seltener. Deswegen werden nur Kerne (A, Z) mit A Nukleonen und Z Protonen untersucht, bei denen der einfache Betazerfall energetisch verboten ist, d.h. der Tochterkern ($A, Z+1$) schwerer als der Ursprungskern ist. Wenn das Niveau des nach zwei Betazerfällen entstehenden Kerns ($A, Z+2$) dann unterhalb des Ausgangsniveaus liegt, ist ein Doppelbetazerfall möglich. Für den $0\nu\beta\beta$ -Zerfall gelten Voraussetzungen, die über das Standardmodell der Teilchenphysik hinausgehen:

- Die Neutrinos müssen Majorana-Teilchen sein. Am ersten Vertex wird ein Elektronantineutrino emittiert, am zweiten wird ein Elektronneutrino absorbiert, was bedeutet, dass Neutrino und Antineutrino identisch sein müssen.
- Da das erste Neutrino rechtshändig ist, das zweite jedoch linkshändig, muss sich dazwischen die Helizität umgekehrt haben. Dies ist nur möglich, wenn Neutrinos eine Masse besitzen, da dann auch ein kleiner Anteil linkshändiger Antineutrinos bzw. rechtshändiger Neutrinos existiert. Darüber hinaus können auch rechtshändige geladene Ströme existieren, auf die an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingegangen werden soll (siehe [1]).
- Wenn der doppelte Betazerfall existiert, entstehen zwei Elektronen mit der Leptonenzahl 1, d.h. es gilt $\Delta L = 2$, die Leptonenzahl wird um zwei Einheiten verletzt.

Zur Bestimmung der Neutrinomasse wird die Halbwertszeit $T_{1/2}^{0\nu}(0_i^+ \rightarrow 0_f^+)$ von Übergängen, bei denen Mutter- und Tochterkern im Grundzustand sind, ermittelt. Unter Vernachlässigung von rechtshändigen Ströme ergibt sich

$$[T_{1/2}^{0\nu}(0_i^+ \rightarrow 0_f^+)]^{-1} \propto M^2 \cdot \frac{\langle m_\nu \rangle^2}{m_e^2} \quad (1.34)$$

$$\langle m_\nu \rangle = \sum_i U_{ei}^2 m_i \quad (1.35)$$

mit der effektiven Majorana-Neutrinomasse $\langle m_\nu \rangle$ und den Elementen U_{ei} der Mischungsmatrix. Eine wesentliche Unsicherheit bei der Ableitung der effektiven Neutrinomasse aus der Messung der Lebensdauer liegt in der Berechnung der Kernmatrixelemente M , deren Bestimmung um einen Faktor 3 differiert.

Als Beispiel eines Doppelbetazerfallsexperiments sei das Heidelberg-Moskau-Experiment erwähnt. Dabei wurden fünf ^{76}Ge -Kalorimeter verwendet, bei denen Quelle und

Detektor identisch sind. Ein Teil der Heidelberg-Moskau-Kollaboration veröffentlichte eine Evidenz für ein $0\nu\beta\beta$ -Signal [32]:

$$T_{1/2}^{0\nu} = (2, 23_{-0,31}^{+0,44}) \cdot 10^{25} \text{ Jahre} \quad (1.36)$$

$$\langle m_\nu \rangle = (0, 32_{-0,03}^{+0,03}) \text{ eV}. \quad (1.37)$$

Dieses umstrittene Resultat wird derzeit von neueren Experimenten (GERDA, Exo, Cuore) [33, 34, 35] untersucht.

2. Das KATRIN Experiment

Das Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment KATRIN am Forschungszentrum Karlsruhe hat die Bestimmung der Neutrinomasse mit einer Sensitivität von $m_\nu = 200$ meV zum Ziel. Der große Vorteil gegenüber anderen Experimenten ist die Modellunabhängigkeit, da der zu studierende Tritiumbetazerfall durch einfache kinematische Größen unter Annahme von Energie- und Impulserhaltung beschrieben werden kann.

2.1 Messprinzip

Zur Bestimmung der Neutrinomasse m_ν wird das Elektronenspektrum des Tritiumbetazerfalls nahe des Endpunkts E_0 genau vermessen. Wie in Kap. 1.3 erklärt wurde, zeigt sich nur dort der Einfluss der Neutrinomasse auf das Spektrum.

Die Energie von Elektronen kann bestimmt werden, indem man sie gegen ein elektrisches Potential anlaufen lässt. Dazu legt man an einen Behälter, in den die Zerfallselektronen geführt werden, eine elektrische Spannung U an. Es können dann nur diejenigen Elektronen passieren, deren kinetische Energie größer ist als die potentielle Energie $q \cdot U$ (q ist die Elementarladung). Alle anderen Elektronen mit zu geringer Energie $E < qU$ werden reflektiert. Das Spektrometer funktioniert damit als integrierender Hochpass. Durch Variation des Spektrometerpotentials - genauer durch Ändern der Potentialdifferenz zwischen Elektronenquelle und Spektrometer - erhält man ein integriertes Spektrum (Kap. 2.1.2).

2.1.1 MAC-E Filter

Zur genauen Bestimmung der Energie der Zerfallselektronen ist es wichtig, dass sie in der Analysierebene parallel zum elektrischen Feld fliegen. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass nur die kinetische Energie entlang der elektrischen Feldlinien E_{\parallel} analysiert werden kann, die transversale Energie E_{\perp} bleibt unberücksichtigt. Wenn nun die Gesamtenergie des Elektrons bestimmt werden soll, muss E_{\perp} möglichst vollständig in E_{\parallel} umgewandelt werden. Hierzu wird die magnetische adiabatische Kollimation verwendet, die in Abb. 2.1 erklärt wird. Die parallelisierten Elektronen werden dann vom elektrischen Potential analysiert.

Die endliche Energieauflösung ΔE eines MAC-E-Filters (Magnetic Adiabatic Collimation with an Electrostatic Filter) beruht auf der verbleibenden Transversalenergie E_{\perp} . Aus der Erhaltung des magnetischen Moments folgt für ΔE für Elektronen der Energie E [4]

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B_A}{B_{\max}} \quad (2.1)$$

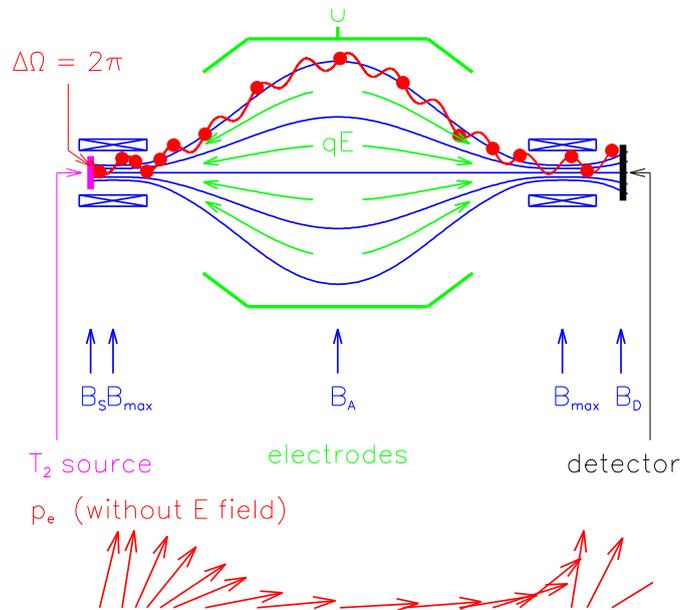


Abbildung 2.1: **Prinzip eines MAC-E-Filters** [4]. Elektronen, die in der Quelle in einem Magnetfeld in eine beliebige Richtung emittiert werden, führen eine Zyklotronbewegung entlang der Magnetfeldlinien aus. Durch einen Gradienten des Magnetfelds von der Quelle zum Spektrometer werden die Elektronen parallelisiert: Das magnetische Moment $\mu = E_{\perp}/B$ bleibt bei einer adiabatischen Änderung der Magnetfeldstärke konstant. Da das Magnetfeld vom Erzeugungsort der Elektronen ($B_S = 3,6 \text{ T}$) zur Analysierebene ($B_A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$) hin über vier Größenordnungen abfällt, verringert sich E_{\perp} im selben Maße, während E_{\parallel} zunimmt. Veranschaulicht wird dieser Vorgang durch ein Umklappen des Impulsvektors, wodurch die Elektronen in der Analysierebene nahezu nur noch longitudinale Energie besitzen und vom elektrostatischen Filter analysiert werden können.

mit der Magnetfeldstärke B_A in der Analysierebene des Spektrometers und dem maximalen Magnetfeld der gesamten Anordnung B_{\max} . Eine wichtige charakteristische Größe für das KATRIN Experiment ist der magnetische Fluss

$$\Phi = \int B \, dA = B_S \cdot A_S = B_A \cdot A_A = 191 \text{ T cm}^2 \quad (2.2)$$

mit der Fläche der Analysierebene A_A . Man spricht dabei auch vom magnetischen Flussschlauch, der das Volumen umfasst, das von einem Spektrometer abgebildet wird. Elektronen, die innerhalb des magnetischen Flussschlauchs emittiert werden, gelangen bei ausreichender kinetischer Energie durch das Spektrometer zum Detektor.

2.1.2 Integriertes Betaspektrum und Ableitung der Neutrinomasse

Mit dem KATRIN-Spektrometer wird ein integriertes Spektrum gemessen. Die Zahl N der Ereignisse, die am Detektor registriert werden,

$$N(qU, E_0, m_\nu^2) = N_{\text{tot}} t_U \int_0^{E_0} \frac{dN}{dE}(E_0, m_\nu^2) \cdot R(E, qU) dE \quad (2.3)$$

hängt ab vom angelegten Spektrometerpotential und den Zerfallsparametern Endpunktenergie E_0 und Neutrinomassenquadrat m_ν^2 . Das Spektrometerpotential qU lässt nur den hochenergetischen Teil des differentiellen Spektrums passieren. E_0 und m_ν^2 bestimmen den Verlauf des differentiellen Spektrums (Kap. 1.3) und sollen ermittelt werden. Außerdem tritt noch die Antwortfunktion R des Experiments auf: In ihr sind Spektrometereigenschaften, insbesondere die Transmissionsfunktion, und Quelleigenschaften, wie Streuwahrscheinlichkeiten und Energieverluste der Elektronen, berücksichtigt. Details hierzu werden in Kap. 3.5 behandelt. Die Anzahl der Tritiumkerne in der WGTS N_{tot} und die Messzeit t_U komplettieren die Berechnung des integrierten Spektrums.

Um die Neutrinomasse aus dem integrierten Spektrum zu extrahieren, müssen alle Experimenteigenschaften von der Quelle bis zum Spektrometer bekannt sein. An die Messungen werden die erwarteten Spektren für verschiedene, frei variierbare Parameterkombinationen E_0, m_ν^2, R_s als Amplitude des Signals und R_b als Beitrag des Untergrunds angepasst. Eine Möglichkeit hierbei ist die Minimierung der Chi-Quadrat-Funktion

$$\chi^2(E_0, m_\nu^2, R_s, R_b) = \sum_i \left(\frac{N_{\text{exp}}(qU_i) - N_{\text{th}}(qU_i, E_0, m_\nu^2, R_s, R_b)}{\sigma_{\text{th}}(U_i)} \right)^2, \quad (2.4)$$

die die Abweichung zwischen gemessenem und erwartetem Spektrum für eine gewählte Parameterkombination beschreibt. Daraus ergeben sich dann die wahrscheinlichsten Werte für E_0, m_ν^2, R_s und R_b . Da aber nur m_ν^2 von Interesse ist, kann über die anderen freien Parameter integriert werden. Diese Technik wird als „Marginalisierung“ bezeichnet. Eine hierbei oft eingesetzte Methode ist die Markov Chain Monte Carlo Integration, auf die an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

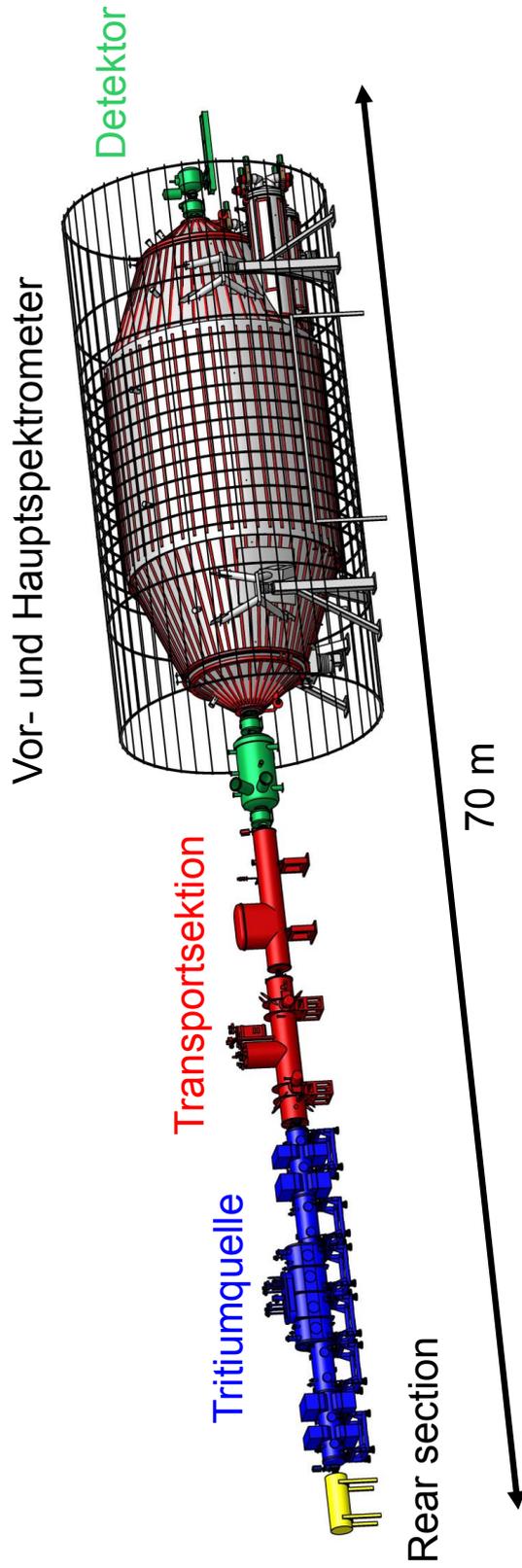


Abbildung 2.2: **Das KATRIN Experiment.** Das 70 m lange Experiment lässt sich in die fünf verschiedenen Sektionen unterteilen. Die „Rearsection“ wird zur Überwachung der Quelle verwendet. Die Tritiumquelle enthält das hochreine molekulare Tritium. Die aus der Quelle austretenden Elektronen werden von der Transportsektion weitergeleitet, während die Tritiummoleküle durch Pumpen und Kaltfallen entfernt werden. Das Vorspektrometer reduziert den großen Elektronenfluss in das Hauptspektrometer, das dann die Energieanalyse der Elektronen durchführt. Die Elektronen, die die Spektrometer passieren können, werden vom Detektor nachgewiesen. Damit werden die Raten bei verschiedenen eingestellten Potentialdifferenzen zwischen Quelle und Spektrometer gemessen, wodurch ein integriertes Betaspektrum ermittelt wird.

2.2 Tritiumquelle

Das KATRIN Experiment verwendet eine im Rahmen des Los Alamos Tritiumexperiments [36] erstmals verwendete fensterlose gasförmige Tritiumquelle WGTS (Windowless Gaseous Tritium Source). Die WGTS ist an beiden Enden offen, sodass die Elektronen keinerlei Energieverluste beim Durchgang durch eine dünne Folie erfahren. Ohne ein solches Fenster wird die WGTS zu einer prozesstechnischen Herausforderung: Ein einfaches abgeschlossenes System ist damit nicht mehr möglich, eine Tritiumrückhaltung durch Pumpen wird notwendig.



Abbildung 2.3: Aussenansicht der WGTS¹.

Aufbau

Die WGTS besteht aus einem Strahlrohr der Länge $d = 10$ m mit einem inneren Durchmesser $D = 90$ mm. An den beiden Enden der WGTS schließt sich eine differentielle Pumpstrecke, die DPS1-F auf der dem Spektrometer zugewandten Seite bzw. die DPS1-R auf der rückwärtigen Seite, an (siehe Abb. 2.4). Das Tritium wird in der Mitte der WGTS in einer Injektionskammer durch viele kleine Öffnungen bei niedrigem Druck in das Strahlrohr eingebracht, um Turbulenzen zu vermeiden. Die Moleküle strömen bzw. diffundieren in beide Richtungen. Dabei haben sie die Möglichkeit zu zerfallen. Am Ende werden sie von den Turbomolekularpumpen der DPS1 mit einem Gesamtreduktionsfaktor ≈ 100 abgepumpt. In der angeschlossenen „Inner Loop“ wird dieses Tritium wieder einem druckkontrollierten Behälter zugeführt, der mit dem Tritiumeinlass verbunden ist und damit den inneren Tritiumkreislauf schließt. Moleküle, die von der DPS1-F nicht

¹Bild von ACCEL

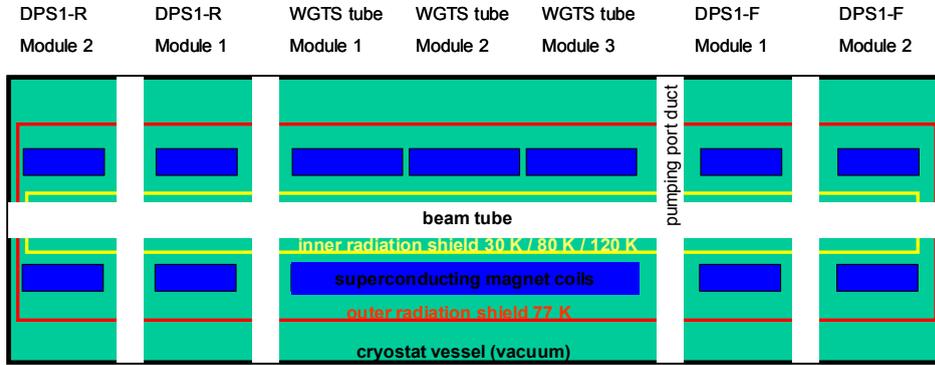


Abbildung 2.4: **Schematischer Aufbau der WGTS [37]**. Eingezeichnet ist das Strahlrohr im Zentrum, die Pumpstutzen der ersten differentiellen Pumpstrecken DPS1-F und DPS1-R, die Hauptmagnetmodule und die Strahlungsschilde. Die nicht eingezeichneten Zwei-Phasen-Kühlrohre und die Tritiumzuleitung sind direkt am Strahlrohr befestigt. Außerdem sind an den Enden der eingezeichneten Magnetmodule kleine Korrekturspulen angebracht um ein Abfallen des Magnetfelds an den Verbindungsstellen zu minimieren.

abgepumpt werden, gelangen in die Transportsektion (Kap. 2.3). Alle in der dortigen Pumpstrecke abgepumpten Moleküle sowie ein kleiner Anteil des Gases aus der Inner Loop werden einem Reinigungsprozess unterzogen. Um die geforderte Tritiumreinheit von mindestens 95 % T_2 auch während des Betriebs zu halten, wird von Prozessanlagen des Tritiumlabors Karlsruhe (TLK) eine Abtrennung der Tritiumisotope wie DT, HT und sonstiger Verunreinigungen durchgeführt. Danach wird das gereinigte Tritium wieder dem Einlassbehälter der WGTS zugeführt.

Um die Anzahl der Tritiummoleküle in der WGTS konstant zu halten, muss der Einlassdruck $p \approx 3,3 \cdot 10^{-3}$ mbar sowie der Tritiumdurchsatz $q \approx 1,9$ mbar l/s konstant gehalten werden. Eine Größe, die hier häufig verwendet wird, ist die Säulendichte ρd . Sie beschreibt die entlang der Quellachse z integrierte Dichte an Tritiummolekülen pro cm^2 :

$$\rho d = \int_{-5 \text{ m}}^{5 \text{ m}} \rho(z) dz. \quad (2.5)$$

Die WGTS soll mit einer Säulendichte $\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ betrieben werden. Je höher die Säulendichte gewählt wird, desto mehr Tritium befindet sich in der Quelle, was die Aktivität steigert. Andererseits steigt dadurch auch die Wahrscheinlichkeit, dass die Elektronen an den Tritiummolekülen inelastisch streuen und Energie verlieren. Für die oben angegebene Säulendichte ergibt sich über die gesamte Quelle gemittelt ein Anteil von 41,3 % ungestreuter Elektronen (siehe Kap. 3.1). Die genaue Bestimmung der Aktivität der Quelle zu einer bestimmten Zeit ist ausschlaggebend für die spätere Analyse. Dabei haben erste Berechnungen [38] gezeigt, dass bereits eine Nichtberücksichtigung einer Schwankung der Säulendichte um 0,2 % für die Analyse der Neutrinomasse kritisch ist.

Die Temperatur der Moleküle hat direkten Einfluss auf die Dichte in der WGTS. Die Quelle soll bei einer Temperatur von 30 K betrieben werden, damit auch bei niedrigem Druck die geforderte Tritiumsäulendichte erreicht werden kann. Außerdem ist die thermische Bewegung der Tritiummoleküle und damit die Dopplerverschmierung (Kap. 3.2.4) der Elektronenenergie umso geringer, je niedriger die Temperatur ist. Noch niedrigere Temperaturen sind nicht möglich, da sich sonst Tritiumcluster (T_4 , T_6 , T_8 , ...) bilden oder Tritium an den kalten Wänden adsorbiert.

Weitergehende Berechnungen [39] zeigen den Einfluss der Temperatur auf die Säulendichte in der WGTS. Mit einem Korrelationskoeffizienten $\alpha_T = -1,2$ impliziert eine um 1% niedrigere Temperatur eine Erhöhung der Säulendichte um etwas mehr als 1%. Deshalb wird auch für die Temperatur eine Stabilität von 0,2% gefordert. Dies ist mit herkömmlichen Methoden nicht möglich. Deshalb ist auf beiden Seiten der WGTS ein Kühlrohr angebracht (siehe Abb. 2.5a), in dem ein Zwei-Phasen-Gemisch von Neon zirkuliert. Mit einem Heizdraht kann die Heizleistung so eingestellt werden, dass das Neon bei $T = 30\text{ K}$ und $p = 1\text{ bar}$ gerade siedet, sodass die Temperatur konstant bleibt. In einem Verflüssiger kondensiert das entstehende gasförmige Neon wieder, sodass der Prozess eine stabile Temperatur gewährleistet.

Der gesamte innere Bereich mit Strahlrohr, Neon-Kühlsystem und Tritiumzuleitung wird von einem inneren Wärmeschild umgeben, um äußere Einflüsse insbesondere der Magnete abzuschirmen (Abb. 2.5b). Auf ein Isoliervakuum folgen dann die mit flüssigem Helium gekühlten supraleitenden Solenoide. Die drei inneren Magnetmodule M1, M2 und M3 erzeugen ein Magnetfeld $B_S = 3,6\text{ T}$, das für die magnetische Führung (Kap. 2.1.1) der Elektronen entlang der magnetischen Feldlinien zum Spektrometer benötigt wird. Die Magnete werden von einem äußeren Schild umgeben und befinden sich in

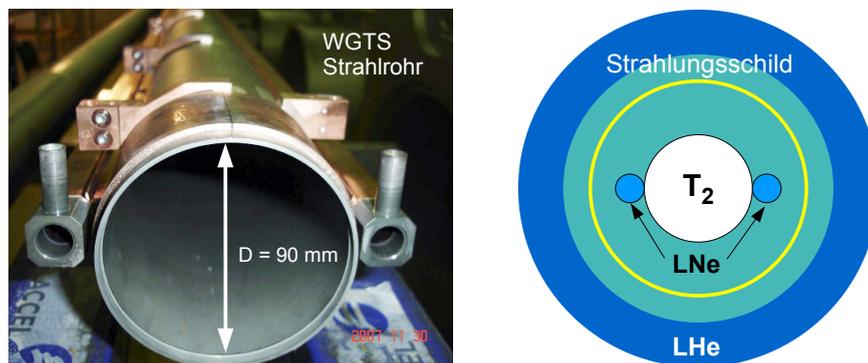


Abbildung 2.5: (a) Aufnahme des Strahlrohrs nach Anbringen der Zwei-Phasen-Kühlrohre². (b) Schematischer Querschnitt der WGTS ohne äußeres Strahlungsschild und Kryostaten.

einem Isoliervakuum, das durch die Außenwand der WGTS abgeschlossen wird. Eine weitere Herausforderung neben der Stabilität der Temperatur und der Säulendichte ist

²Foto von ACCEL.

die Güte des Quellpotentials. Die WGTS ist für ein Potential zwischen 0 und 1000 V ausgelegt. Bei konstant gehaltenem Spektrometerpotential kann dann durch Variieren des Quellpotentials das integrierte Betaspektrum gemessen werden.

2.3 Transportsektion

Die Elektronen, die geladenen Tritiumionen sowie die neutralen Tritiummoleküle, die die Quelle verlassen konnten, gelangen in die Transportsektion. Diese ist unterteilt in zwei Pumpstrecken, eine differentielle und eine kryogene. Ihre Aufgabe ist die Rückhaltung der Tritiummoleküle und -ionen und die Weiterleitung der Elektronen zu den Spektrometern.

Die Quelle wird bei einem Injektionsdruck von $p \approx 10^{-3}$ mbar und einem Tritiumdurchsatz q der Größenordnung 1 mbar l/s betrieben. In den Spektrometern herrscht ein Ultrahochvakuum mit $p < 10^{-11}$ mbar, um Untergrundereignisse zu reduzieren (siehe Kap. 2.4). Das Tritium soll prinzipiell nur in der Quelle zerfallen, da hier das Quellpotential exakt definiert ist. Elektronen, die in anderen Bereiche des Experiments entstehen, erfahren eine andere Potentialdifferenz und verfälschen dadurch die Messung. Dementsprechend soll der Tritiumfluss in das Spektrometer kleiner als 10^{-14} mbar l/s sein. Bei höherem Fluss kann sich Tritium auch an der Innenwand des Tanks ablagern und in die Tankwand eindringen. Elektronen, die aus dem Zerfall solcher Tritiummoleküle entstehen, besitzen ein anderes Energiespektrum und werden ebenfalls unter einem anderen Potential als Elektronen aus der Quelle emittiert. Die Pumpstrecken müssen den Tritiumfluss also um mehr als 14 Größenordnungen reduzieren [40].

Die sich gerade in der Auslieferungsphase befindliche DPS2-F umfasst fünf 1 Meter lange Teilstücke, die in einer Schikane angeordnet sind, um den direkten Durchflug von Tritiummolekülen zu verhindern. Mit ihren vier Turbomolekularpumpen mit einer Saugleistung von 2000 l/s reduziert sie den Tritiumfluss um einen Faktor 10^5 . Ein weiterer wichtiger Aspekt der DPS2-F sind die eingebauten elektrischen Dipole, die durch eine $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift Tritiumionen aus dem Strahlrohr ablenken und neutralisieren [41]. Die Ionen würden ansonsten den magnetischen Feldlinien folgen und im Spektrometer Untergrundprozesse induzieren.

Die Kryopumpstrecke CPS befindet sich momentan in der technischen Design-Phase. Ihre Aufgabe ist es, alle Tritiummoleküle, die die DPS2-F durchqueren konnten, über Sorption zu eliminieren. Dazu sollen mehrere gewinkelt angeordnete Rohrstücke verwendet werden, deren Wände mit flüssigem Helium gekühlt werden. Die Wandoberfläche soll mit kondensiertem Argon (Argon-Frost) bedeckt sein, um die auftreffenden Tritiummoleküle effektiv zu binden. Dies ermöglicht eine weitere Reduktion des Gasflusses um einen Faktor 10^7 . Gemeinsam mit den zuvor angebrachten differentiellen Pumpstrecken wird somit die benötigte Reduktion des Gasflusses um insgesamt 14 Größenordnungen erreicht.

2.4 Vor- und Hauptspektrometer

Das KATRIN Experiment verwendet zur Energieanalyse der Elektronen ein großvolumiges Hauptspektrometer nach dem Prinzip eines MAC-E-Filters. Zwischen Trans-

portstrecke und Hauptspektrometer wird noch ein Vorspektrometer verwendet, dessen Funktionen unten erklärt werden.

Das Hauptspektrometer mit seiner Länge von 23,3 m und seinem Durchmesser von 9,8 m erlaubt eine hochaufgelöste Energiebestimmung der Elektronen. In der 63,6 m² großen Analysierebene im Zentrum des Hauptspektrometers fällt das von den vor und hinter dem Spektrometer angebrachten supraleitenden Solenoiden erzeugte Magnetfeld bis auf $B_A = 0,3$ mT ab. Mit Gl. (2.1) und $B_{\max} = 6$ T ergibt sich eine Energieauflösung $\Delta E = 0,93$ eV. Es ist evident, dass nur mit einer guten Energieauflösung eine präzise Vermessung des Spektrums nahe des Endpunkts überhaupt möglich ist. Zur Analyse der Elektronenenergie ist die Potentialdifferenz zwischen Quelle und Spektrometer entscheidend.

Im Hauptspektrometer herrscht ein Ultrahochvakuum von 10^{-11} mbar. Dies ist notwendig, um den Untergrund durch Wechselwirkung von Elektronen mit Restgasmolekülen zu verringern. Ein Teil der unerwünschten Elektronen entsteht, wenn kosmische Strahlung auf die Tankwand trifft und dort wechselwirkt. Zur Reduktion dieses Untergrunds wird ein inneres Drahtelektrodensystem verwendet. Im gesamten Spektrometertank werden nahe an der Tankwand dünne Drahtelektroden gespannt, die auf einem etwas negativeren Potential als das Tankpotential gehalten werden. Dadurch werden Sekundärelektronen, die aus der Tankwand austreten, elektrostatisch reflektiert. Außerdem ist mit den Drahtelektroden eine Feinformung des elektrischen Potentials im Tank möglich.

Mit seinen im Vergleich zum Hauptspektrometer geringen Ausmaßen (Länge $l = 3,38$ m, Innendurchmesser $d = 1,68$ m) besitzt das Vorspektrometer eine Energieauflösung $\Delta E \approx 100$ eV, ist aber dennoch ein wichtiger Bestandteil des Experiments.

Während der Messungen zur Bestimmung der Neutrinomasse soll das Vorspektrometer den in das Hauptspektrometer einfallenden Beta-Elektronenfluss reduzieren. Von der Quelle würden ohne zwischengeschaltetes Vorspektrometer $> 10^{10}$ Elektronen pro Sekunde in das Hauptspektrometer gelangen, obwohl nur ein winziger Bruchteil im interessanten hochenergetischen Teil des Spektrums liegt. Jedes Elektron kann im großen Volumen des Spektrometertanks trotz des Ultrahochvakuums Untergrund erzeugen. Legt man an das Vorspektrometer jedoch eine um z.B. 300 eV geringere Spannung als an das Hauptspektrometer an, werden nur noch die hochenergetischen Elektronen ($\sim 10^4$ pro Sekunde) durchgelassen. Die letzten 50 eV des Spektrums, die dann vom Hauptspektrometer analysiert werden, bleiben unbeeinflusst.

Projektseitig dient das Vorspektrometer als Prototyp für das wesentlich größere Hauptspektrometer. So wurden in den letzten Jahren z.B. die Funktion des inneren Drahtelektrodensystems und das Design der Erdelektroden intensiv am Vorspektrometer getestet.

Mit einem dritten Spektrometer, dem sogenannten Monitorspektrometer, wird die Hochspannung, die an der Analysierebene anliegt, überwacht. An das Hauptspektrometer und das separat stehende Monitorspektrometer wird dieselbe Spannung angelegt. Mit letzterem kann dann die Energie eines radioaktiven monoenergetischen Elektronenemitters gemessen und somit Schwankungen in der Hochspannung registriert werden.

2.5 Detektor

Die Elektronen, die durch die Spektrometer transmittiert werden, werden durch das ansteigende Magnetfeld gebündelt, aufgrund des Erdpotentials am Spektrometerende wieder beschleunigt und treffen dann auf den Hauptdetektor, der die Rate transmittierter Betaelektronen bestimmt. Durch die Beschleunigung vermeidet man Untergründereignisse niederenergetischer Elektronen. Auch eine Nachbeschleunigung (U_{Det} bis +30 kV) wird derzeit technisch untersucht, um die Anzahl der nachgewiesenen Elektronen zu maximieren. Der verwendete Detektor ist eine segmentierte Silizium PIN-Diode. Diese besitzt eine zur Untergrundseparation ausreichende Energieauflösung $\Delta E = 600$ eV FWHM für 18,6 keV Elektronen. Die flächengleiche Segmentierung (Abb. 2.6) in ein Zentrum mit vier Segmenten und in zwölf Ringe mit je zwölf Pixeln ermöglicht eine genaue und schnelle Detektion der Teilchen und lässt radiale und azimuthale Inhomogenitäten in der Quelle bzw. der Analysierebene erkennen.

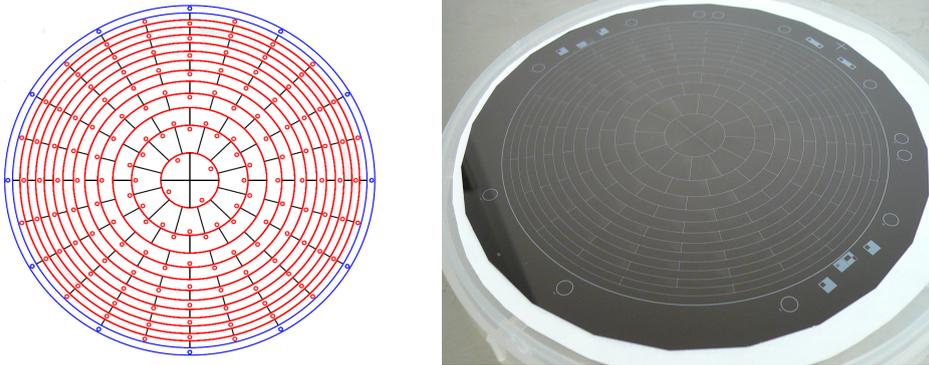


Abbildung 2.6: **Detektorsegmentierung.** Ein Zentrum mit 4 Pixeln und 12 Ringe mit jeweils 12 Pixeln. Alle Pixel besitzen die gleiche Fläche.

Der Detektor muss hierzu einerseits robust genug sein um Zählraten von einigen 100 kHz messen zu können, wenn Kalibrationsmessungen mit einer Elektronenkanone oder mit geringer Spektrometerspannung durchgeführt werden. Andererseits muss er sehr niedrige Zählraten nachweisen können, wenn nahe am Endpunkt gemessen wird. Mit einer erwarteten Zählrate von wenigen mHz im für die Neutrinomasse sensitiven Bereich des integrierten Spektrums darf der gesamte Untergrund $\Gamma_b = 10$ mHz nicht übersteigen. Dies erfordert eine gute Abschirmung und ein Vetosystem gegen kosmische Strahlung. Die Größe Γ_b bestimmt auch, in welchem Intervall unterhalb des Endpunkts gemessen wird. Die größte Sensitivität auf die Neutrinomasse ergibt sich bei einem Verhältnis von Ereignisrate des integrierten Spektrums zur Untergrundrate von 2:1 [4].

2.6 Monitoring

Im folgenden werden einige experimentelle Methoden angegeben, die zur Überwachung der Quelleigenschaften dienen:

- Speziell zur Bestimmung der Säulendichte ρd in der Quelle und damit der Aktivität wurde ein „forward beam monitor“ entwickelt [42]. Dieser quer zum Strahlrohr verfahrbare Detektor ermöglicht aufgrund seiner kleinen Fläche die Messung des Elektronenflusses am Rand des magnetischen Flussschlauchs während des normalen Messzyklus. Bei einer Unterbrechung der Messphase kann er auch den gesamten Querschnitt des Strahlrohrs abscannen.
- Die „Rearsection“, die sich an die WGTS auf der dem Spektrometer abgewandten Seite anschließt, befindet sich in der Design-Phase [43]. Durch eine Rückwand in diesem Bereich wird das Potential der Quelle definiert. Mit einem sich ebenfalls in der Design-Phase befindlichen Detektor wird die Aktivität der Quelle kontinuierlich überwacht. Außerdem wird eine Elektronenkanone eingebaut, mit der man zwischen einzelnen Messzyklen Elektronen durch die WGTS schicken kann. Aus dem Verhältnis der Anteile gestreuter und ungestreuter Elektronen bei verschiedenen angelegten Spektrometerspannungen kann man dann auf die aktuelle Säulendichte zurückschließen.
- Auch der Hauptdetektor kann zwischen den Messungen die Quellaktivität bestimmen, indem die Spannung an den Spektrometern stark heruntersetzt wird und damit ein großer Teil der Elektronen zum Detektor gelangt.
- Mit Laser-Raman-Spektroskopie wird die Tritiumreinheit überwacht [44, 45]. In einer Box an der Inner Loop wird hierzu das an den Gasmolekülen gestreute Laserlicht analysiert. Die verschiedenen Anregungsenergien von Tritium, Deuterium und sonstigen Bestandteilen des Gasgemisches ermöglichen durch spektrale Intensitätsmessungen des gestreuten Lichts eine genaue Bestimmung der Gaszusammensetzung.

2.7 Sensitivität und systematische Unsicherheiten

Das Ziel des KATRIN Experiments ist eine Bestimmung der Neutrinomasse im sub-eV-Bereich. Wie in [4] näher erklärt wird, kann mit KATRIN eine Neutrinomasse $m_\nu = 350 \text{ meV}$ mit einem Entdeckungspotential von 5σ gemessen werden. Falls keine Neutrinomasse bestimmt werden kann, kann $m_\nu < 200 \text{ meV}$ (90% C.L.) als neue Obergrenze angegeben werden.

Um diese Sensitivität³ auf die Neutrinomasse zu erreichen, sind drei Jahre Messzeit vorgesehen, nach denen identische statistische und systematische Fehler von

$$\sigma_{\text{stat}} = \sigma_{\text{syst, tot}} = 0,017 \text{ eV}^2 \quad (2.6)$$

³Die Sensitivität für die Observable m_ν^2 ist um einen Faktor 100 besser als die Vorgängerexperimente (vgl. Gl. (1.26) - (1.29)).

erwartet werden. Dabei wird von mehreren unabhängigen systematischen Fehlern ausgegangen, die quadratisch addiert werden und so $\sigma_{\text{sys, tot}}$ ergeben. Für die einzelnen Experimentparameter gelten besonders kleine Grenzen für die jeweiligen erlaubten Unsicherheiten. Für alle bisherigen Tritiumzerfallsexperimente galt, dass die Tritiumquelle

Tabelle 2.1: **Anforderungen an ausgewählte Parameter (nach [4]).**

Grund	Benötigte Genauigkeit
Beschreibung der Final States	$f < 1,01$
Kenntnis der Säulendichtevariationen	$\Delta\rho d/\rho d < 2 \cdot 10^{-3}$
\Updownarrow	\Updownarrow
Rate	$\Delta\Gamma/\Gamma < 2 \cdot 10^{-3}$
Temperatur	$\Delta T/T < 2 \cdot 10^{-3}$
Tritiumreinheit	$\Delta\epsilon_T/\epsilon_T < 2 \cdot 10^{-3}$
Einlassdruck	$\Delta p_{\text{inj}}/p_{\text{inj}} < 2 \cdot 10^{-3}$
Druck an Pumpen	$\Delta p_{\text{ex}}/p_{\text{ex}} < 0.06$
WGTS-Potentialunterschiede	$\Delta U < 10 \text{ mV}$
WGTS-Magnetfeld	$\Delta B_S/B_S < 2 \cdot 10^{-3}$

die systematischen Fehler bei der Bestimmung der Neutrinomasse dominierte. Deshalb werden an die Parameter der WGTS, die in Tab. 2.1 aufgezählt sind, strenge Anforderungen gestellt. Zentral ist hierbei, dass die Säulendichte, die die Anzahl der Tritiummoleküle in der Quelle und damit die Aktivität festlegt, nur um 0,2% schwanken darf [38]. Bei größeren nicht registrierten Schwankungen werden die systematischen Effekte auf die Neutrinomasse zu groß. Für alle physikalischen Größen, die die Säulendichte beeinflussen [39], gelten ähnlich strenge Anforderungen. Ein detailliertes Verständnis der einzelnen Quellparameter ist daher unbedingt nötig.

Um die genauen Einflüsse der Quellparameter auf die extrahierte Neutrinomasse zu untersuchen, wird ein detailliertes Quellmodell benötigt. Die bisher verfügbaren verschiedenen Modelle für die einzelnen Quellparameter sollen dabei im Rahmen dieser Arbeit erstmals vereint werden. Durch Variieren einzelner Quellparameter soll es dann möglich sein, die entsprechenden Effekte auf das integrierte Spektrum zu beobachten und mit geeigneten Analyseprogrammen die Effekte auf die Neutrinomassenanalyse zu bestimmen. Dabei sollen insbesondere Effekte wie eine nicht-isotherme Quelle oder radiale und azimutale Dichteunterschiede untersucht werden. Im Hinblick auf Simulationen des gesamten KATRIN Experiments von der Quelle bis zum Detektor ist die vorliegende Arbeit der erste Schritt, die Tritiumquelle in ihrer vollen Komplexität in solche Simulationen zu implementieren.

3. Modellierung und Implementierung der Quellparameter

Für die Neutrinomassenbestimmung mit KATRIN muss das Betaspektrum des Zerfalls von molekularem Tritium mit bisher unerreichter Präzision gemessen werden. Dafür ist eine genaue Kenntnis und dreidimensionale Beschreibung der Eigenschaften der Tritiumquelle notwendig. Eine Unterteilung der Quelle in einzelne kleine Volumenelemente V_i erlaubt eine differenzierte Berechnung von Einzelbetaspektren für jedes V_i mit den in V_i herrschenden physikalischen Quellparametern. Dies sind die ersten wichtigen Schritte für eine Gesamtsimulation des KATRIN Experiments.

Die Anforderungen an die Parameter des KATRIN Experiments wurden bereits in Kap. 2.7 diskutiert. Die dort aufgelisteten Werte wurden in früheren Berechnungen und Simulationen ermittelt, die als Ausgangspunkt dieser weiterführenden Arbeit in Kap. 3.1 noch einmal aufgegriffen werden.

Zur Berechnung der Quellspektren werden in Kap. 3.2 die notwendigen Modifikationen des Betaspektrums vorgestellt und in Kap. 3.3 die Quellparameter eingehend diskutiert. Dabei wird detailliert beschrieben, wie die einzelnen Konzepte in das für diese Arbeit entwickelte Programmpaket implementiert wurden.

Die 3D-Unterteilung der Quelle (Kap. 3.4) und die Antwortfunktion (Kap. 3.5) schließen diese Themenkapitel. Unter Berücksichtigung dieser Aspekte lässt sich das Quellspektrum und schließlich das integrierte Spektrum berechnen, das von KATRIN gemessen wird.

3.1 Status bisheriger Analysen und Ziele dieser Arbeit

Die bisher durchgeführten Analysen, die die Einflüsse der Quellparameter auf die integrierten Spektren untersuchten, beruhten auf Berechnungen bzw. Monte-Carlo-Simulationen, bei denen die WGTS als Gesamtsystem betrachtet wurde. Zur Beschreibung dienten vorwiegend integrale Größen, wie die Säulendichte ρd oder die mittleren Streuwahrscheinlichkeiten P_i von Elektronen der gesamten Quelle.

Die mittleren Streuwahrscheinlichkeiten P_i für i -fache Streuung hängen von der Säulendichte ρd und vom Quellmagnetfeld B_S ab (siehe Kap. 3.5.3). Berechnet wurden sie für die gesamte Quelle für $\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ und $B_S = 3,6 \text{ T}$ von J. Kaspar [46]:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0,413339 \\ P_1 &= 0,292658 \\ P_2 &= 0,167331 \\ P_3 &= 0,079129 \\ P_4 &= 0,031776. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese Berechnungen lassen jedoch keine differenzierten Analysen der verschiedenen Streuwahrscheinlichkeiten für Elektronen zu, die aus unterschiedlichen Bereichen der Quelle emittiert werden. So besitzen Elektronen, die im spektrometerabgewandten Teil der WGTS emittiert werden, eine höhere Wahrscheinlichkeit, gestreut zu werden, als Elektronen aus dem spektrometernahen Ende. Unter Hinzunahme des Magnetfeldprofils (Kap. 3.3.1) ergeben sich in unterschiedlichen V_i deutliche Abweichungen der Streuwahrscheinlichkeiten und damit auch der Beiträge zum gemessenen Spektrum der gesamten WGTS.

Das grundlegende Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Unterteilung der WGTS in kleine Volumina V_i und die detaillierte Beschreibung und Modellierung dieser V_i , damit die Effekte der räumlich nicht homogenen Quellparameter auf das integrierte Spektrum und damit die extrahierte Neutrinomasse m_ν detailliert untersucht werden können.

Im Rahmen dieser Arbeit soll die Grundlage für eine umfassende Modellierung der Quelle und für eine spätere Simulation des Gesamtexperiments gelegt werden. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Modellierung der WGTS, soll aber später mit erweiterten Simulationen der Transportstrecke und der Spektrometer verknüpft werden.

Dazu sind als Ausgangspunkt zunächst Berechnungen der Betaspektren einzelner Quellbereiche vorgesehen. Diesen Bereichen sollen die dort herrschenden physikalischen Größen zugeordnet und daraus der Beitrag zum Quellspektrum berechnet werden. An dieser Stelle soll bereits betont werden, dass es sich um **Berechnungen der Spektren** handelt. Es werden keine mikroskopischen Ein-Teilchen-Simulationen durchgeführt, d.h. keine Elektronen simuliert, deren Weg durch die WGTS verfolgt wird. Dies bleibt jedoch eine attraktive Möglichkeit für die Zukunft, indem z.B. die verwendeten Spektren als Eingangsverteilungen für die Startwertauswahl verwendet werden.

Mit einer Unterteilung der Quelle in einzelne Segmente können weiterführende Untersuchungen zusätzlicher heute aber schwer abschätzbarer Inhomogenitäten durchgeführt werden. Insbesondere kann die Fragestellung untersucht werden, welchen Einfluss ein inhomogenes bzw. nicht stationäres Temperaturprofil besitzt. Weitere systematische Untersuchungen umfassen die Variation der Geschwindigkeit der Tritiummoleküle in der WGTS. Das Fernziel hier ist eine Berücksichtigung der ortsabhängigen Dopplerverbreiterung.

Außerdem sollen vorhandene Konzepte erweitert werden, speziell die Berücksichtigung einer neuen verbesserten Beschreibung der Final State Distribution (FSD), die umfassender ist als die bisher verwendeten Berechnungen aus [47]. In einigen vereinfachten Simulationen wurde nur ein Endzustand mit einer Energie von $E_f = 1,7 \text{ eV}$ angenommen, gegebenenfalls mit einer nachträglich eingeführten Energieverschmierung um die Breite der FSD $\sigma_{\text{FSD}} \approx 0,3 \text{ eV}$. Mit einer neuen, genaueren FSD lassen sich bei der Berechnung des integrierten Spektrums nicht vernachlässigbare Unterschiede im Vergleich zur vereinfachten Beschreibung der Endzustände erkennen (siehe Kap. 4.3).

3.2 Modifikationen des differentiellen Betaspektrums

Die Berechnung des differentiellen Betaspektrums wurde auf der Basis der Fermi-Theorie entsprechend Gl. (1.20) implementiert. Zur exakten Beschreibung des Spektrums in der Endpunktregion, in der die Sensitivität auf die Neutrinomasse am größten

ist, müssen einige zerfallsspezifische Korrekturen, aber auch experimentelle Effekte berücksichtigt werden. Dies sind von theoretischer Seite die Strahlungskorrekturen (siehe Kap. 3.2.1) und die Implementierung der Final State Distribution (3.2.3). Experimentell spielen die Tritiumreinheit (3.2.2) der Quelle und die Dopplerverbreiterung (3.2.4) des Spektrums eine hervorgehobene Rolle. Die beiden letzten Punkte sind als Eigenschaften der Quelle von essentieller Bedeutung für das differentielle Betaspektrum.

3.2.1 Strahlungskorrekturen

Bei der Beschreibung des Betazerfalls lassen sich Terme für Strahlungskorrekturen aufstellen, die den Einfluss der Emission von virtuellen und reellen Photonen auf die Energie des Betaelektrons beschreiben. Bei der Berechnung des Spektrums taucht diese Korrektur als zusätzlicher energieabhängiger Faktor in Gl. (1.20) auf.

Für diese Arbeit wurden die Berechnungen von W.W. Repko und C. Wu [48] verwendet, die im Folgenden schon für den Tritiumbetazerfall angepasst wurden:

$$f_{\text{rad}}(E) = (W - \epsilon)^{(2\alpha/\pi)t(\beta)} \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ t(\beta) \left[\ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{(W - \epsilon)}{\epsilon} \right] + \frac{1}{4} [t(\beta) + 1] \left[2(1 + \beta^2) + 2 \ln(1 - \beta) + \frac{(W - \epsilon)^2}{6\epsilon^2} \right] - 2 + \frac{1}{2}\beta - \frac{17}{36}\beta^2 + \frac{5}{6}\beta^3 \right\} \right] \quad (3.2)$$

$$\text{mit: } W = \frac{E_0 + m_e c^2}{m_e c^2} \quad (3.3)$$

$$\epsilon = \frac{E + m_e c^2}{m_e c^2} \quad (3.4)$$

$$\beta = \frac{pc}{E + m_e c^2} \quad (3.5)$$

$$t(\beta) = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)} \quad (3.6)$$

In Abb. 3.1 ist der Verlauf des Korrekturfaktors $f_{\text{rad}}(E)$ für einen Bereich von wenigen eV unterhalb der Endpunktsenergie E_0 exemplarisch dargestellt.

3.2.2 Tritiumreinheit

Die Reinheit des verwendeten Tritiums ist ein wichtiger Parameter der Quelle, der sowohl das differentielle Spektrum beeinflusst als auch die Aktivität der Tritiumquelle bestimmt. Das integrierte Spektrum in Gl. (2.3) skaliert mit der Anzahl der Tritiummoleküle N_{tot} in der Quelle. Zu jedem Zeitpunkt muss daher bekannt sein, wie viele Tritiummoleküle sich in der Quelle befinden. Das setzt bei bekannter Säulendichte der Quelle (siehe Kap. 3.3.4) auch die Kenntnis der Tritiumreinheit voraus. Das Tritiumlabor Karlsruhe TLK stellt das hochreine molekulare Tritium bereit und garantiert eine Reinheit von $\varepsilon_{\text{Trit}} > 0,95$. Dieser Wert ergibt sich aus der Anzahl der Tritiumkerne

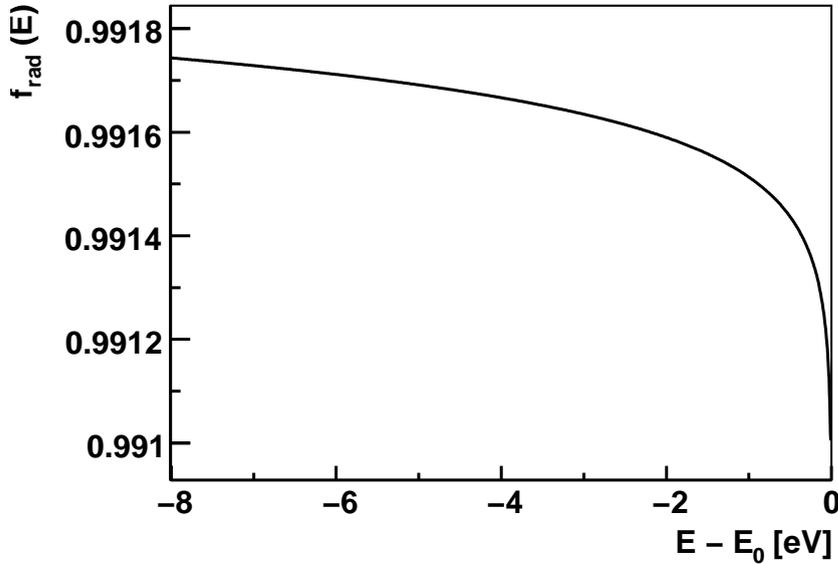


Abbildung 3.1: **Strahlungskorrekturfaktor f_{rad} für den Tritiumbetazerfall nahe des Endpunkts.** Betazerfallsprozesse mit Photonpropagation sind energieabhängig, die Rate wird bei geringen Energien um ca. 0,8% reduziert. Im letzten eV vor dem Endpunkt ist der Einfluss besonders ausgeprägt, die Rate wird hier stärker unterdrückt.

mit einem minimalen Verhältnis von 90% T₂-Molekülen zu 10% DT-Molekülen. Alle anderen Bestandteile des Gemischs werden in Reinigungsprozessen vor der Injektion in das Strahlrohr bis auf vernachlässigbare Anteile entfernt. Die genaue Zusammensetzung des Gasgemisches wird mit Hilfe von Laser-Raman-Spektroskopie ermittelt (vgl. Kap. 2.6).

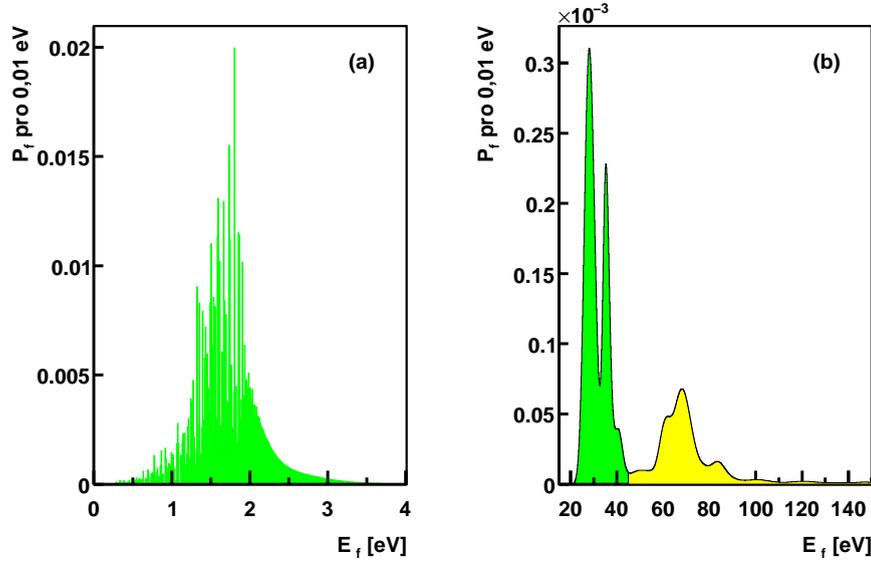
Der Einfluss der Tritiumreinheit auf das differentielle Betaspektrum ergibt sich aus den unterschiedlichen Final State Distributions, die für die Tochtermoleküle des T₂- und des DT-Zerfalls gelten.

3.2.3 Final State Distribution

Der Zerfall von gasförmigem molekularem Tritium unterscheidet sich vom Zerfall atomaren Tritiums dadurch, dass ein Tochtermolekül ³HeT⁺ entsteht.



Ein zweiatomiges Molekül wie ³HeT⁺ besitzt sowohl elektronische Anregungszustände wie auch Rotations- und Vibrationsanregungen. Ein gewisser Teil der Zerfallsenergie bleibt daher beim Tochtermolekül zurück und steht damit nicht der kinetischen Energie des Elektrons oder des Neutrinos zur Verfügung. Die Energie E_f solcher Rotations-, Vibrations- und elektronischer Anregungszustände sowie die Wahrscheinlichkeiten P_f , dass der entsprechende Endzustand auftritt, lassen sich für ³HeT⁺ mit sehr großer



Abbildungung 3.2: **Final State Distribution von ${}^3\text{HeT}^+$ a) in den ersten 4 eV und b) zwischen 20 und 150 eV.** Aufgetragen sind die Wahrscheinlichkeiten P_f für die verschiedenen Rotations- und Vibrationszustände im elektronischen Grundzustand (0 bis 4 eV) und elektronischen Anregungszuständen (ab 20 eV) von ${}^3\text{HeT}^+$ über deren Energie E_f . In 57% der Fälle befindet sich das Tochtermolekül im Grundzustand, im Mittel verbleiben $\langle E_f \rangle = 1,7$ eV bei ihm. Die Berechnungen von N. Doss wurden bis 240 eV durchgeführt, wobei die Wahrscheinlichkeit für die letzten 100 eV sehr gering ist. Es ist erkennbar, dass bei jedem Zerfall Energie beim Tochtermolekül verbleibt.

Genauigkeit berechnen [49, 50] und liefern die Final State Distribution (FSD) in Abb. 3.2.

Die Beschreibung des Betaspektrums aus Gl. (1.20) inklusive der Strahlungskorrektur $f_{\text{rad}}(E)$ aus Gl. (3.2) erweitert sich nun um eine Summe über alle möglichen Endzustände gewichtet mit ihrer Wahrscheinlichkeit P_f :

$$\frac{dN}{dE} = C \cdot F(Z, E) \cdot p \cdot (E + m_e c^2) \cdot f_{\text{rad}}(E) \cdot \sum_f [P_f \cdot (E_0 - E_f - E) \cdot \sqrt{(E_0 - E_f - E)^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot \Theta(E_0 - E_f - E - m_\nu c^2)]. \quad (3.8)$$

Aus der Final State Distribution von ${}^3\text{HeT}^+$ in Abb. 3.2 wird ersichtlich, dass auf ein Tochtermolekül im elektronischen Grundzustand im Mittel $\langle E_f \rangle = 1,7$ eV übertragen werden. Die Final State Distribution muss damit auf jeden Fall für die Neutrinomassenanalyse berücksichtigt werden. Ein Vergleich der Spektren mit bzw. ohne berücksichtigte Final State Distribution ist im Kap. 4.3 gezeigt.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das ${}^3\text{HeT}^+$ -Molekül bei der Emission des Elektrons auch eine Rückstoßenergie

$$E_{\text{rec}} = \frac{p_{\text{rec}}^2}{2M_{\text{HeT}}} = \frac{p_e^2}{2M_{\text{HeT}}} = E \frac{m_e}{M_{\text{HeT}}} + \frac{E^2}{2M_{\text{HeT}}} \approx E \frac{m_e}{M_{\text{HeT}}} \quad (3.9)$$

behält, die von der Energie E des Elektrons abhängt. Am Endpunkt beträgt $E_{\text{rec}} = 1,7 \text{ eV}$ und ist für das Intervall 50 eV unterhalb des Endpunkts nahezu konstant. Die Rückstoßenergie, die nicht mit der mittleren Energie $\langle E_f \rangle = 1,7 \text{ eV}$ der Final State Distribution verwechselt werden darf, fehlt dem Elektron generell und resultiert daher in einem niedrigeren messbaren Endpunkt des Spektrums (nach [4]).

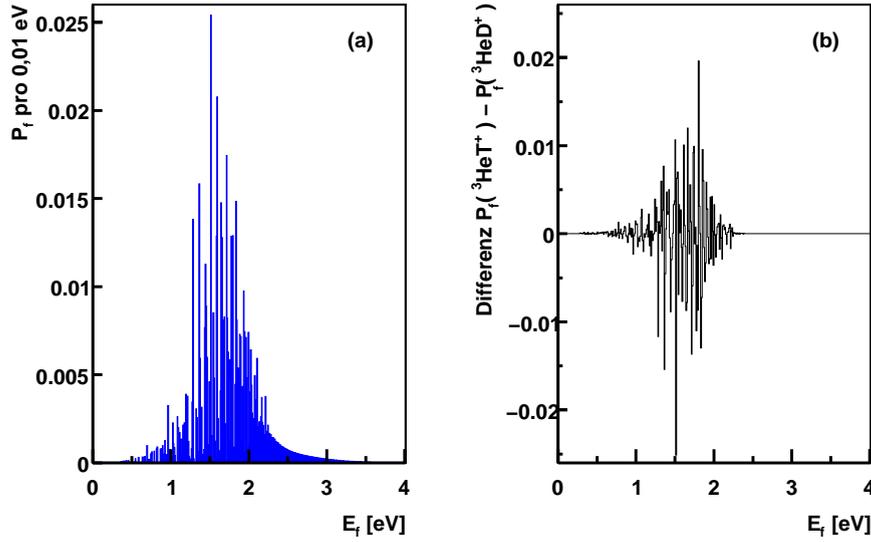


Abbildung 3.3: a) Final State Distribution von ${}^3\text{HeD}^+$ für den elektronischen Grundzustand des Tochtermoleküls und b) Differenz der FSD von ${}^3\text{HeT}^+$ und ${}^3\text{HeD}^+$. Dabei wurde Abb. 3.2a verwendet.

Die vollständige Implementierung der Final State Distribution erfordert noch, dass zwischen dem Zerfall von T_2 und DT unterschieden wird:



Aufgrund der unterschiedlichen Massen der Tochtermoleküle besitzen diese unterschiedliche Rotations- und Vibrationszustände und damit unterschiedliche Final State Distributions. In der WGTS liegt wie oben dargestellt hauptsächlich eine Mischung von T_2 und DT vor. Unter Kenntnis der aktuellen Tritiumreinheit (siehe Kap. 3.2.2) lässt sich eine effektive Final State Distribution bestimmen, die aus den gewichteten Summen der FSD von T_2 und DT gebildet wird (siehe Abb. 3.4). Je nach Mischungsverhältnis ist das in dieser Arbeit entwickelte Softwarepaket in der Lage, die Verteilung neu zu gewichten, so dass eine genaue Untersuchung des Einflusses der Tritiumreinheit auf das Spektrum möglich ist.

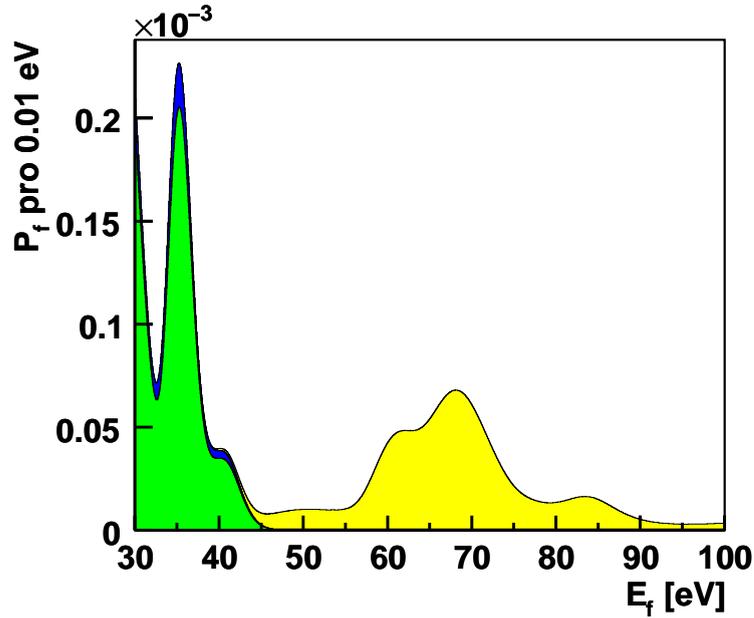


Abbildung 3.4: **Final State Distribution für eine Mischung von 90% T₂ und 10% DT.** Gezeigt ist nur der Bereich zwischen 30 und 100 eV. Überlagert werden die Verteilungen für ³HeT⁺ (grün) und ³HeD⁺ (blau) unterhalb von 40 eV, gewichtet mit dem Anteil der Gaskomponente. Für höhere Energien liegen nur Berechnungen für ³HeT⁺ vor, weshalb dessen FSD (gelb) dort mit 100% Gewichtung verwendet wird.

3.2.4 Dopplerverbreiterung

Die WGTS wird bei einer Temperatur von 30 K betrieben, um die stochastische Bewegung der Tritiummoleküle möglichst gering zu halten. Noch niedrigere Temperaturen sind nicht sinnvoll, da sich dann Tritiumcluster bilden, die ein anderes Betaspektrum besitzen, oder Tritium an den Strahlrohrwänden anfrieren könnte. Trotz der niedrigen Temperatur besitzen die Moleküle eine ungeordnete mittlere thermische Geschwindigkeit von ca. 300 m/s und eine zusätzliche gerichtete Nettogeschwindigkeit von bis zu 50 m/s aufgrund der Tritiumzirkulation vom Tritiumeinlass zu den Pumpen (siehe Kap. 3.3.3). Eine für diese Betrachtungen zulässige nicht-relativistische Geschwindigkeitsaddition von emittiertem Elektron und sich bewegendem Tritiummolekül führt zu einer Elektronenenergie E' im Laborsystem und damit einer Energieänderung ΔE

$$E' = \frac{1}{2}m_e(\vec{v}_e + \vec{v}_{T_2})^2 \quad (3.12)$$

$$\Delta E = E' - E = m_e|\vec{v}_e| \cdot |\vec{v}_{T_2}| \cdot \cos \vartheta + \frac{1}{2}m_e\vec{v}_{T_2}^2 \quad (3.13)$$

mit dem Winkel ϑ zwischen Molekülflugrichtung und Emissionsrichtung des Elektrons. Der zweite Term ist mit 10^{-6} eV bei den tiefen Temperaturen in der Quelle vernachlässigbar. Der vordere Term mit der Geschwindigkeit des Elektrons führt zu Energieverschiebungen, die für die Neutrinomassenbestimmung relevant sind. Als Beispiel ergibt sich für ein Tritiummolekül, das bei $T = 30$ K mit wahrscheinlichster Geschwindigkeit $|\vec{v}_{T_2}| = 288$ m/s genau auf das Spektrometer zufliegt und in Flugrichtung ein Endpunktelektron emittiert, eine Energiezunahme für das Elektron von

$$\Delta E \approx 130 \text{ meV}. \quad (3.14)$$

Da diese Verschiebung nahezu linear mit der Molekülgeschwindigkeit variiert, die für ein Ensemble einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgt, kann die Verschiebung noch höher ausfallen. Abb. 3.5 zeigt, wie sich der Dopplereffekt auf das differentielle Spektrum auswirkt.

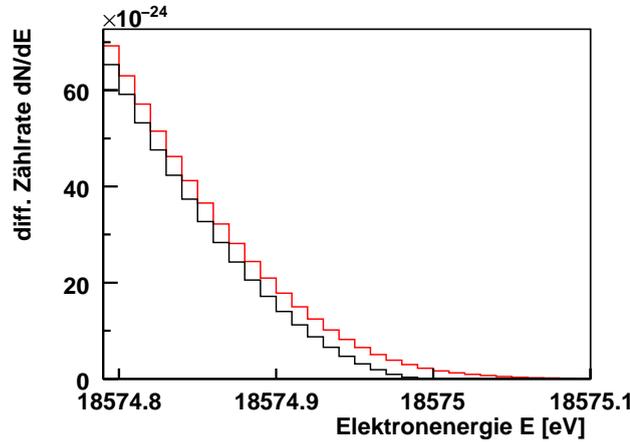


Abbildung 3.5: **Dopplerverbreiterung des differentiellen Betaspektrums von T_2 .** Zum einen ergeben sich modifizierte Zählraten, zum anderen besitzen einige Elektronen Energien oberhalb des eigentlichen Endpunkts ($E_0 = 18575$ eV). Zur Erstellung dieser Abbildung wurde jedes Energieintervall des differentiellen Spektrums mit der Gesamtheit der auftretenden Tritiumgeschwindigkeitsvektoren gefaltet. Die Geschwindigkeiten folgen hier exemplarisch der Verteilungsfunktion, die für die WGTS bei der Position $z = +0,5$ m, $r = 1,8$ cm aus der Überlagerung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit der Nettodiffusionsgeschwindigkeit in z -Richtung erwartet wird (siehe Kap. 3.3.3).

Eine korrekte Beschreibung der Dopplerverbreiterung muss berücksichtigen, dass die Temperatur in der WGTS durch ein Temperaturprofil gegeben ist (siehe Kap. 3.3.2) und damit die Moleküle unterschiedlichen Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen folgen, die in Kap. 3.3.3 detailliert beschrieben werden.

Im für diese Arbeit entwickelten Softwarepaket wurden die prinzipiellen Funktionen zu einer vollständigen Berücksichtigung der Dopplerverbreiterung implementiert. Für jede Position in der WGTS lässt sich das Geschwindigkeitsprofil berechnen und danach das differentielle Spektrum bestimmen. Der Rechenaufwand für eine derartige vollständige Beschreibung der Dopplerverbreiterung ist momentan noch sehr hoch und erfordert verbesserte Computing-Infrastrukturen. Bei allen folgenden Berechnungen wird die Dopplerverbreiterung daher noch vernachlässigt, soweit nicht explizit erwähnt.

3.3 Parameter der Quelle

Zur Beschreibung des Energiespektrums der Betazerfallselektronen aus der WGTS müssen alle Quellparameter genau bekannt sein. Über die inneren 10 m des Strahlrohrs ist es technisch herausfordernd, an jeder Stelle nahezu identische Bedingungen zu erreichen. Auch zeitliche Veränderungen von Parametern sind zu berücksichtigen, da jederzeit bekannt sein muss, wie die Quelle zu einem bestimmten Messzeitpunkt charakterisiert werden kann. Im Folgenden werden die Quellparameter und deren Implementierung in das Programm diskutiert.

3.3.1 Magnetfeld

Die Kenntnis der Magnetfeldstärke B_S in der Quelle ist im Zusammenhang mit der Magnetfeldkonfiguration des gesamten Experiments wichtig, da dies bei einem MAC-E-Filter entscheidenden Einfluss auf die Messungen hat. Der magnetische Fluss Schlauch, definiert durch Gl. (2.2), wird in der Quelle durch das im Vergleich zur Analysierebene stärkere Magnetfeld auf eine kleinere Fläche zusammengezogen. Die lokale Magnetfeldstärke legt die Größe des Fluss Schlauchs fest, bestimmt bei gegebenem Dichteprofil, wie viele Tritiummoleküle sich im Fluss Schlauch befinden, und damit die Anzahl der Elektronen, die auf den Detektor abgebildet werden.

Eingeschränkt wird die Anzahl der am Detektor ankommenden Elektronen zum einen durch das angelegte Spektrometerpotential, das die niederenergetischen Elektronen reflektiert. Zum anderen ist der maximale Öffnungswinkel θ_{\max} zu beachten, gegeben durch

$$\theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{B_S}{B_{\max}}\right) \approx 50,7^\circ \quad (3.15)$$

mit dem maximalen Magnetfeld des gesamten Experiments $B_{\max} = 6,0$ T. Elektronen, die unter einem Winkel größer als θ_{\max} emittiert werden, werden durch den magnetischen Spiegeleffekt reflektiert und erreichen den Detektor nicht. Berücksichtigt werden müssen daher nur Elektronen mit Emissionswinkeln $\theta < \theta_{\max}$. Je kleiner der Öffnungswinkel θ ist, desto geringer ist die Zyklotronbewegung der Elektronen. Dies führt zu einer kürzeren Weglänge in der WGTS und somit auch zu geringeren Streuwahrscheinlichkeiten. Dieser Zusammenhang wirkt sich bei der Berechnung der Streuwahrscheinlichkeiten (siehe Kap. 3.5.3) für einzelne Bereiche der Quelle aus.

Die 21 supraleitenden Spulen, die das Magnetfeld in der Quelle erzeugen, erzeugen kein völlig homogenes Magnetfeld (siehe Abb. 3.6). An den Pumpstutzen der differentiellen Pumpstrecken befinden sich keine Spulen und das Magnetfeld fällt hier auf wenige

100 mT ab. Aber auch zwischen den drei langen Spulen M1, M2 und M3 in den inneren 10 m des Strahlrohrs gibt es an den Übergängen trotz kleiner Kompensationsspulen einen Abfall des Felds um ca. 2%. Elektronen aus diesen Bereichen der Quelle besitzen einen kleineren maximalen Öffnungswinkel, wodurch sich für diese Elektronen im Mittel geringere Weglängen ergeben und damit die mittleren Streuwahrscheinlichkeiten reduziert sind.

Ein Magnetfeldprofil der Quelle wie in Abb. 3.6 dargestellt ermöglicht es dann die oben genannten Effekte orts aufgelöst für die gesamte WGTS zu bestimmen. Zur Berechnung des Magnetfeldes wird das Programmpaket `magfield3` von F. Glück [51] verwendet, das alle beim KATRIN Experiment verwendeten supraleitenden Solenoide und ihre Geometrie berücksichtigt.

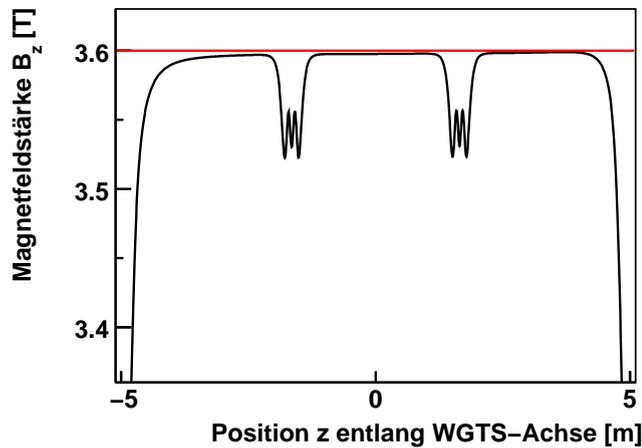


Abbildung 3.6: **Magnetfeldstärke in der WGTS.** Für die inneren 10 m ist die axial-symmetrische z -Komponente des Magnetfelds aufgetragen. Gut erkennbar ist der starke Abfall des Felds an den Pumpstutzen bei -5 und $+5$ m und der 2%-Effekt zwischen den drei inneren Magneten M1, M2 und M3. Die horizontale Linie entspricht einem Referenz-Magnetfeld mit $B_S = 3.6$ T, das für vergleichende Berechnungen mit konstantem Magnetfeld verwendet wird.

3.3.2 Temperaturprofil

Wie oben (Kap. 3.2.4) beschrieben beeinflusst die Temperatur der WGTS und damit die Geschwindigkeit der Tritiummoleküle über die Dopplerverbreiterung die Messung. Darüber hinaus ist bei der Modellierung der WGTS zu beachten, dass die Dichteverteilung (Kap. 3.3.4) in der Quelle direkt an die Temperatur des Strahlrohrs gekoppelt ist.

Während des Experiments werden zahlreiche kalibrierte Temperatursensoren (Dampfdruckthermometer, PT100 und PT500 Sensoren), die über die inneren 10 m der WGTS verteilt angeordnet sind, eine präzise Messung der Temperatur direkt an der Strahlrohrwand ermöglichen. Im Rahmen von Vorüberlegungen lässt sich ein erwartetes Temperaturprofil für die Quelle annehmen:

longitudinales Temperaturprofil

Die Stabilisierung und langfristige Aufrechterhaltung einer konstanten Temperatur $T_0 = 30\text{ K}$ auf einer Länge von 10 m ist technisch herausfordernd. Das zur Kühlung der WGTS entwickelte Kühlsystem mit den Zwei-Phasen-Neon-Rohren (siehe Kap. 2.2) soll dies erreichen. Als Designkriterium ist eine Abweichung $\Delta T = 30\text{ mK}$ bei $z = 4,75\text{ m}$ erlaubt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Kühlung durch Störeffekte beeinflusst werden kann, speziell durch Wärmeeinträge von außen. Durch die Abschirmung der WGTS mit dem inneren Schild und der Aufhängung des Strahlrohrs an dünnen Drähten verbleibt nur Wärmestrahlung durch die Pumpstutzen als dominanter Wärmeeintrag (Abb. 3.7a). Die Strahlung wird die Wand der WGTS erwärmen und damit ein longitudinales Temperaturprofil erzeugen. Laut [52] ist der Wärmeeintrag $\dot{q}_{\text{rad}}(z')$ auf die Strahlrohrwand proportional zur Ableitung des „Viewfactors“ $F_{12}(z')$ mit dem Abstand z' vom Ende der WGTS

$$F_{12}(z') = -\frac{1}{2} \left(\frac{z'}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{4 \left(\frac{z'}{r} \right)^2 + \left(\frac{z'}{r} \right)^4} \quad (3.16)$$

$$\dot{q}_{\text{rad}}(z') \propto \frac{d}{dz} F_{12}(z') = -\frac{z'}{r^2} + \frac{z'}{r^2} \left(2 + \left(\frac{z'}{r} \right)^2 \right) \frac{1}{\sqrt{4 \left(\frac{z'}{r} \right)^2 + \left(\frac{z'}{r} \right)^4}} \quad (3.17)$$

Der Wärmeeintrag wurde bei $z' = 0,25\text{ m}$ auf $0,1\text{ W/m}^2$ skaliert. Eine Integration über eine Rohrhälfte (0 bis 5m) liefert als Gesamtwärmeeintrag $Q_{\text{tot}} = 0,25\text{ W}$.

Für die Berechnungen in [53], deren Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit verwendet wurden, wurde das Temperaturprofil in Abb. 3.7b

$$T(z) = T_0 + \frac{\Delta T}{35} \left[\left(\frac{6}{6-z} \right)^2 - 1 \right], \quad -5 \leq z \leq 5 \quad (3.18)$$

angenommen. Dies kann in zukünftigen Berechnungen an die Überlegungen mit dem Wärmeeintrag angepasst werden. Außerdem wird der Demonstrator, ein Vorexperiment der WGTS, im Herbst 2009 mit dem Strahlrohr, den Originalkomponenten des Neon-Kühlsystem und einer 4K Kaltmasse anstelle der Magnete die Funktion und Stabilität dieses Kühlprinzips testen und gleichzeitig das Temperaturprofil messen.

radiales und azimutales Temperaturprofil

Am Strahlrohr sind auch radiale und azimutale Unterschiede der Temperatur zu erwarten. Die Zwei-Phasen-Neon-Rohre sind beidseitig horizontal an der Strahlrohr längsachse

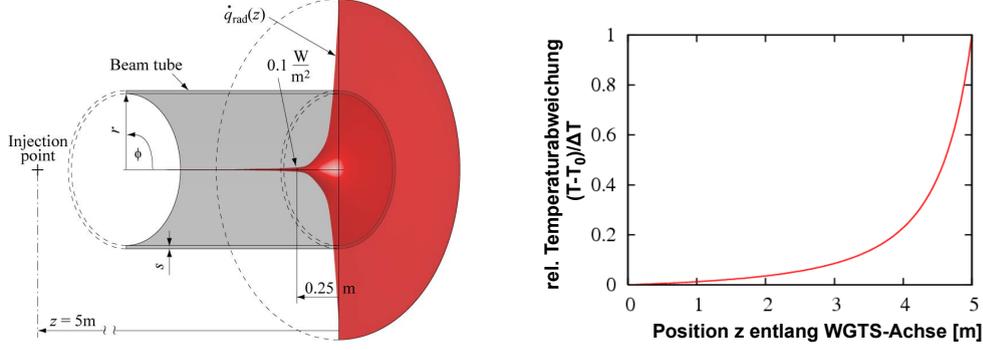


Abbildung 3.7: (a) **Wärmestrahlung in die WGTS nach [52]**. Nahe den Pumpen ist die Wärmeeinstrahlung größer als im Zentrum der WGTS. (b) **angenommenes Temperaturprofil [53]**. Für die Berechnungen der Einflüsse eines Temperaturgradienten auf die Dichteverteilung wurde dieses exemplarische Temperaturprofil verwendet.

angelötet, was zu einem Temperaturgradienten in vertikaler Richtung führt. Unter Einführung des Azimutwinkels φ^1 lässt sich die Temperaturverteilung der Wand T_W mit einer maximalen Abweichung in vertikaler Richtung ΔT

$$T_W(\varphi) = T_0 + \Delta T \cdot \sin^2 \varphi \quad (3.19)$$

parametrisieren. Die Ergebnisse von numerischen Berechnungen [53], die losgelöst von einer longitudinalen Bewegung der Moleküle berechnet wurden, sind in Abb. 3.8 gezeigt. Der hierbei eingeführte Verdünnungsfaktor δ ist gegeben durch das Verhältnis einer charakteristischen Systemgröße, hier dem Strahlrohrradius R , und a von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge der Moleküle:

$$\delta(z) = \frac{R}{a} = \frac{R \cdot P(z)}{\mu_0 \cdot v_0}. \quad (3.20)$$

Die Berechnungen sind für beliebige ΔT durchgeführt worden und lassen sich somit mit dem longitudinalen Temperaturprofil verknüpfen. Der Wärmeeintrag lässt sich für eine bestimmte Position z in der Quelle in ΔT umrechnen. Dafür lassen sich dann die radialen und azimutalen Temperaturverteilungen verwenden.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programm ist zum jetzigen Zeitpunkt in der Lage, ein solches 3D-Temperaturprofil zu verwenden, wenn die Werte aus Abb. 3.8 an ausreichend vielen Koordinaten z berechnet wurden.

¹ $\varphi = 0$ bzw. π für die Temperatur direkt am Kühlrohr, $\varphi = \pi/2$ ($\varphi = 3\pi/2$) für die Temperatur am Strahlrohr oben (unten).

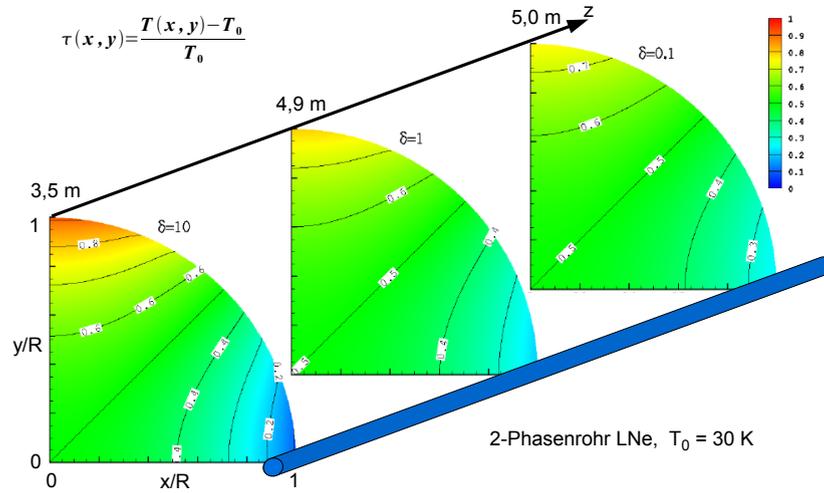


Abbildung 3.8: **Modell des radialen und azimuthalen Temperaturprofils der WGTS [53]**. Für drei verschiedene Positionen z in der WGTS ist die Abweichung der Temperatur an der Stelle (x,y) von der nominellen Temperatur des Zwei-Phasenrohrs in dimensionslosen Koordinaten dargestellt. Es ist immer nur ein Viertel des Strahlrohrquerschnitts gezeigt. Rechts ist das Zwei-Phasenrohr angedeutet. Der Verdünnungsfaktor δ in Gl. (3.20) verdeutlicht die Komplexität solcher Berechnungen: Bei großem δ werden die Gleichungen aus der Hydrodynamik verwendet. Bei den geringen Dichten am Ende der WGTS, beschrieben durch $\delta \ll 1$, muss man die Effekte der molekularen Strömung beachten. Auch die Auswirkungen auf die Temperaturunterschiede werden dadurch verständlich. In der Mitte der WGTS nimmt das Gas durch die große Dichte und die vielen Stöße die Temperatur der Wand an, oben ist der Temperaturunterschied daher genau ΔT . Je weiter man sich jedoch den Pumpen nähert, desto geringer wird die Dichte und damit auch die Wechselwirkung der Moleküle mit der Wand. Die Temperaturunterschiede sind hier - wenn auch nur geringfügig - kleiner.

3.3.3 Geschwindigkeitsprofil der Tritiummoleküle

Die Temperatur eines Gases definiert entsprechend den thermodynamischen Gegebenheiten das Geschwindigkeitsprofil der Moleküle. In einem abgeschlossenen System folgen die Geschwindigkeiten einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung, die hier in Zylinderkoordinaten r, ϕ, z mit der lokalen Teilchendichte $\rho(z)$ und der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit v_0 angegeben ist:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\rho(z)}{(\sqrt{\pi}v_0)^3} \exp \left[-\frac{v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2}{v_0^2} \right]. \quad (3.21)$$

Die Integration über ein Raumelement $d\vec{r}$ und ein Geschwindigkeitsintervall $d\vec{v}$ liefert die Anzahl der Moleküle, die sich dort mit den korrespondierenden Geschwindigkeiten bewegen. Der Tritiumfluss in der WGTS, der durch die ständige Tritiuminjektion und

das Abpumpen entsteht, modifiziert jedoch die Molekülgeschwindigkeiten. In Bericht [53] wird auf Basis der „linearized kinetic equation“, also einer linearisierten Boltzmannfunktion, die Geschwindigkeitsverteilung angegeben als

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\rho(z)}{(\sqrt{\pi}v_0)^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) \left[1 + 2\xi_p(z) \frac{v_z}{v_0} \Phi(x, y, v_x, v_y)\right] \quad (3.22)$$

mit dem Dichtegradienten $\xi_p(z)$

$$\xi_p(z) = \frac{R}{P(z)} \frac{dP(z)}{dz} \quad (3.23)$$

mit dem WGTS-Radius R und dem Druck $P(z)$. $\Phi(x, y, v_x, v_y)$ definiert den Störterm, der aus dem Temperaturprofil und den Dichtedifferenzen berechnet werden soll. In diesem Fall lässt sich bei bekanntem Dichteprofil die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion numerisch berechnen.

Einfacher ist hingegen eine Approximation durch eine lokale Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(\vec{r}, \vec{v}) \approx \frac{\rho(z)}{(\sqrt{\pi}v_0)^3} \exp\left[-\frac{v_r^2 + v_\phi^2 + (v_z - U_z)^2}{v_0^2}\right], \quad (3.24)$$

in der die Geschwindigkeit U_z die Nettobewegung der Teilchen vom Tritiumeinlass zu den Pumpen hin berücksichtigt. Dabei zeigt ein Vergleich, dass die Näherung durch lokale Boltzmann-Funktionen die numerisch berechnete Verteilungsfunktion für $z=0$ bis 4,5 m gut beschreibt und nur an den Enden des Strahlrohrs stellenweise um mehr als 6% abweicht [53].

Für das Geschwindigkeitsprofil reduziert sich der Aufwand dann von sehr aufwendigen Lösungsverfahren der Boltzmann-Gleichung auf die Bestimmung von U_z . Diese Größe hängt, wie in Abb. 3.9 zu sehen ist, von der Position z sowie vom Radius r in der Quelle ab. Parametrisieren lässt sich der Verlauf von U_z durch

$$U_z(z, r, \delta) = -v_0 \xi_p(z) \left[a(\delta) - c(\delta) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (3.25)$$

mit den zuvor definierten Größen und den zwei Koeffizienten a und c , die nur vom Verdünnungsparameter δ (siehe Gl. 3.20) abhängen. Deshalb müssen sie nur einmal berechnet werden und sind dann durch Interpolationsfunktionen verfügbar

$$a(\delta) = \left[0,894 - 0,1048\delta \left(1 - \frac{\ln \delta}{4}\right) \right] \frac{1 + \delta}{1 + 1,963\delta} + \frac{\delta(\delta + 2,036)}{2,593 + 4\delta}, \quad (3.26)$$

$$c(\delta) = \left[0,295 - 0,0536\delta \left(1 - \frac{\ln \delta}{4}\right) \right] \frac{1 + \delta}{1 + 0,7599\delta} + \frac{\delta^2}{0,07788 + 4\delta}. \quad (3.27)$$

Das für diese Arbeit verwendete Profil der Nettogeswindigkeiten ist ebenfalls durch numerische Rechnungen erstellt worden, kann aber auch analytisch beschrieben werden [54].

Für die vollständige Beschreibung der Geschwindigkeitsverteilung am Ort (z, r) lassen sich die einzelnen Schritte wie folgt zusammenfassen:

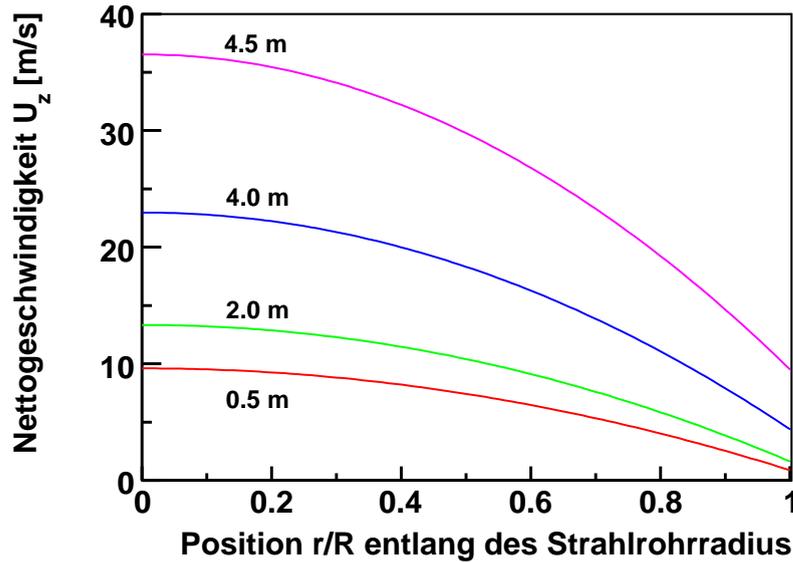


Abbildung 3.9: **Profil der Nettogeschwindigkeiten.** Für verschiedene Abstände von der Mitte der WGTS (von unten nach oben $z = 0,5/2,0/4,0/4,5$ m) ist die radiale Abhängigkeit der Nettogeschwindigkeit U_z der Tritiummoleküle in der WGTS dargestellt. Auf der Strahlachse ist U_z größer als in der Nähe der Strahlrohrwand. Je weiter sich die Moleküle von der Injektion zu den Pumpen bewegen, desto größer ist ihre Nettogeschwindigkeit und ihr Gradient entlang des Radius.

1. Die Dichte $\rho(z)$ und der Druckgradient $\xi_p(z)$ werden durch Interpolationen in Gl. (3.28) und Gl. (3.29) berechnet.
2. Der Verdünnungsparameter an gewünschter Position wird über $\delta(z) = \delta_{\text{in}} \cdot \rho(z) / \rho_{\text{in}}$ berechnet.
3. Die Koeffizienten $a(\delta)$ und $c(\delta)$ werden aus Gl. (3.26) und Gl. (3.27) bestimmt.
4. Aus Gl. (3.25) ergibt sich die Nettogeschwindigkeit $U_z(z, r)$ der Moleküle.
5. Die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion kann dann mit Gl. (3.24) berechnet werden.

Mit Kenntnis der ortsabhängigen Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten ist letztlich die Dopplerverbreiterung wie in Kap. 3.2.4 beschrieben berechenbar.

Einschränkend muss gesagt werden, dass für diese Berechnungen keine Randeﬀekte berücksichtigt wurden, also das Modell am Tritiumeinlass und an den Pumpen nicht anwendbar ist. Beim ersten Pumpstutzen, also nach 5 m Flugstrecke der T_2 -Moleküle in der WGTS, wurde in den Berechnungen des Geschwindigkeits- und auch des Dichteproﬂs (Kap. 3.3.4) $p_{\text{ex}} = 0$ angenommen. Erwartet wird jedoch ein Auslassdruck p_{ex} im Intervall $0,036p_{\text{in}} < p_{\text{ex}} < 0,05p_{\text{in}}$ [4]. Dies modiﬂiziert die Proﬂe nur in geringem Umfang und wird für die zukünftigen Berechnungen berücksichtigt. Komplexer werden die Betrachtungen, wenn man davon ausgeht, dass an den Pumpstutzen Tritiummoleküle zurückgestreut werden. Der Auslassdruck $p_{\text{ex}} \approx 0,05$ ergibt sich dann durch die Überlagerung ausströmender und zurückgestreuter Moleküle. Zum genauen Verständnis dieser Vorgänge sind Monte Carlo Simulationen notwendig, bei denen einzelne Moleküle ohne Wechselwirkung mit anderen Molekülen und deren Streuung an den Pumpstutzen simuliert werden [55].

3.3.4 Dichteproﬂ der Tritiummoleküle

Zur Durchführung des KATRIN Experiments muss die Säulendichte ρd in der WGTS sehr genau bekannt sein. In Kap. 2.7 wurde schon gezeigt, dass eine nicht berücksichtigte Schwankung der Säulendichte um 0,2% zu einem intolerablen systematischen Effekt in der Neutrinomassenanalyse führt. Es ist daher wichtig, die Gesamtzahl der Moleküle in der Quelle zu kennen. Dabei spielt die Temperatur der Quelle eine zentrale Rolle, da sie direkt mit der Dichteverteilung verknüpft ist. Eine Temperaturinhomogenität - sei sie longitudinaler, radialer oder azimuthaler Art (siehe Kap. 3.3.2) - spiegelt sich daher immer in einer Modiﬂikation des Dichteproﬂs wider.

longitudinales Dichteproﬂ

Aus der Geometrie des Strahlrohrs, dem Einlassdruck p_{in} und dem Tritiumdurchsatz q kann das Dichteproﬂ in der WGTS berechnet werden. Umgekehrt kann auch bestimmt werden, welche Werte für p_{in} und q gewählt werden müssen, um die gewünschte Säulendichte $\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ zu erreichen. Sharipov hat diese Aufgabe u.a. in [56] numerisch gelöst.

Alle Berechnungen hatten bisher gemeinsam, dass sie eine isotherme Quelle mit $T = 30 \text{ K}$ annahmen. Ein longitudinales Temperaturproﬂ (siehe Kap. 3.3.2) führt zu nicht vernachlässigbaren Änderungen. Für die spezielle Verteilung in Abb. 3.7b wurde in [53] das zugehörige Dichteproﬂ numerisch berechnet. Es kann durch folgende Interpolationsformel mit $z' = \frac{2z}{L}$ beschrieben werden

$$\begin{aligned} \frac{\rho(z)}{\rho_{\text{in}}} = & \left[B_1 (1 - z') + B_2 (1 - z')^2 \right] \cdot \left[1 - \exp(5z') \right] \\ & + \left[1 + B_3 z'^2 + B_4 z'^4 \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} z'\right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

L bezeichnet die Länge des Strahlrohrs $L = 10 \text{ m}$. Die Koeffizienten B_1 bis B_4 für verschiedene Temperaturabweichungen ΔT in longitudinaler Richtung ﬁnden sich in Tab. 3.1.

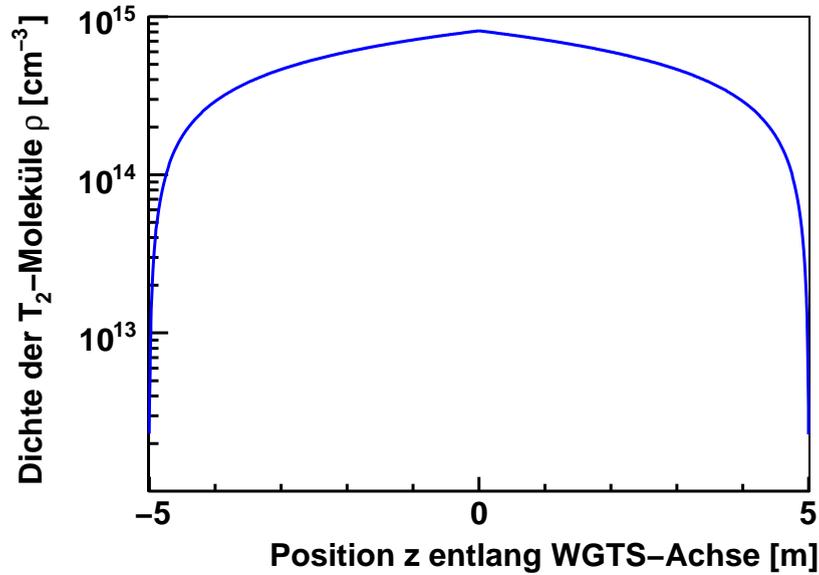


Abbildung 3.10: Das mit der Interpolationsformel 3.28 erstellte Dichteprofil für $\Delta T = 30$ mK.

Durch Gradientenbildung erhält man mit $P(z) = k_B T \cdot \rho(z)$ den Druckgradienten $\xi_p(z)$ (siehe Gl. 3.23)

$$\xi_p(z) = \frac{\rho_{\text{in}}}{\rho(z)} \frac{R}{L} \left\{ \begin{aligned} & \left[-2B_1 - 4B_2(1 - z') \right] \left[1 - \exp(5z') \right] \\ & - 10 \left[B_1(1 - z') + B_2(1 - z')^2 \right] \exp(5z') \\ & + \left[4B_3 z' + 8B_4 z'^3 \right] \cos\left(\frac{\pi}{2} z'\right) \\ & - \pi \left[1 + B_3 z'^2 + B_4 z'^4 \right] \sin\left(\frac{\pi}{2} z'\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Tabelle 3.1: Interpolationskoeffizienten für die Dichteverteilung in Gl. (3.28) bei konstantem Tritiumdurchsatz $q = 1,926$ mbar l/s für verschiedene ΔT

ΔT [K]	B_1	B_2	B_3	B_4
0	0,02723	0,09125	1,5748	1,7787
0,03	0,02724	0,09122	1,5747	1,7795
0,3	0,02736	0,09098	1,5733	1,7865
1,0	0,02767	0,09035	1,5699	1,8045

Für jede Position entlang der Quellachse lässt sich damit die lokale Dichte berechnen. Die oben gezeigten Rechnungen und die Interpolationsformeln in Gl. (3.28) und (3.29)

stehen nur beispielhaft für die Verwendung eines spezifischen Temperaturprofils und eines dazugehörigen Temperaturgradienten ΔT . Mit einem von Sharipov et al. entwickelten Programm soll für ein variables Temperaturprofil die resultierende Dichteverteilung berechnet werden können. Deshalb wurden erste Schritte für eine Schnittstelle zum im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Softwarepaket durchgeführt.

radiales und azimuthales Dichteprofil

In Kap. 3.3.2 wurde gezeigt, dass radiale und azimuthale Variationen der Temperatur innerhalb eines Querschnitts der WGTS bestehen aufgrund der speziellen Kühltechnik mit den seitlich angebrachten Zwei-Phasenrohren. Für die Dichteverteilung existieren analoge Berechnungen, die in Abb. 3.11 dargestellt sind.

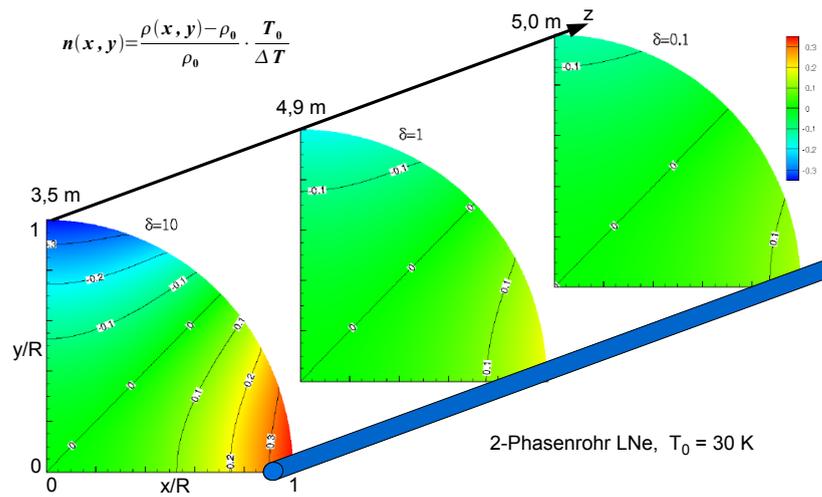


Abbildung 3.11: **Modell der radialen und azimuthalen Abweichungen von der mittleren Dichte ρ_0** [53]. In analoger Darstellung zu Abb. 3.8. Zu beachten ist, dass der aufgetragene Dichteunterschied $n(x,y)$ noch mit dem Faktor $\Delta T/T_0$ (d.h. entsprechend der WGTS-Spezifikation mit 10^{-3}) multipliziert werden muss, um die Teilchendichte $\rho(x,y)$ an dieser Stelle zu erhalten. Diese Berechnungen wurden ohne Berücksichtigung von longitudinalen Effekten betrachtet, d.h. ohne den Gasfluss entlang der Quellachse miteinzubeziehen.

3.4 Räumliche Unterteilung der Quelle

In Kap. 3.3 wurden die in die Modellierung der WGTS einbezogenen physikalischen Parameter diskutiert. Hervorzuheben ist hierbei die starke Variation der Parameter über die Distanz von 10 m und innerhalb des Querschnitts des Strahlrohrs in radialer und azimuthaler Richtung. Das differentielle Spektrum der gesamten Quelle wird z.B. durch die Dopplerverbreiterung, die wiederum vom Temperaturprofil der Quelle abhängt, modifiziert. Für eine genaue Beschreibung ist es also unerlässlich, die WGTS in

kleine Elemente V_i , im folgenden Quellpixel genannt, zu unterteilen. Ist der Quellpixel genügend klein gewählt, können innerhalb dieses Quellpixels die Parameter als konstant angenommen werden.

longitudinale Unterteilung

Eine longitudinale Unterteilung des 10 m-Strahlrohrs ist aus physikalischer Sicht unerlässlich. Der Grad der Aufteilung hängt von der betrachteten physikalischen Größe und der erforderlichen Genauigkeit ab. Zur Untersuchung des Einflusses der Magnetfeldinhomogenitäten (Abb. 3.6) sollte die Unterteilung nahe der Pumpen und an den Nahtstellen der Magnete sehr fein, im restlichen Bereich mit kleinem Gradienten eher grob sein. Für Betrachtungen des Dichteprofiles hingegen wäre eine Unterteilung denkbar, die jedem Quellpixel die gleiche Anzahl an Tritiummolekülen zuordnet. In der Mitte der WGTS würde das Modell daher kleine Bereiche umfassen und an den Enden bei den geringen Dichte eine größere Unterteilung aufweisen. Deshalb wurde im entwickelten Programm Wert darauf gelegt, die Unterteilung für verschiedenartige Fragestellungen flexibel zu lassen. Für die hier vorgestellten Berechnungen und Ergebnisse wurde als erster Ansatz eine longitudinal äquidistante Unterteilung gewählt.

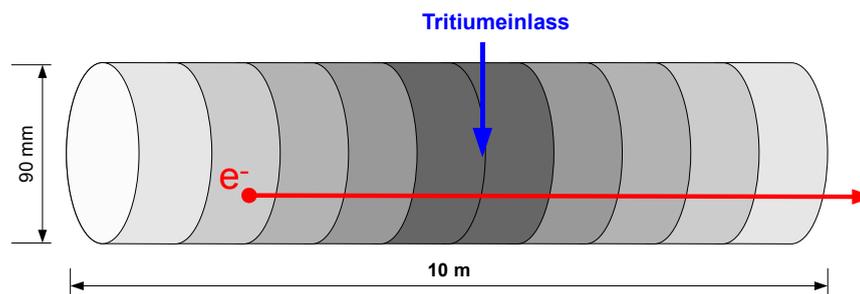


Abbildung 3.12: **Schematische longitudinale Unterteilung der WGTS in 10 äquidistante Bereiche.** Die Graustufen symbolisieren das Dichteprofil in der WGTS. Elektronen, die im dem rückwärtigen Teil der Quelle emittiert werden, müssen die gesamte Quelle durchlaufen und besitzen damit eine größere Streuwahrscheinlichkeit als Elektronen aus dem spektrometernahen Ende der Quelle. Damit ist es möglich, die einzelnen Bereiche der Quelle separat zu betrachten.

radiale und azimutale Unterteilung

Da auch radiale und azimutale Inhomogenitäten berücksichtigt werden müssen, ist eine Unterteilung in diese beiden Richtungen erforderlich. In entsprechender Weise muss auch hier der Grad der Unterteilungen auf den zu untersuchenden Parameter angepasst werden. Exemplarisch wurde für diese Arbeit eine Gesamtunterteilung entwickelt, die sich an der Geometrie des Detektors (Abb. 2.6) orientiert. Dessen Ringstruktur mit der

weiteren Unterteilung eines Rings in Segmente und die Magnetfeldstärke am Detektor, die das Abbildungsverhältnis festlegt, sind vordefiniert. Für einen gewählten Detektorpixel kann unter Berücksichtigung des magnetischen Flusses in Gl. (2.2) für bekanntes Magnetfeld B_S in der Quelle die Abbildung von entsprechenden Quellpixeln bestimmt werden.

Für jeden Quellpixel werden dann die physikalischen Parameter gesetzt, die charakterisieren, welchen Beitrag er zum Gesamtspektrum der Quelle liefert. Durch Zusammenfassen mehrerer entlang einer Magnetfeldlinie angeordneter Quellpixel lässt sich dann die Zahl und das Energiespektrum von Elektronen an den entsprechenden Detektorpixeln bestimmen. Wenn alle Quellpixel addiert werden, ergibt sich das Gesamtspektrum der WGTS (Kap. 4.1).

Bei dieser Methode müssen einige Effekte vernachlässigt werden, die nur im Rahmen von Simulationen der Trajektorien einzelner Teilchen beschreibbar sind:

- In den anliegenden \vec{E} - und \vec{B} -Feldern erfahren die Elektronen bei Nichtparallelität der Vektorfelder eine kleine $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift und gelangen u.U. zu einem benachbarten Pixel.
- Streuungen der Elektronen an den Tritiummolekülen unter großen Winkeln können dazu führen, dass sie nicht am vorherberechneten Detektorpixel ankommen.
- Für die Berechnungen wurden keine Störungen der Axialsymmetrie des Magnetfelds berücksichtigt.

In dieser Arbeit waren die radialen und azimutalen Abhängigkeiten der Quellparameter noch nicht vollständig verfügbar, so dass nachfolgend nur eine longitudinale Unterteilung durchgeführt wurde.

3.5 Antwortfunktion und integriertes Spektrum

Der Einfluss der Experimentparameter auf das integrierte Betaspektrum (Kap. 2.1.2) ist durch die experimentelle Antwortfunktion R gegeben

$$R(E, qU) = \int_0^{E/2} T(E - \varepsilon, qU) \cdot (P_0 \delta(\varepsilon) + P_1 f(\varepsilon) + P_2 (f \otimes f)(\varepsilon) + \dots) d\varepsilon. \quad (3.30)$$

Sie ist eine Faltung der Transmissionsfunktion T (siehe Kap. 3.5.1) als Spektrometereigenschaft mit den Energieverlusten $f(\varepsilon)$ (3.5.2), jeweils gewichtet mit den Streuwahrscheinlichkeiten P_i (3.5.3), als Quelleffekten.

Aus früheren Berechnungen, in denen die WGTS durch integrierte Größen als Ganzes charakterisiert wurde, ergab sich die in Abb. 3.13a dargestellte Antwortfunktion.

Durch die Unterteilung der Quelle in kleinere Bereiche (Kap. 3.4) ist es möglich die Antwortfunktion für jeden Quellpixel separat anzugeben. Jeder Quellpixel besitzt eigene Streuwahrscheinlichkeiten, da je nach Lage unterschiedlich viele Tritiummoleküle zwischen Emissionsort und Spektrometer von den Elektronen passiert werden müssen. Dabei können dann auch die Temperatur-, Dichte- und Magnetfeldprofile (Kap. 3.3) berücksichtigt werden, so dass sich eine individuelle Antwortfunktion für jeden Quellpixel (siehe Abb. 3.13b) ergibt.

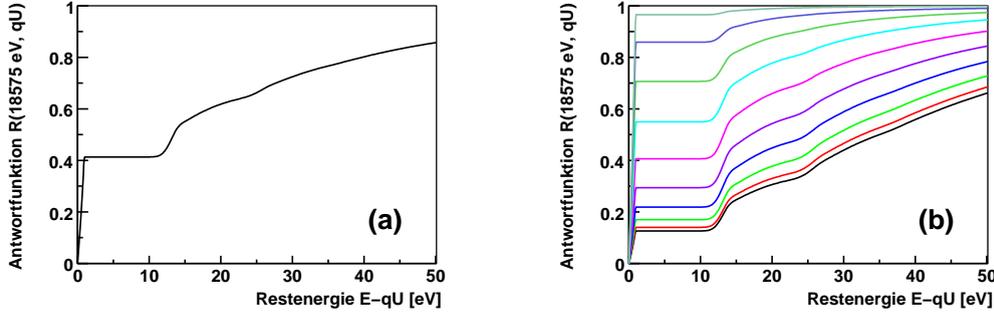


Abbildung 3.13: (a) **KATRIN-Antwortfunktion** $R(E, qU)$ und (b) **individuelle Antwortfunktionen für eine Unterteilung in 10 longitudinale Quellpixel**. Bei einer Unterteilung in mehrere longitudinale Quellpixel lässt sich die Antwortfunktion für jeden Pixel einzeln berechnen. Dafür werden zunächst die Streuwahrscheinlichkeiten für jeden Quellpixel bestimmt. Die Unterteilung garantiert, dass jedem Pixel die real existierenden physikalischen Eigenschaften wie Dichte und Magnetfeld zugeordnet werden. Am gut erkennbaren Plateau der Antwortfunktion lässt sich der Anteil ungestreuter Elektronen ablesen. Bei der untersten Kurve, die den am weitesten vom Spektrometer entfernten Teil der WGTS beschreibt, erreichen nur 12% der Elektronen das Spektrometer ohne Energieverlust durch inelastische Streuung. Die oberste Antwortfunktion für den spektrometernächsten Teil der WGTS zeigt den erwarteten hohen Anteil an ungestreuten Elektronen.

3.5.1 Transmissionsfunktion und Spektrometerparameter

In die Antwortfunktionen einzelner Quellpixel gehen die Eigenschaften des Spektrometers ein. Die KATRIN-Spektrometer basieren auf dem in Kap. 2.1.1 erklärten Prinzip eines MAC-E-Filters. Mit Gl. (2.1) ergibt sich für Elektronen mit Endpunktsenergie $E_0 = 18575 \text{ eV}$ für eine Konfiguration mit einem Magnetfeld in der Analysierebene $B_A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ und einem maximalen Magnetfeld $B_{\max} = 6,0 \text{ T}$ eine Energieauflösung von

$$\Delta E = E \cdot \frac{B_A}{B_{\max}} = 0,93 \text{ eV} \quad (3.31)$$

Die genauen Transmissionseigenschaften des Spektrometers werden durch eine Transmissionsfunktion beschrieben, die für eine isotrope Elektronenquelle die folgende Form annimmt:

$$T(E, qU) = \begin{cases} 0 & E - qU \leq 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{E - qU}{E} \frac{B_S}{B_A}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta E}{E} \frac{B_S}{B_A}}} & 0 < E - qU \leq \Delta E \\ 1 & E - qU > \Delta E \end{cases} \quad (3.32)$$

mit den zuvor eingeführten Größen ΔE , B_S , B_A und dem elektrischen Potential qU , das die Elektronen überwinden müssen.

Elektronen mit zu geringer Energie werden reflektiert, die Transmission ist in diesem Fall Null. Die endliche Energieauflösung bedingt eine partielle Transmission von Elektronen mit einer Energie nahe an der Potentialbarriere, wohingegen Elektronen mit einer Energie größer als $qU + \Delta E$ ungehindert passieren können. Die Transmissions-

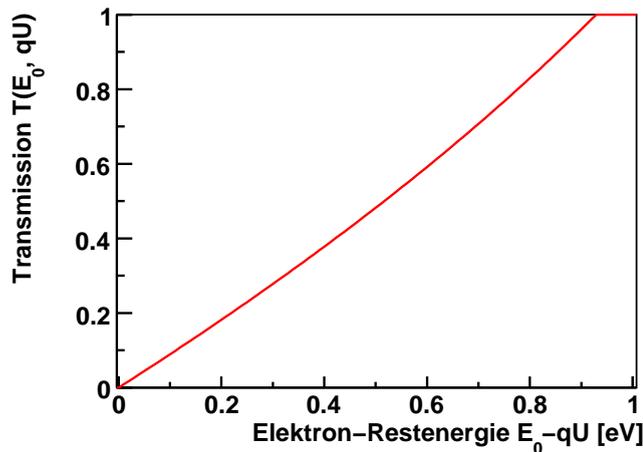


Abbildung 3.14: **Berechnete Transmissionsfunktion des Hauptspektrometers.**

Hier ist die Transmission von Elektronen mit $E_0 = 18575$ eV aufgetragen, die gegen ein elektrisches Potential qU anlaufen. Die Energieauflösung von $\Delta E = 0,93$ eV bestimmt die Breite des Anstiegs.

funktion in Abb. 3.14 ist für verschiedene Bereiche des Spektrometers leicht modifiziert in Abhängigkeit vom lokalen Magnetfeld B_A in der Analysierebene mit $A_A = 63,6$ m². Da B_A nicht konstant in A_A ist, ändert sich die Breite der Transmissionsfunktion. Ein deutlich stärkerer Effekt entsteht durch die Variation des Retardierungspotentials qU über die Querschnittsfläche, wodurch die Transmissionsfunktion verschoben wird [4]. Elektronen, die das Spektrometer nahe der Tankwand passieren, erfahren daher andere Transmissionsbedingungen als Elektronen, die direkt auf der Strahlachse bei $r = 0$ fliegen. Elektronen, die nahe der WGTS-Wand bei einem großen Radius r entstehen und noch im magnetischen Flusschlauch emittiert werden, durchfliegen auch die Analysierebene bei einem großen Radius. Mit einer Unterteilung der Quelle in radialer und azimuthaler Richtung (Kap. 3.4) ist es möglich, den Quellpixeln die für sie geltenden Transmissionsfunktionen zuzuweisen. Dieser Aspekt konnte in dieser Arbeit noch nicht berücksichtigt werden, wird aber im Hinblick auf die in naher Zukunft erfolgenden Messungen der Inhomogenitäten von B_A und qU am Hauptspektrometer [57] im Zuge einer Gesamtsimulation des KATRIN Experiments implementiert werden.

3.5.2 Energieverluste der Elektronen

Wenn die höchstenergetischen Elektronen des steil abfallenden Betaspektrums untersucht werden, ist eine adiabatische Führung der Elektronen von der Quelle zum Spektrometer notwendig. Alle Energieverluste von der Quelle bis zum Detektor müssen daher in den Berechnungen berücksichtigt werden.

Zum einen verlieren sich in Magnetfeldern bewegendende Elektronen Energie durch Synchrotronstrahlung. Zum anderen müssen inelastische Streuungen an Tritiummolekülen beachtet werden. Um die Energieverluste durch Stöße außerhalb der Quelle gering zu halten, werden große Teile des Experiments unter UHV-Bedingungen betrieben. Die inelastischen Stöße, die ein emittiertes Elektron in der Quelle durchführt, sind der dominante Energieverlustprozess, und werden hier detailliert berücksichtigt.

Synchrotronstrahlung

Die Verwendung eines MAC-E-Filters zur Analyse der Elektronenenergie setzt starke Magnetfelder voraus. Die Elektronen bewegen sich auf Spiralbahnen entlang der Magnetfeldlinien in einer Zyklotronbewegung. Eine Kreisbewegung geladener Teilchen führt immer zu einer Abstrahlung von Energie in Form von Synchrotronstrahlung. Dieser Energieverlust kann einer nicht-relativistischen Näherung als

$$\Delta E = 0,4E_{\perp}B^2t \quad (3.33)$$

parametrisiert werden [4]. B bezeichnet dabei die magnetische Feldstärke, in der sich die Elektronen im Zeitintervall t bewegen und dabei Energie abstrahlen, während E_{\perp} der transversalen Energie entspricht, die in der Kreisbewegung steckt. Elektronen mit Emissionswinkel $\theta = 0^{\circ}$ besitzen keine transversale Energie und erfahren somit auch keine Synchrotronverluste. θ definiert darüber hinaus auch die Aufenthaltsdauer der Elektronen in der WGTS. Elektronen, die unter großem θ emittiert werden, besitzen nur einen kleinen Anteil longitudinaler Energie zur Bewegung hin zum Spektrometer. Sie führen hauptsächlich die Kreisbewegung durch und bewegen sich nur „langsam“ aus der WGTS im Vergleich zu Elektronen, die unter kleinem θ direkt in Richtung des Spektrometers emittiert werden.

Da das Magnetfeld quadratisch in Gl. (3.33) eingeht, sind die Energieverluste in der Quelle mit $B_S = 3,6 \text{ T}$ eher gering. Die Transportsektion mit $B_{\text{Transport}} = 5,6 \text{ T}$ trägt wesentlich stärker zu den Synchrotronstrahlungsverlusten bei. Die maximalen Verluste betragen [4]

$$\Delta E_{\text{WGTS}}^{\text{max}} = 12 \text{ meV} \quad (3.34)$$

$$\Delta E_{\text{Transport}}^{\text{max}} = 130 \text{ meV}. \quad (3.35)$$

Dies zeigt für die WGTS, dass der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung im Vergleich zur Dopplerverbreiterung ($\Delta E_{\text{Doppler}} \approx 130 \text{ meV}$ aus Kap. 3.2.4) um einen Faktor 10 geringer ist. Für eine Gesamtsimulation des KATRIN Experiments einschließlich der Transportstrecke sind diese Energieverluste aber zu berücksichtigen. Da in dieser Arbeit immer nur Spektren aus den verschiedenen Quellpixeln berechnet und keine Einteilchensimulationen durchgeführt werden, ist die Synchrotronstrahlung noch nicht

berücksichtigt. Effekte, die von unterschiedlichen Weglängen der Elektronen abhängen, können daher zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht berücksichtigt werden.

Abschließend sei angemerkt, dass die Energieverluste im Bereich des stärksten Magneten mit $B_{\max} = 6,0\text{T}$ irrelevant sind, da sich dieser erst hinter dem Spektrometer befindet, wenn die Energieanalyse schon stattgefunden hat.

Inelastische Streuung

Die Elektronen können in der Quelle mit den restlichen Tritiummolekülen inelastisch stoßen. Diese Streuungen passieren hauptsächlich im zentralen Bereich der WGTS, da dort die Dichte am größten ist.

Die Energieverluste durch inelastische Streuungen in der Quelle lassen sich durch die Einführung einer Energieverlustfunktion $f(\epsilon)$ beschreiben. Diese wurde in [58] durch Untersuchung der Streuung von $18,6\text{keV}$ Elektronen an molekularem Tritium und Deuterium mit dem Troitsk-Spektrometer ermittelt zu

$$f(\epsilon) = \begin{cases} A_1 \exp\left(-\frac{2(\epsilon-\epsilon_1)^2}{\omega_1^2}\right) & \text{für } \epsilon < \epsilon_c \\ A_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 + 4(\epsilon-\epsilon_2)^2} & \text{für } \epsilon \geq \epsilon_c \end{cases} \quad (3.36)$$

mit den Parametern $A_1 = 0,204 \pm 0,001$, $\omega_1 = 1,85 \pm 0,02$, $A_2 = 0,0556 \pm 0,0003$, $\omega_2 = 12,5 \pm 0,1$ und $\epsilon_2 = 14,30 \pm 0,02$. Für den Fit in Abb. 3.15a wurde $\epsilon_1 = 12,6$ festgelegt. $\epsilon_c = 14,09$ wurde so gewählt, dass die beiden Funktionsteile stetig sind.

Aus Abb. 3.15a ist ersichtlich, dass ein Elektron bei einer inelastischen Streuung mindestens 10eV Energie verliert. Wird das Betaspektrum nur in einem engen Intervall von 10eV unterhalb des Endpunkts analysiert, ist sichergestellt, dass die im Detektor registrierten Elektronen keine inelastische Streuung in der WGTS erfahren haben. Wird ein erweitertes Energieintervall betrachtet, enthält das Spektrum Beiträge von Elektronen, die ein Mal gestreut wurden. Abb. 3.15a-d zeigen, wie sich die Anzahl der Streuungen im Energieverlustspektrum manifestiert. Diese Kenntnis ist wichtig, wenn ein größeres Energieintervall analysiert wird. Dies ist genau der Einfluss der inelastischen Streuungen, der in der Antwortfunktion in Gl. (3.30) berücksichtigt wird.

Eine der wesentlichen Aufgaben bei KATRIN wird die genaue Messung der Energieverlustfunktion sein. Hierzu wird mit Hilfe eines monoenergetischen Elektronenstrahls aus einer Elektronenkanone der Anteil gestreuter Elektronen bestimmt. Der Strahl muss zu diesem Zweck die gesamte WGTS bei verschiedenen Tritiumdichten durchlaufen. Daraus lässt sich die für diese Bedingungen geltende Antwortfunktion bestimmen. Durch Entfalten kann daraus die für KATRIN spezifische Energieverlustfunktion bestimmt werden [4].

3.5.3 Streuwahrscheinlichkeiten

Neben einer genauen Kenntnis des Energieverlusts von Elektronen durch eine inelastische Streuung, muss bekannt sein, wie oft die Elektronen in der WGTS streuen. Der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an T_2 beträgt $\sigma_{\text{tot}} = 3,40 \cdot 10^{-18}\text{cm}^2$ für $18,6\text{keV}$ Elektronen [58]. Obwohl σ energieabhängig ist, kann dieser Wert für die gesamten Berechnungen in einem Intervall von $[18475\text{eV}, 18575\text{eV}]$ als

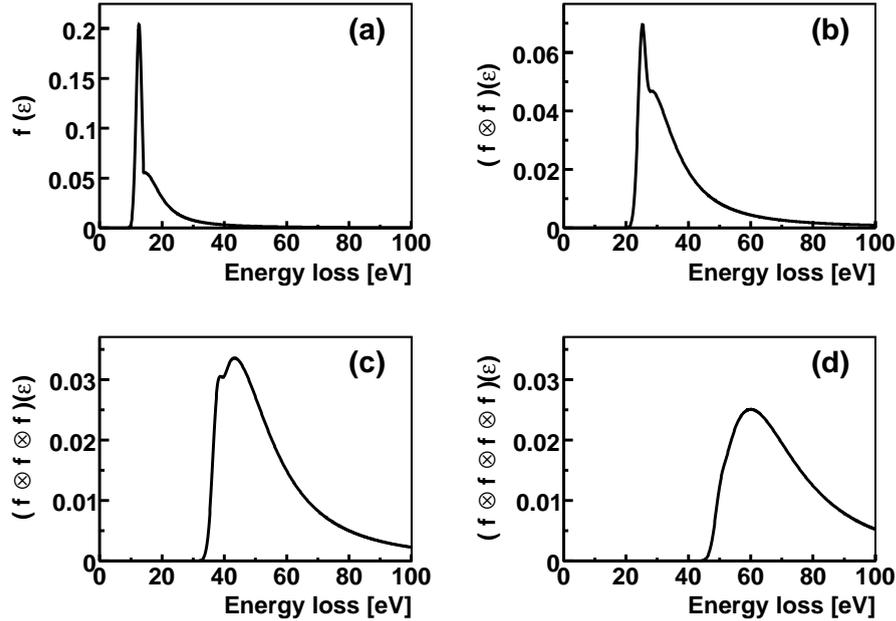


Abbildung 3.15: (a) **Energieverlustfunktion für Elektronen in gasförmigem molekularem Tritium.** Ein Elektron verliert bei einer inelastischen Streuung mit einem Tritiummolekül mindestens 10 eV Energie. (b) - (d) **Faltungen für 2-, 3- und 4-fache Streuung.**

konstant angenommen werden.

Für eine Streuung kommen nur Moleküle in Frage, die sich zwischen Emissionsort und Spektrometer befinden, wobei in der vorliegenden Arbeit nur Moleküle in den inneren 10 m der WGTS berücksichtigt werden. Die Flugstrecke des Elektrons hängt wie oben beschrieben vom Emissionswinkel θ ab. Insbesondere ist bei größerem θ die Zyklotronbewegung stärker und damit der zurückgelegte Weg innerhalb der WGTS länger. Als charakteristische Größe kann man in diesem Zusammenhang die effektive Säulendichte

$$\lambda(z, \theta) = \frac{1}{\cos \theta} \int_z^l \rho(z') dz' \quad (3.37)$$

verwenden. Die Anzahl der Streuprozesse, die ein Elektron erfährt, folgt dann einer Poissonverteilung

$$P_i(z, \theta) = \exp(-\lambda \sigma_{\text{tot}}) \frac{(\lambda \sigma_{\text{tot}})^i}{i!}. \quad (3.38)$$

Die Werte von $P_i(z, \theta)$ geben an, wie wahrscheinlich eine i -fache Streuung eines Elektrons ist, das am Ort z unter einem Winkel θ emittiert wird. Für die gesamte WGTS

können mittlere Streuwahrscheinlichkeiten P_i berechnet werden [46], indem über alle Emissionswinkel und alle Startpositionen gemittelt wird:

$$P_i = \frac{1}{\rho d(1 - \cos \theta_{\max})} \int_{-5m}^{+5m} dz \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \rho(z) P_i(z, \theta) \sin \theta. \quad (3.39)$$

Die mittleren Streuwahrscheinlichkeiten P_i sind unabhängig vom Dichteprofil und werden nur durch die integrale Säulendichte ρd beeinflusst. Für die Säulendichte $\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ und ein Magnetfeld von $B_S = 3,6 \text{ T}$ ergeben sich die Werte in Gl. (3.1) als Mittelung über die gesamte WGTS. Das Magnetfeld B_S beeinflusst diese Werte, da es nach Gl. (3.15) den maximalen Öffnungswinkel θ_{\max} definiert. Da nur Elektronen mit $0^\circ \leq \theta < \theta_{\max}$ am Detektor ankommen, werden auch nur diese bei der Berechnung der Streuwahrscheinlichkeiten berücksichtigt, die Integration in Gl. (3.39) wird demzufolge nur bis θ_{\max} durchgeführt. In Kap. 3.3.1 wurde erläutert, dass das Magnetfeld in der WGTS nicht konstant ist. Dadurch sind die maximalen Emissionswinkel je nach Position in der Quelle und damit auch die Streuwahrscheinlichkeiten unterschiedlich.

Es ist sinnvoll, für jeden Quellpixel im Zuge einer 3-D Unterteilung auf der Basis des entsprechenden Magnetfelds die Streuwahrscheinlichkeiten separat zu berechnen. Hier ergibt sich wiederum die Fragestellung des Unterteilungsgrades, speziell für die longitudinalen Elemente der 10 m langen WGTS. Eine große Pixelanzahl, z.B. 1000 Elemente mit einer Breite von 1 cm pro Pixel, führt zu einem zu großen Rechenaufwand. Dies gilt insbesondere im Hinblick einer weiteren Aufteilung jedes dieser 1000 Elemente in radialer und azimuthaler Richtung entsprechend der 148 Pixel des Detektors. Andererseits erfordert eine hohe Genauigkeit bei der Bestimmung der Streuwahrscheinlichkeiten eine hinreichende longitudinale Unterteilung.

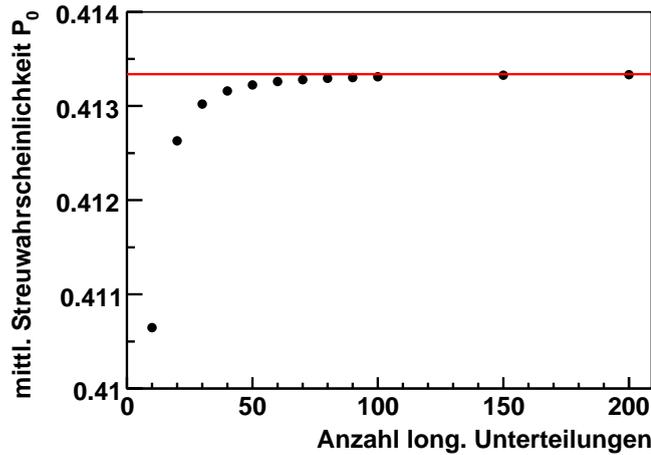


Abbildung 3.16: **mittlere Streuwahrscheinlichkeit P_0 für verschiedene longitudinale Unterteilungen.** P_0 nähert sich für immer feiner werdende Unterteilung der WGTS dem von J. Kaspar berechneten Wert $\langle P_0 \rangle = 0,413339$ an.

Abb. 3.16 zeigt, wie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron die WGTS ungestreut verlässt, von der Feinheit der longitudinalen Unterteilung abhängt. Wie zu erwarten war, ist eine Unterteilung in nur 10 Scheiben ungenügend. Es empfiehlt sich, mit einer großen Anzahl an Scheiben (z.B. 1000) die Berechnungen zu beginnen, und dann mit einem geeigneten Algorithmus die Anzahl auf 10 Scheiben zu reduzieren, ohne an Genauigkeit der P_i zu verlieren.

Im für diese Arbeit erstellten Programm wurde eine neue Methode entwickelt, die dieses „Rebinning“ durchführt. Für eine große anfängliche Anzahl an Quellpixeln werden die Streuwahrscheinlichkeiten hinreichend genau berechnet. Danach werden mehrere Pixel zusammenfasst, für die dann die Antwortfunktion (siehe Abb. 3.13b) und das integrierte Spektrum berechnet werden kann. Tab. 3.2 zeigt, dass bei diesem Vorgang die mittleren Streuwahrscheinlichkeiten nicht an Genauigkeit verlieren. Für diese Berechnungen wurde ein konstantes Magnetfeld angenommen und die Dichteverteilung mit Hilfe der Interpolationsformel (Gl. 3.28) so skaliert, dass die Säulendichte exakt $\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2$ beträgt. Wenn mehr Dezimalen beachtet werden, ergibt sich mit $\langle P_0 \rangle = 0,413339$ genau die von J. Kaspar für diese Quellparameter berechnete mittlere Streuwahrscheinlichkeit P_0 [59]. Im Gegensatz dazu verdeutlicht Tab. 3.3, dass eine direkte Unterteilung in nur 10 longitudinale Quellpixel zu Ungenauigkeiten führt. Auch hier wurde die Säulendichte explizit auf $\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2$ normiert, um die Ergebnisse vergleichen zu können. Ohne diese Normierung würden die Ergebnisse stärker abweichen, da bei der Unterteilung in nur 10 Quellpixel das Dichteprofil nur unzureichend genau berücksichtigt wird und in einer 0,5% Abweichung der Säulendichte resultiert.

Tabelle 3.2: P_0 für Rebinning von 1000 Quellpixeln auf 10

i	P_0	$\rho d [\text{cm}^{-2}]$
1	0,1249	$1,654 \cdot 10^{16}$
2	0,1401	$3,818 \cdot 10^{16}$
3	0,1697	$5,329 \cdot 10^{16}$
4	0,2179	$6,564 \cdot 10^{16}$
5	0,2941	$7,635 \cdot 10^{16}$
6	0,4062	$7,635 \cdot 10^{16}$
7	0,5487	$6,564 \cdot 10^{16}$
8	0,7067	$5,329 \cdot 10^{16}$
9	0,8589	$3,818 \cdot 10^{16}$
10	0,9652	$1,654 \cdot 10^{16}$
$\langle P_0 \rangle = 0,4133$		$\rho d_{\text{ges}} = 5 \cdot 10^{17}$

Tabelle 3.3: P_0 für direkte Unterteilung in 10 Quellpixel

i	P_0	$\rho d [\text{cm}^{-2}]$
1	0,1251	$1,738 \cdot 10^{16}$
2	0,1404	$3,818 \cdot 10^{16}$
3	0,1699	$5,311 \cdot 10^{16}$
4	0,2177	$6,535 \cdot 10^{16}$
5	0,2930	$7,598 \cdot 10^{16}$
6	0,4041	$7,598 \cdot 10^{16}$
7	0,5457	$6,535 \cdot 10^{16}$
8	0,7028	$5,311 \cdot 10^{16}$
9	0,8548	$3,818 \cdot 10^{16}$
10	0,9633	$1,738 \cdot 10^{16}$
$\langle P_0 \rangle = 0,4123$		$\rho d_{\text{ges}} = 5 \cdot 10^{17}$

3.6 Weiteres Vorgehen

Mit den bisher im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Schritten zu einer besseren Beschreibung der Quelle ist die präzise Modellierung der WGTS noch nicht abgeschlossen. Die hier erarbeiteten Konzepte bilden einen guten Ausgangspunkt für zukünftige Simulationen. Nachfolgend sollen einige Skizzen für das zukünftige Vorgehen und die Verwendung des im Rahmen dieser Arbeit erstellten Programmpaketes diskutiert werden.

Alle entwickelten Funktionen werden im Programmpaket Source Spectrum Calculations (SSC) zusammengefasst, um die Routinen kollaborationsweit zur Verfügung zu stellen. Mit dem Code können Quellspektren berechnet und dabei die Parameter der Quelle (Anhang A.1) beliebig geändert werden. Hierzu wird SSC in die KATRIN Library KALI eingebunden werden.

Eine erste externe Verwendung von SSC wurde mit dem Programm KATRIN Spectrum Optimization Package KSOP von W. Käfer [60] getestet. KSOP soll unter anderem die Messzeitverteilung für eine optimale Neutrinomassenbestimmung generieren unter Verwendung eines eigenen Fitalgorithmus. In diesem Rahmen wird eine große Anzahl integrierter Spektren mit verschiedenen Parameterkombinationen (E_0, m_ν^2) benötigt, die durch das SSC-Paket bereitgestellt werden.

Im Hinblick auf die Systematik der Quelle ist es entscheidend, die Auswirkungen von Schwankungen der verschiedenen Quellparameter auf die integrierten Spektren mit Hilfe von SSC zu ermitteln. Das integrierte Spektrum wird hierzu für eine festgelegte Neutrinomasse und einen zu untersuchenden Quellparameter, der abweichend vom Standardwert gesetzt wird, für 10^4 Messphasen bestimmt. Mit einem Fitalgorithmus wird dann unter Annahme des Nominalwerts des Quellparameters die Neutrinomasse bestimmt. Dabei wird der Effekt des untersuchten Parameters als systematische Verschiebung des wahrscheinlichsten Werts für die Neutrinomasse sichtbar. Solche Berechnungen können mit SSC für wesentlich mehr Quellparameter als bei den bisherigen Analysen durchgeführt werden.

Im Rahmen der Erstellung von SSC wurden zahlreiche neue Prozesse implementiert, z.B. die Dopplerverbreiterung. Eine Verschmierung des Spektrums ist möglich, erfordert jedoch einen großen Rechenaufwand, insbesondere wenn für jede Position in der Quelle die unterschiedlichen Geschwindigkeiten berücksichtigt werden sollen. Für die zukünftigen Berechnungen werden diese Routinen optimiert.

Auch bei der Unterteilung der Quelle in radialer und azimuthaler Richtung wurden neue Methoden zur besseren WGTS-Modellierung entwickelt. Hier wird für die Zukunft eine Schnittstelle zu den Programmen von F. Sharipov et al., die in FORTRAN geschrieben sind, erstellt werden. Auch die Berücksichtigung eines den aktuellen Messwerten angepassten longitudinalen Temperaturprofils mit seinen Einflüssen auf die Dichteverteilung kann dann direkt mit SSC verknüpft werden.

Geplante Erweiterungen des hier erstellten Quellmodells umfassen z.B. Prozesse, bei denen sich Tritiummoleküle an der WGTS-Wand ablagern. Da dieser Vorgang Einfluss auf das Quellpotential haben kann, muss jedem Quellbereich ein eigenes Potential zuweisbar sein. Die Elektronen aus verschiedenen Bereichen der WGTS erfahren dann

unterschiedliche Potentialdifferenzen zwischen Emissionsort und Analysierebene, d.h. ihre Transmissionsfunktionen unterscheiden sich. Dies ist besonders im Hinblick auf eine Gesamtsimulation von KATRIN interessant, da auch Schwankungen des Potentials in der Analysierebene genau vermessen werden sollen.

Langfristig können die Konzepte und Funktionen aus SSC in idealer Weise für Monte-Carlo-Simulationen verwendet werden. Hierfür sind dann Emissionsort, -winkel und Energie einzelner Elektronen gemäß den hier beschriebenen Verteilungsfunktionen zu generieren, so dass der gesamte Weg zum Spektrometer mit allen Stößen und Energieverlusten simuliert werden kann.

4. Diskussion von berechneten integrierten Spektren

Mit den in Kapitel 3 diskutierten Parametern und Konzepten lassen sich integrierte Spektren des KATRIN Experiments berechnen (siehe Kap. 4.1). Um zu ermitteln, wie stark die verschiedenen Quellparameter die integrierten Spektren beeinflussen, wird jeweils der zu untersuchende Quellparameter variiert und das resultierende Spektrum berechnet. Da sich im Normalfall die beobachteten Raten nur sehr wenig ändern, wird zur Visualisierung der spektralen Modifikation idealerweise der Quotient der Raten der integrierten Spektren aufgetragen. Hierzu wird in den Abbildungen dieses Kapitels jeweils das integrierte Spektrum N mit den Standardparametern durch das Spektrum N' mit variiertem Parameter dividiert.

Als Ausgangspunkt wird zunächst der Einfluss der Neutrinomasse (Kap. 4.2) nahe dem Endpunkt betrachtet. Diese „Referenzspektren“ werden später mit den Effekten der Quellparameter verglichen (Kap. 4.3-4.5).

4.1 Integriertes Spektrum

Das für diese Arbeit entwickelte Programm SSC bindet alle zuvor erklärten Konzepte ein. Unter Berücksichtigung der eingestellten Quellparameter wird das erwartete integrierte Spektrum berechnet. Für die in Anhang A.1 aufgelisteten Standardparameter ist in Abb. 4.1 das integrierte Spektrum gezeigt.

Die Übereinstimmung der hier ermittelten Raten mit bisherigen Berechnungen wurde mit dem Programm *simulation.c* von F. Glück überprüft [61]. In Tab. 4.1 sind die Raten der beiden Programme gegenübergestellt. Hierbei ist zu beachten, dass SSC so angepasst wurde, um die gleichen Voraussetzungen wie *simulation.c* zu gewährleisten:

- Es wird nur ein Endzustand des Tochterkerns ${}^3\text{HeT}^+$ mit $E_f = 1,7\text{ eV}$ verwendet. Die von SSC eigentlich verwendete vollständige Beschreibung der Final State Distribution wird in Kap. 3.2.3 diskutiert.
- Die Berechnungen werden für ein konstantes Magnetfeld mit $B_S = 3,6\text{ T}$ durchgeführt. Im Vergleich zum Magnetfeldprofil in Abb. 3.6 führt dies zu einem Unterschied in der beobachtbaren Anzahl der Tritiummoleküle, da sich je nach Quellmagnetfeld unterschiedlich viele Moleküle innerhalb des magnetischen Flussschlauchs befinden. Andererseits beeinflusst das Quellmagnetfeld den maximalen Öffnungswinkel θ_{max} , damit die Streuwahrscheinlichkeiten und letztlich das integrierte Spektrum.

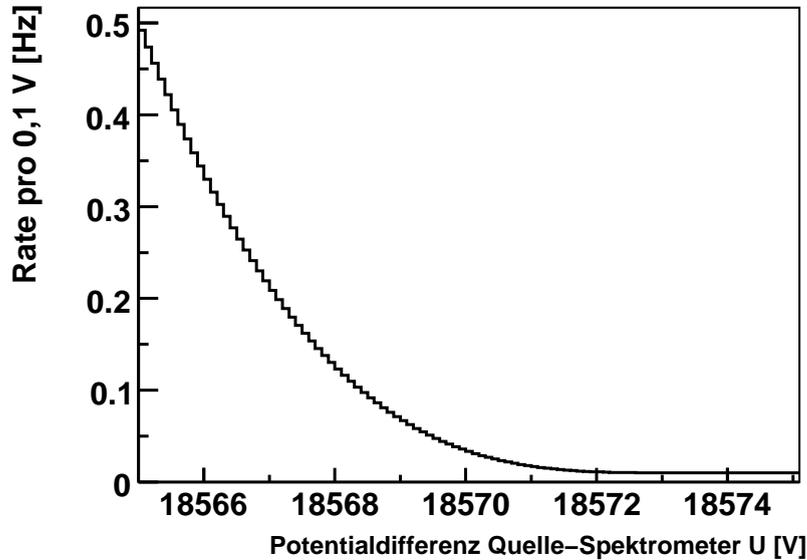


Abbildung 4.1: **Integriertes Betaspektrum, berechnet mit SSC.** Hierzu wurde die Quelle longitudinal in 10 Quellpixel unterteilt, jedem Pixel seine physikalischen Größen zugeordnet, die Beiträge zum integrierten Spektrum einzeln berechnet und am Ende über alle Quellpixel summiert. Als Quellparameter wurden die Werte in Anhang A.1 verwendet.

Zwischen den beiden Programmen bestehen geringfügige Unterschiede:

- Es werden unterschiedliche numerische bzw. analytische Integrationsroutinen verwendet.
- In *simulation.c* wird eine vereinfachte Antwortfunktion verwendet, die nur den Anteil der ungestreuten Elektronen P_0 verwendet, wohingegen SSC auch Elektronen berücksichtigt, die ein- oder mehrmals inelastisch gestreut und damit Energie verloren haben.
- In SSC wird die Quelle in kleine Volumina zerlegt und für jeden Quellbereich werden die Streuwahrscheinlichkeiten berechnet. In *simulation.c* wird ein mittlerer Wert für P_0 verwendet.

Die Raten der beiden Berechnungen unterscheiden sich in den letzten 10 eV unterhalb des Endpunkts um maximal 1,5%. Der Effekt der vollständigen Responsefunktion in SSC wird bei den Raten für einen Abstand größer als 10 eV vom Endpunkt sichtbar, da bei diesen Spannungen auch Elektronen den Detektor erreichen, die einmal inelastisch gestreut und daher mindestens 10 eV Energie verloren haben.

Außerdem wurden die berechneten Raten von K. Eitel [62] zum Vergleich verwendet. In diesen Rechnungen wurde eine korrekte Beschreibung der Final State Distribution¹,

¹Ältere Berechnungen der FSD [47] im Vergleich zu den in SSC verwendeten [50].

Tabelle 4.1: **Vergleich der Raten des integrierten Spektrums unter Annahme einer konstanten Untergrundrate $\Gamma_b = 0,01$ Hz mit älteren Berechnungen:** a) F. Glück [61], b) K. Eitel [62]

		<i>simulation.c</i>	SSC			K. Eitel	SSC
$E_0 - qU$ [eV]	Rate [Hz]	Rate [Hz]	Rate [Hz]	$E_0 - qU$ [eV]	Rate [Hz]	Rate [Hz]	Rate [Hz]
1	0,01	0,01	0,01	10	0,50	0,48	
2	0,010002	0,010002	0,010002	15	2,15	2,15	
3	0,0108	0,0107	0,0107	20	5,84	5,85	
4	0,0166	0,0163	0,0163	25	12,61	12,62	
5	0,0335	0,0330	0,0330	30	23,68	23,61	
10	0,4940	0,4947	0,4947	35	40,3	40,2	
15	2,133	2,147	2,147	40	64,2	63,9	
20	5,703	5,806	5,806	50	140,9	140,1	
25	11,96	12,49	12,49				

der Streuwahrscheinlichkeiten und der Antwortfunktion verwendet. Im Gegensatz zur Standardberechnung mit SSC wurden hier ein konstantes Magnetfeld und damit ein fester maximaler Öffnungswinkel $\theta_{\max} = 50,7^\circ$ angenommen und keine Strahlungskorrekturen berücksichtigt. Für den Vergleich mit den Raten von SSC wurde Tab. 4.1b unter gleichen Eingabeparametern erstellt.

Die verhältnismäßig große Abweichung der Raten bei 10 eV ist rundungsbedingt. Die restlichen Raten stimmen bis auf wenige Promille überein, die maximale Abweichung beträgt 0,6% bei 50 eV. SSC kann somit mit Hilfe der Unterteilung der Quelle und der dadurch ermöglichten Berechnung der Einzelspektren der kleinen Quellvolumina das integrierte Spektrum der älteren Rechnungen mit ihren vereinfachten Quellbeschreibungen reproduzieren.

4.2 Neutrinomasse

Als erster Ausgangspunkt für komplexere Analysen wird der Einfluss einer nicht verschwindenden Neutrinomasse auf das integrierte Spektrum bestimmt. Hierzu werden der Endpunkt E_0 und alle sonstigen Parameter festgehalten. Für dieses Szenario unterscheiden sich die differentiellen Spektren (siehe Abb. 1.4) im Verlauf nahe des Endpunkts. Diese spektralen Modifikationen werden in analoger Weise in Abb. 4.2 ersichtlich, wenn man Quotienten der integrierten Spektren mit $m_\nu = 0$ eV und mit $m'_\nu > 0$ eV betrachtet. In den ersten 1,5 eV unterhalb des eingestellten Endpunkts $E_0 = 18575$ eV sind die Raten praktisch identisch und unabhängig von der Neutrinomasse. Aufgrund des Energieshifts durch die Final State Distribution gibt es nur wenige Elektronen in diesem höchstenergetischen Bereich, die Rate ist sehr gering. In diesem Bereich dominiert die Untergrundrate, die für die Berechnungen als $\Gamma_b = 10$ mHz entsprechend dem Designwert des Experiments angenommen wurde. Erst bei kleineren Spannungen sind die

kinematisch bedingten Unterschiede der Spektren erkennbar. 4 eV unterhalb des Endpunkts unterscheiden sich die Spektren am deutlichsten, hier liegt die Signal- zu Untergrundrate bei 2:1. Für noch niedrigere Spannungen steigen die Raten dann schnell an, so dass Unterschiede der Spektren kaum noch sichtbar sind. In diesem Bereich werden die Einflüsse der Neutrinomasse durch die zunehmend relativistischen Neutrinoimpulse schwächer. Die Quotienten nähern sich wieder dem Wert 1. Für eine Neutrinomasse von 0,1 eV unterscheiden sich die integrierten Spektren um maximal 0,15% (siehe auch Abb. 4.4).

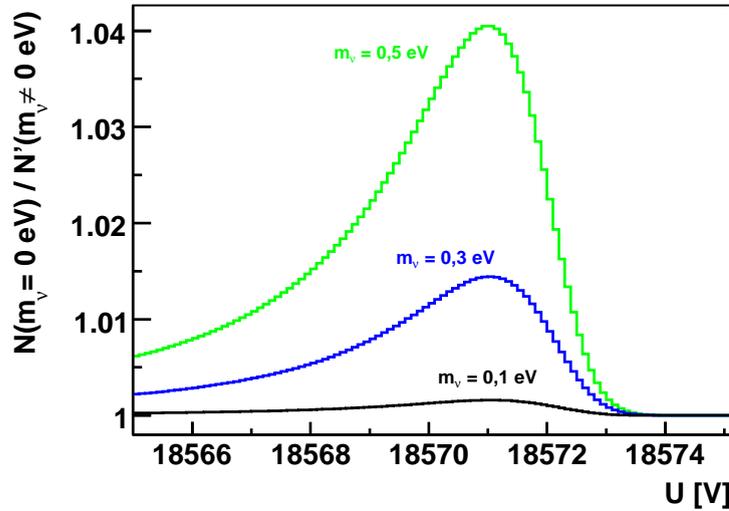


Abbildung 4.2: Einfluss einer nichtverschwindenden Neutrinomasse m_ν auf das integrierte Betaspektrum. Die Raten wurden für $m_\nu = 0,1$; $0,3$ und $0,5$ eV berechnet und dann relativ zur Rate mit $m_\nu = 0,0$ eV aufgetragen. Je größer m_ν ist, desto stärker unterscheiden sich die Spektren knapp unterhalb des Endpunkts $E_0 = 18575$ eV.

4.3 Final State Distribution und Tritiumreinheit

Beim Zerfall von molekularem Tritium verbleibt ein Teil der Übergangsenergie beim Tochtermolekül ${}^3\text{HeT}^+$ (Kap. 3.2.3). In 57% der Fälle - beim Übergang zum elektronischen Grundzustand - verbleiben im Mittel 1,7 eV in den Rotations- und Vibrationszuständen des Tochtermoleküls und fehlen damit dem Elektron. Um den Einfluss der Final State Distribution auf das integrierte Spektrum zu untersuchen, wurden zum einen die Raten unter Berücksichtigung der vollständigen FSD und zum anderen die Raten bei nur einem einzelnen Endzustand mit $E_f = 1,7$ eV berechnet. Da sich die Raten nur wenig unterscheiden, wird ihr Quotient in Abb. 4.3 gezeigt. Zum Vergleich ist der Effekt einer Neutrinomasse $m_\nu = 0,3$ eV eingezeichnet. Es wird deutlich, dass im Bereich, in dem die Neutrinomasse die integrierten Spektren bemerkbar beeinflusst, die FSD ähnliche bemerkbare Effekte hervorruft. Die FSD muss daher sehr präzise in die Analyse eingehen.

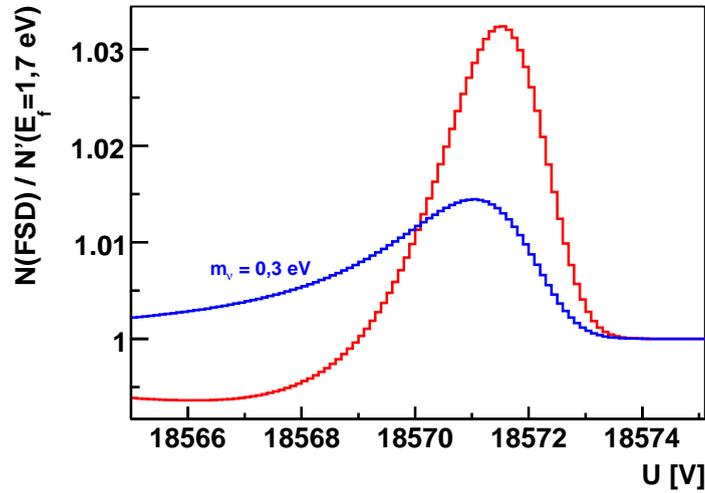


Abbildung 4.3: **Einfluss der FSD auf das integrierte Spektrum.** Aufgetragen ist in rot der Quotient der Raten des integrierten Spektrums N für die Verwendung der FSD und der Raten N' für die Verwendung genau eines Endzustands mit $E_f = 1,7$ eV. Eine Neutrinomasse von $0,3$ eV würde im Vergleich zum Spektrum mit $0,0$ eV den Quotienten in blau verursachen.

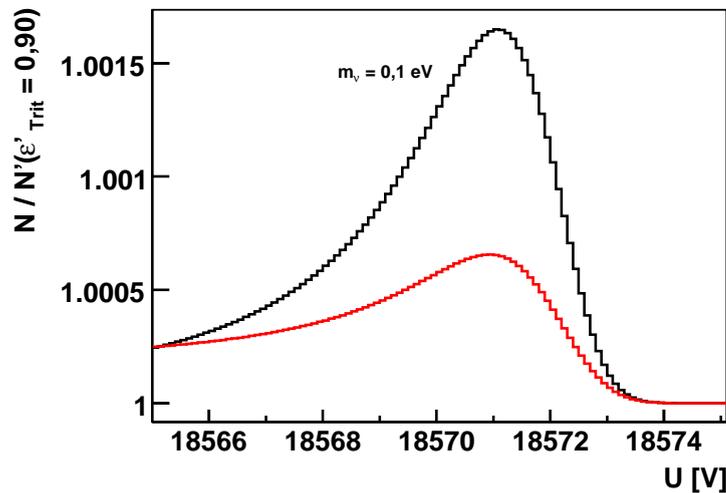


Abbildung 4.4: **Einfluss der Tritiumreinheit auf das integrierte Spektrum.** Die schwarze Kurve zeigt den Einfluss von $m_\nu = 0,1$ eV auf das integrierte Spektrum. Die rote Kurve vergleicht $\varepsilon_{\text{Trit}} = 95\%$ mit $\varepsilon'_{\text{Trit}} = 90\%$. Die Raten wurden zuvor durch entsprechendes $\varepsilon_{\text{Trit}}$ dividiert, um die unterschiedlichen Quellaktivitäten zu berücksichtigen. Sichtbar ist dann der geringe Einfluss der Tritiumreinheit aufgrund der verschiedenen Final State Distributions. Da die Aktivität der Quelle jedoch von der Anzahl der Tritiumatome in der Quelle abhängt, muss die Tritiumreinheit genau gemessen werden.

Mit der Implementierung von unterschiedlichen Final State Distributions für die Zerfälle von T_2 und DT lässt sich untersuchen, welchen Einfluss die Tritiumreinheit $\varepsilon_{\text{Trit}}$ besitzt. Der Standardwert mit $\varepsilon_{\text{Trit}} = 0,95$ wird nun mit einem wesentlich geringeren Wert² $\varepsilon'_{\text{Trit}} = 0,90$ verglichen. Der Quotient der integrierten Spektren ist in Abb. 4.4 gezeigt. Dabei ist zu beachten, dass die unterschiedlichen Aktivitäten der Quelle berücksichtigt werden müssen. Bei einer höheren Tritiumreinheit befinden sich bei gleichbleibendem Dichteprofil mehr Tritiummoleküle in der Quelle, womit sich mehr Zerfälle und damit auch eine größere Rate am Detektor ergibt. Die Raten wurden deshalb durch die entsprechende Tritiumreinheit dividiert und damit normiert.

4.4 Quellmagnetfeld

Der Einfluss des Magnetfelds der WGTS auf die Betaspektren wurde ebenfalls untersucht. Dazu wurden die integrierten Spektren für das vorgegebene Magnetfeldprofil in Abb. 3.6 und für eine Abweichung des gesamten Profils um -2% berechnet und wiederum der Quotient der Spektren in Abb. 4.5 aufgetragen. Eine Verringerung des Magnetfelds vergrößert den magnetischen Fluss Schlauch und führt damit zu einer höheren Rate am Detektor. Dies ist für niedrige Spannungen zu erkennen, da sich dort die Spektren um einen konstanten Faktor unterscheiden, nämlich genau dem Unterschied in der Tritiummolekülanzahl. Eine Schwankung des Quellmagnetfelds ist natürlich immer im Zusammenhang mit der Stabilität des Magnetfelds in der Analysierebene B_A zu sehen.

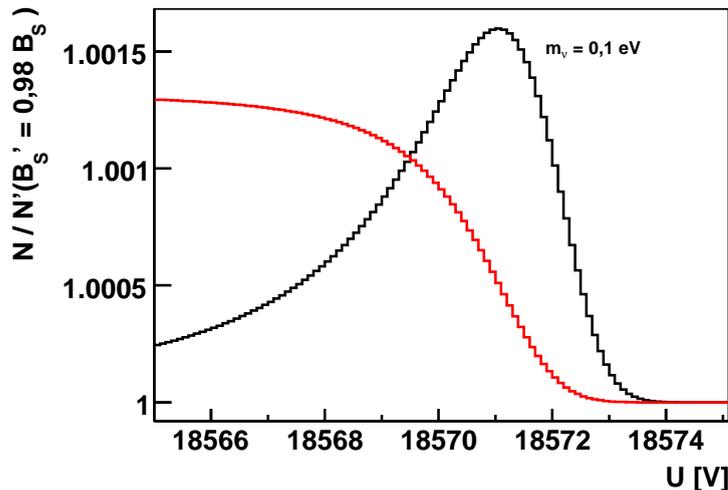


Abbildung 4.5: **Einfluss der Quellmagnetfeldstärke auf das integrierte Spektrum.** Die rote Kurve zeigt den Einfluss einer Verringerung des Quellmagnetfelds um 2%. Die schwarze Kurve ist die Referenzkurve für $m_\nu = 0,1 \text{ eV}$.

4.5 Magnetfeld in der Analysierebene

Auch für Größen, die nicht direkt zu den Quellparametern gehören, kann man die Effekte auf das integrierte Spektrum untersuchen. Als Beispiel wird der Einfluss des

²Diese Reinheit entspricht einem Verhältnis von 80% T_2 zu 20% DT.

Magnetfelds in der Analysierebene B_A betrachtet. B_A ist in den Standardanalysen ein fester Parameter, der die Energieauflösung des Spektrometers (siehe Gl. 2.1) und damit die Breite der Transmissionsfunktion bestimmt. Wird B_A verändert, ändert sich das gemessene integrierte Spektrum. In Abb. 4.6 wurde B_A um +1% erhöht. Der Effekt ist im Vergleich zu einer Neutrinomasse $m_\nu = 0,1$ eV gezeigt. Dabei ist zu beachten, dass sich - wie bei einer Änderung des Quellmagnetfelds B_S - der beobachtete Teil der Quelle ändert. Mit B_A verringert sich der magnetische Fluss (Gl. 2.2) und damit die Anzahl der Tritiummoleküle, deren emittierte Elektronen auf den Detektor gelangen können. Deshalb wurden die Spektren zuvor auf eine einheitliche Anzahl Tritiummoleküle im Flussschlauch renormiert.

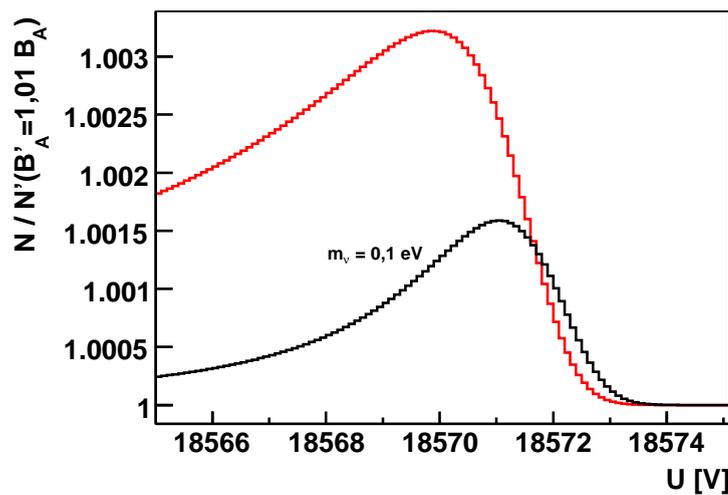


Abbildung 4.6: **Einfluss des Magnetfelds in der Analysierebene auf das integrierte Spektrum.** Eine nicht berücksichtigte Erhöhung der Magnetfeldstärke in der Analysierebene um 1% auf $B'_A = 3,03 \cdot 10^{-4}$ T resultiert im rot eingezeichneten Quotienten, der den Vergleich zur Standardkonfiguration mit $B_A = 3 \cdot 10^{-4}$ T zeigt. Als Referenzkurve ist wieder der Einfluss von $m_\nu = 0,1$ eV eingezeichnet.

4.6 Einfluss auf Systematik

Aus den Untersuchungen verschiedener Quellparameter in diesem Kapitel lassen sich zunächst noch keine Aussagen über die systematischen Effekte bei der Neutrinomassenanalyse treffen. Es lassen sich jedoch erste Abschätzungen machen, wie stark die unterschiedlichen Quellparameter die integrierten Spektren beeinflussen, die von KATRIN gemessen und dann analysiert werden. Es wird deutlich, dass die spektralen Effekte von einzelnen Quellparametern denen einer nichtverschwindenden Neutrinomasse ähnlich sind und somit bei einer Nichtberücksichtigung deutliche systematische Effekte hervorrufen können. Zum einen werden dadurch die bisherigen strengen Anforderungen an die Stabilität und Genauigkeit der Quellparameter (siehe Tab. 2.1) bestätigt, andererseits müssen die systematischen Effekte der Quellparameter noch genauer untersucht

werden. Das Programm Source Spectrum Calculation ermöglicht in diesem Zusammenhang, die Quellparameter separat zu variieren und dann die integrierten Spektren zu berechnen. Mit anderen zum Teil schon vorhandenen Programmen (z.B. KSOP [60]) kann dann die systematische Verschiebung der Neutrinomasse in der Analyse bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass die Variation des Quellparameters nicht berücksichtigt würde. Durch SSC sind solche Untersuchungen für eine wesentlich größere Anzahl Quellparameter als bisher möglich.

5. Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm entwickelt, um integrierte KATRIN-Messspektren unter der detaillierten Einbeziehung von zahlreichen Eigenschaften der Tritiumquelle zu berechnen.

In einem ersten Schritt wurde die Beschreibung des differentiellen Spektrums mit seinen Modifikationen wie den Strahlungskorrekturen implementiert. Ein Schwerpunkt lag hierbei auf der Einbeziehung der zum Teil neu berechneten Final State Distributions von ${}^3\text{HeT}^+$ und ${}^3\text{HeD}^+$ und deren Gewichtung für unterschiedliche Tritiumreinheiten. Dadurch konnten die Auswirkungen von Variationen der Tritiumreinheit auf die Messspektren untersucht werden.

In der zweiten Stufe wurden Modelle der Quellparameter wie Magnetkonfiguration, Temperatur- und Dichteprofil implementiert. Diese Profile, die teilweise parallel zu dieser Arbeit entwickelt wurden, wie z.B. das Geschwindigkeitsprofil der Tritiummoleküle, ermöglichen nun eine detaillierte Beschreibung der Quelle.

Da die einzelnen Modelle der Quellparameter immer detaillierter und abhängig von den lokalen Bedingungen werden, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Unterteilung der Quelle in viele kleine Volumina entwickelt. Dabei können alle innerhalb der Quelle variierenden Parameter bei der Berechnung der integrierten Spektren berücksichtigt werden. Es wurden die programmtechnischen Bedingungen geschaffen, um eine solche 3-D-Quellunterteilung möglichst flexibel durchzuführen. Die longitudinale Unterteilung der 10 m langen WGTS ermöglicht die Verwendung oben genannter Profile der Quellparameter. Durch eine weitere radiale und azimutale Unterteilung können nun beispielsweise Temperatur- und Dichteinhomogenitäten innerhalb eines Strahlrohrquerschnitts untersucht werden.

Einen wichtigen Bestandteil dieser Arbeit bildete die Untersuchung und Implementierung der durch die Molekülbewegungen innerhalb der WGTS hervorgerufenen Dopplerverbreiterung des Spektrums. Auf der Basis berechneter Nettogeschwindigkeiten der Moleküle im Strahlrohr wurde ein Geschwindigkeitsprofil erstellt, das von der Position (z, r) in der Quelle abhängt. Für jeden Ort in der Quelle lässt sich so die Dopplerverbreiterung der Energie der Elektronen berechnen, die in eng begrenzten Quellbereichen entstehen.

Außerdem wurden die Transmissionfunktion und die weiteren Spektrometereigenschaften mit geeigneten Methoden implementiert, um integrierte Spektren zu erzeugen. Dadurch konnten die Raten des berechneten integrierten Spektrums mit bisherigen Berechnungen verglichen werden. Dabei zeigten sich Abweichungen von bis zu 1,5%, die sich durch verschiedene Vereinfachungen der alten Berechnungen und unterschiedlicher

Integrationsroutinen erklären lassen (siehe Kap. 4.1). Diese Abweichungen sind in Relation zu den sehr kleinen Neutrinomasseneffekten nicht vernachlässigbar.

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit wurden nach der Implementierung aller Quellparameter systematische Berechnungen durchgeführt, um den Einfluss der Variation einzelner Quellparameter auf die integrierten KATRIN-Messspektren zu untersuchen. Die Effekte einer nichtverschwindenden Neutrinomasse zeigten sich wie erwartet am deutlichsten in den letzten 5 eV unterhalb des Endpunkts. Weiterhin wurde der Einfluss der Final State Distribution untersucht. Wird diese Verteilung in einer groben Vereinfachung durch einen mittleren Endzustand approximiert, ergeben sich einer nichtverschwindenden Neutrinomasse sehr ähnliche Effekte. Bei der Analyse von Schwankungen der Tritiumreinheit zeigte sich bei einer verhältnismäßig großen Änderung um 5% ein erkennbarer und zu berücksichtigender Effekt auf das integrierte Spektrum. Auch die Implikation von unerkannten Schwankungen der Magnetfelder B_S in der Quelle und B_A in der Spektrometer-Analysierebene wurden untersucht. Ihr Einfluss auf das Spektrum ist bei einer nicht berücksichtigten Änderung um 1% im Vergleich zu einer Neutrinomasse von 0,1 eV sehr ausgeprägt.

Darüber hinaus wurden erste Anstrengungen unternommen, um die implementierten Methoden zur Erzeugung einer Vielzahl simulierter Messspektren zu verwenden, die dann von anderen Programmen analysiert werden können. Dabei werden die systematischen Effekte einzelner Quellparameter auf die Neutrinomasse analysiert und aufgezeigt.

Die vorliegende Arbeit stellt mit einem erstmals implementierten realistischen Quellmodell mit allen Quellparametern einen wichtigen Schritt in Richtung einer Gesamtsimulation des KATRIN Experiments dar. Dabei werden dann einzelne Elektronen in der Quelle erzeugt und ihr Weg durch die Transportstrecke und die Spektrometer bis hin zum Detektor simuliert. Die in dieser Arbeit entwickelten Konzepte, insbesondere die Einbindung des Temperatur- und Dichteprofiles, sind bei der Bewertung von Testmessungen mit dem WGTS-Demonstrator, der eigentlichen WGTS später, sowie der Transportelemente DPS2-F und CPS zukünftig von großer Wichtigkeit.

Es sei an dieser Stelle nochmals hervorgehoben, dass bei allen bisherigen Tritiumexperimenten die mit der Quelle assoziierten systematischen Fehler dominant waren. Dies ist ein ausschlaggebender Grund dafür, dass die WGTS des KATRIN Experiments sehr genau modelliert werden muss. Die Systematik der Quelle hat auch bei KATRIN den größten Einfluss auf die Neutrinomassenbestimmung. Deshalb ist ein genaues Verständnis der Einflüsse aller Quellparameter, die die Tritiumquelle und damit das Spektrum der Quelle definieren, unerlässlich.

A. Anhang

A.1 Eingabeparameter

Die Standardparameter aus [4], die für die Berechnungen in dieser Arbeit verwendet wurden, sind in Tab. A.1 angegeben. Außerdem wird die Final State Distribution [49, 50] für alle Berechnungen verwendet (siehe Kap. 3.2.3). Die verwendeten Werte des Magnetfelds in der WGTS werden vom Programm magfield3 von F. Glück berechnet [51]. Die Quelle wird standardmäßig nur entlang der Quellachse in zunächst 1000 1 cm große Quellbereiche unterteilt. Dann werden für jeden Quellbereich die Streuwahrscheinlichkeiten der Elektronen ausgerechnet. Anschließend werden jeweils 100 Pixel zu einem neuen Quellbereich zusammengefasst. Für jeden dieser 10 resultierenden Pixel werden dann alle weiteren Berechnungen durchgeführt.

Tabelle A.1: **Quellparameter und ihre Standardwerte**

Länge des Strahlrohrs	$L = 10 \text{ m}$
innerer Radius des Strahlrohrs	$R = 4,5 \text{ cm}$
Säulendichte	$\rho d = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$
Temperatur	$T = 30 \text{ K}$
Temperaturgradient (longitudinal)	$\Delta T = 0,0 \text{ K}$
Tritiumreinheit	$\varepsilon_{\text{Trit}} = 0,95$
Magnetfeld in der Analysierebene	$B_A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$
maximales Magnetfeld	$B_{\text{max}} = 6,0 \text{ T}$
Endpunkt	$E_0 = 18575 \text{ eV}$
Neutrinomasse	$m_\nu = 0,0 \text{ eV}$
Untergrundrate	$\Gamma_b = 10 \text{ mHz}$
Detektoreffizienz	$\varepsilon_{\text{Det}} = 0,9$

Die Dopplerverbreiterung wird aus Gründen der Rechenzeit, wenn nicht explizit angegeben, nicht berücksichtigt. Ebenso wird zunächst von radialen und azimuthalen Inhomogenitäten abgesehen.

A.2 Auszug aus dem Quellcode

In Abb. A.1 wird die Klassenstruktur gezeigt, durch die die Quelle dargestellt wird.

SSCGeometry.h	SSCGeometry.h
<pre> Double_t fDensity; Double_t fLeftAngle; Double_t fLeftZ; Double_t fLeftZ; Int_t fPixelNumber; Double_t fRightZ; Double_t fRightZ; Double_t fRain; Double_t fRain; Double_t fTemp; Double_t fTemp; Double_t fThetaMax; Double_t fWidth; /*! left down corner (x[1],y[1]); left upper corner (x[2],y[2]); right upper corner (x[3],y[3]); right down corner (x[4],y[4]); contact/center: (x[0],y[0]) */ Double_t fx[5]; Double_t fy[5]; }; //! describes a ring of a slice. A ring consists of several pixels. class Ring { public: //! constructor, that allocates enough memory to store pixelcounter pixels Ring(Int_t pixelcounter); ~Ring(); segment* GetSegment(Int_t i); //! returns pointer to pixel i private: Int_t fNpix; //!< number of pixels segment** fPixel; //!< every ring consists of several pixels }; //! describes a slice of the WGS. A slice consists of several rings. class slice { public: slice(); //!< default constructor slice(const slice& b); //!< copy constructor //! constructor, that allocates enough memory to store all pixels slice(Int_t ringcounter, Int_t pixelcounter); ~slice(); //!< destructor ring* GetRing(Int_t i); //!< returns pointer to ring i //! creates all segments used for the calculations static slice** InitializeSlices(Int_t nbins, Int_t rcount, Int_t pcount); //! ensures proper destruction static void DestroySlices(slice** pbin, Int_t nbins); private: Int_t fRing; //!< number of rings Ring** fR; //!< every slice consists of several rings }; #endif //SSCGEOMETRY_H </pre>	<pre> /*!-Author: Markus Hoetzl #ifndef SSCGEOMETRY_H #define SSCGEOMETRY_H #include <Rtypes.h> //documentation style = Doxygen //! describes a pixel. class segment { public: segment(); //!< constructor ~segment(); //!< destructor Double_t GetA(); Double_t GetB(); Double_t GetCz(); Double_t GetCenterAngle(); Double_t GetCenterX(); Double_t GetCenterY(); Double_t GetColumnDensity(); Double_t GetCornerX(Int_t); Double_t GetCornerY(Int_t); Double_t GetDensity(); Double_t GetLeftZ(); Double_t GetRightZ(); Int_t GetPixelNumber(); Double_t GetRightAngle(); Double_t GetRightZ(); Double_t GetRmax(); Double_t GetTemperature(); Double_t GetThetaMax(); Double_t GetWidth(); void SetA(Double_t); void SetB(Double_t); void SetCz(Double_t); void SetCenterZ(Double_t); void SetColumnDensity(Double_t); void SetDensity(Double_t); //! specify geometry of pixels void SetGeometry(Double_t* parX, Double_t* parY, Double_t* parAngles); void SetPixelNumber(Int_t); void SetRadii(Double_t, Double_t); void SetThetaMax(Double_t); void SetWidth(Double_t); private: Double_t fA; //!< area of this segment [cm^2] Double_t fB; //!< magnetic field [T] Double_t fCz; //!< z-component of magnetic field [T] Double_t fColumnDensity; Double_t fCenterAngle; Double_t fCenterZ; //!< z-coordinate of center in WGS coordinate system </pre>

Abbildung A.1: Klassenstruktur der Quellpixel in der WGS

Bei einem Programmaufruf von SSC (siehe Anhang. A.3) wird durch die Funktion `InitializeSlices()` nicht nur die longitudinale Unterteilung der WGTS in die als Eingabeparameter definierte Anzahl an Scheiben durchgeführt, sondern auch gleich ein ausreichender Speicherplatz reserviert, um eine radiale und azimutale Unterteilung durchzuführen. Die Variablen, durch die ein Quellbereich beschrieben wird, befinden sich alle in der Klasse `Segment`. Um auf einen bestimmten Parameter eines Quellpixels, zum Beispiel die Säulendichte, zuzugreifen, verwendet man im Falle des zuvor initialisierten Objekts `slice** bin`

```
bin[i]->GetRing(j)->GetSegment(k)->GetColumnDensity()
```

mit den Koordinaten `i` für die longitudinale Unterteilung (z.B. 0 bis 9), `j` für die radiale Unterteilung (z.B. 0 bis 12) und `k` für die azimutale Unterteilung (z.B. 0 bis 11). Auch bei einer nur 1-dimensionalen Unterteilung werden alle Parameter im Objekt der Klasse `segment` gespeichert. Es werden dann nur 1 Ring und 1 Segment erzeugt, auf die mit `GetRing(0)->GetSegment(0)` zugegriffen werden kann. Ähnliches gilt für eine 2-dimensionale Unterteilung.

A.3 Programmablauf

Im folgenden ist der typische Programmablauf bei der Verwendung von SSC dargestellt. Dieses Schema soll nur die einzelnen Schritte verdeutlichen. Für die einzelnen Schritte wird ein Oberbegriff stellvertretend für die eigentlich aufgerufenen Funktionen im Programm verwendet.

```
LeseEingabeparameter();
```

```
InitialisierePixel(nbins, nrings, npixels);
```

```
SetzeQuellparameter();
```

```
BerechneStreuwahrscheinlichkeiten();
```

```
Rebin();
```

```
InitialisiereFinalStates();
```

```
Schleife über alle Quellpixel: IntegriertesSpektrum();
```

Zunächst werden die Eingabeparameter - normalerweise aus der Datei `input.txt` im aktuellen Verzeichnis - eingelesen. Hier werden unter anderem die Quellparameter aus Tab. A.1 vom Benutzer definiert. Es wird festgelegt, ob die Quelle 1-, 2- oder 3-dimensional unterteilt wird und für wie viele Scheiben, Ringe und Segmente die Berechnungen durchgeführt werden sollen.

Durch `InitialisierePixel()` werden die einzelnen Quellpixel erstellt. Zunächst werden `nbins` Scheiben erstellt, von denen jede in `nrings` Ringe unterteilt wird. Jeder Ring wird dann nochmals in `npixels` Pixel unterteilt.

`SetzeQuellparameter()` ordnet jedem Quellpixel seine geometrischen und physikalischen Eigenschaften zu. Hier können z.B. verschiedene longitudinale Unterteilungen implementiert werden; Standard ist hierbei eine äquidistante Unterteilung. Für eine radiale oder azimutale Unterteilung kann mit Hilfe der Magnetfelder am Detektor und an der gewünschten Pixelposition die Größe der Quellpixel berechnet werden (siehe Kap. 3.4). Wenn die Geometrie der Quellpixel bekannt ist, können die physikalischen Parameter wie Temperatur, Magnetfeld, Dichte usw. gesetzt werden.

Für die jeden Quellpixel können dann die für ihn geltenden Streuwahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dies geschieht normalerweise für eine große Anzahl an Quellpixeln (z.B. 1000).

Um spätere Rechnungen zu verkürzen, können an dieser Stelle dann mittels `Rebin()` mehrere benachbarte Quellpixel in longitudinaler Richtung zusammengefasst werden, ohne an Genauigkeit in den Streuwahrscheinlichkeiten einzubüßen. Die Anzahl der longitudinalen Pixel reduziert sich dann auf typischerweise 10, so dass z.B. mit jeweils 13 Ringen und jeweils 12 Segmenten eine überschaubare Anzahl an Quellpixeln erreicht wird, für die später die integrierten Spektren berechnet werden können.

Nachdem die Quellpixel erstellt wurden, kann die Final State Distribution eingelesen werden. Damit ist das differentielle Spektrum für die Berechnungen verfügbar.

Zur Berechnung des integrierten Spektrums muss dann nacheinander der Beitrag jedes Quellpixels entsprechend seiner physikalischen Parameter berechnet werden. Zum Schluss wird über alle Quellpixel summiert, um das integrierte Spektrum am Detektor zu erhalten.

Für genauere Informationen zum Programmablauf und zu einzelnen Funktion wird auf die Dokumentation zum Programmpaket SSC [63] verwiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] N. Schmitz. *Neutrino-physik*. Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart, 1997.
- [2] Y. Fukuda et al. *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*. Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1562.
- [3] Particle Data Group. *Particle Physics Booklet July 2008*. Auszüge aus C. Amsler et al. Phys. Lett. B667 (2008) 1.
- [4] KATRIN Kollaboration. *KATRIN Design Report 2004*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 7090.
- [5] F. Reines and C.L. Cowan. *The neutrino*. Nature 178 (1956) 446.
- [6] R. Davis. *A review of measurements of the solar neutrino flux and their variation*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 48 (1996) 284.
- [7] J.N. Bahcall and R. K. Ulrich. *Solar models, neutrino experiments, and helioseismology*. Rev. Mod. Phys. 60 (1988) 297.
- [8] Q.R. Ahmad et al. *Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by ^8Be Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory*. Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 071301.
- [9] J. Hosaka et al. *Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-I*. Phys. Rev. D73 (2006) 112001.
- [10] M. Roos. *Introduction to Cosmology*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2003.
- [11] L. Bergström and A. Goobar. *Cosmology and Particle Astrophysics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [12] J.C. Mather et al. *A preliminary measurement of the Cosmic Microwave Background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite*. Astrophys. J. Lett. 354 (1990) L37.
- [13] G. Hinshaw et al. *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. Observations: Data processing, sky maps, and basic results*. Astrophys. J. Suppl. 180 (2009) 225.
- [14] M.R. Nolte et al. *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. Observations: Angular power spectra*. Astrophys. J. Suppl. 180 (2009) 296.

-
- [15] E. Komatsu et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*. *Astrophys. J. Suppl.* 180 (2009) 330.
- [16] D.G. York et al. *The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary*. *Astronomical J.*, 120 (2000) 1579.
- [17] M. Colless et al. *The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 328 (2001) 1039.
- [18] M. Tegmark et al. *The 3D power spectrum of galaxies from the Sloan Digital Sky Survey*. *Astrophys. J.* 606 (2004) 702.
- [19] W. Hu et al. *Weighing neutrinos with galaxy surveys*. *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 5255.
- [20] M. Tegmark et al. *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*. *Phys. Rev. D* 69 (2004) 103501.
- [21] S. Hannestad. *Global neutrino parameter estimation using Markov Chain Monte Carlo*. arXiv:0710.1952v1 [hep-ph], 2007.
- [22] K.S. Hirata et al. *Observation in the Kamiokande-II detector of the neutrino burst from supernova SN1987A*. *Phys. Rev. D* 38 (1988) 448.
- [23] R.M. Bionta et al. *Observation of a Neutrino Burst in Coincidence with Supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud*. *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 1494-1496.
- [24] T.J. Loredo and D.Q. Lamb. *Bayesian analysis of neutrinos observed from supernova SN 1987A*. *Phys. Rev. D* 65 (2002) 063002.
- [25] K. Grotz and H.V. Klapdor. *Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart, 1989.
- [26] K. Eitel et al. *Estimate of the KATRIN sensitivity on the neutrino mass*. KATRIN Report, 65-SRP-4011-1, 2003.
- [27] C. Weinheimer et al. *High precision measurement of the tritium β spectrum near its endpoint and upper limit on the neutrino mass*. *Phys. Lett.* B460 (1999) 219.
- [28] V.M. Lobashev. *The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study it in the project KATRIN*. *Nucl. Phys.* A719 (2003) 153c.
- [29] C. Kraus et al. *Final results from phase II of the Mainz neutrino mass search in tritium β decay*. *Eur. Phys. J.* C40 (2005) 447.
- [30] M. Sisti et al. *New limits from the Milano neutrino mass experiment with thermal microcalorimeters*. *Nucl. Instr. and Meth. in Phys.* A520 (2004) 125.
- [31] F. Gatti et al. *MARE Microcalorimeter Arrays for a Rhenium Experiment*. <http://mare.dfm.uninsubria.it>, 2006.

- [32] H.V. Klapdor-Kleingrothaus et al. *Evidence for neutrinoless double beta decay.* Mod. Phys. Lett. A16 (2002) 2409.
- [33] S. Schönert et al. *The GERmanium Detector Array (GERDA) for the search of neutrinoless $\beta\beta$ decays of ^{76}Ge at LNGS.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 145 (2005) 242.
- [34] D. Akimov et al. *EXO: an advanced Enriched Xenon double-beta decay Observatory.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 138 (2005) 224.
- [35] M. Pedretti et al. *Cuore Experiment: The search for neutrinoless double beta decay.* Int. J. Mod. Phys. A23 (2008) 3395.
- [36] R.G.H. Robertson et al. *Limit on $\bar{\nu}_e$ mass from observation of the β decay of molecular tritium.* Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 957.
- [37] A. Hobl. *Report: Superconducting Magnet System WGTS for KATRIN, Technical Design report.* 1505-BP-4348-B, 2006.
- [38] K. Eitel. *Systematic influence of WGTS parameters on m_{ν}^2 .* Präsentation BASI task meeting, 65-SRP-4020-1, 2004.
- [39] F. Sharipov. *Calculations of tritium flow between the buffer vessel up to the first vacuum system.* KATRIN Report, 10-ME-2102-0 2004.
- [40] M. Zoll. Diplomarbeit in Vorbereitung, Universität Karlsruhe, 2009.
- [41] S. Reimer. Diplomarbeit in Vorbereitung, Universität Karlsruhe, 2009.
- [42] U. Schmitt. *Entwicklung eines Monitordetektors für das KATRIN-Experiment.* Doktorarbeit, Universität Karlsruhe, 2008.
- [43] A. Poon et al. *Rear Section Design Document - Outline of Questions.* Proposal, http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d479671/RearSectionDesignQuestions_v1.pdf, 2008.
- [44] R.J. Lewis. *Development of a Raman system for in-line monitoring of tritium at the KATRIN Experiment.* Doktorarbeit, Universität Swansea, 2007.
- [45] M. Schlösser. Diplomarbeit in Vorbereitung, Universität Karlsruhe, 2009.
- [46] J. Kaspar. *Influence of energy scale imperfections on neutrino mass sensitivity in the KATRIN experiment.* Diplomarbeit, Universität Prag, 2003.
- [47] A. Saenz et al. *Improved molecular final-state distribution of HeT^+ for the β -decay process of T_2 .* Phys. Rev. Lett. 84 (2002) 242.
- [48] W.W. Repko and C. Wu. *Radiative corrections to the end point of the tritium β decay spectrum.* Phys. Rev. C28 (1983) 2433.
- [49] N. Doss et al. *Molecular effects in investigations of tritium molecule β decay endpoint experiments.* Phys. Rev. C 73 (2006) 025502.

-
- [50] N. Doss and J. Tennyson. *Excitations to the electronic continuum of $^3\text{HeT}^+$ in investigations of the $T_2\beta$ -decay experiments.* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 41 (2008) 125701.
- [51] F. Glück. *The 3-dimensional magnetic field calculation program package magfield3.* Programm Dokumentation.
- [52] S. Grohmann. *Stability analyses of the beam tube cooling system in the KATRIN source cryostat.* <http://dx.doi.org/10.1016/j.cryogenics.2009.06.001>, 2009.
- [53] F. Sharipov et al. *Influence of temperature variations and acoustic waves on the column density. Calculations of the velocity distribution function.* KATRIN Report, 2009.
- [54] F. Glück. *Analytical WGTS gas flow formulae.* Präsentation in KATRIN „Source and Transport Analysis Meeting“, <http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d548656/gasflow.ppt>, 2009.
- [55] X. Luo and C. Day. *Estimation of the vacuum performance of the KATRIN DPS1-F by Monte Carlo simulation.* KATRIN Report, 10-ME-2104-0, 2005.
- [56] F. Sharipov. *Numerical calculation of tritium flow through the KATRIN beam line.* KATRIN Report, 10-ME-2100-0, 2003.
- [57] C. Weinheimer. *Spatially resolved transmission function of the main spectrometer.* KATRIN Report, http://fuzzy.fzk.de/bscw/bscw.cgi/d535039/measurement_transmission_function.pdf, 2009.
- [58] V.N. Aseev et al. *Energy loss of 18 keV electrons in gaseous T_2 and quench condensed D_2 films.* Eur. Phys. J. D 10 (2000) 39.
- [59] J. Kaspar. *Scattering probabilities.* Tabelle, 65-DMC-3002-1, 2004.
- [60] W. Käfer. Doktorarbeit in Vorbereitung, Forschungszentrum Karlsruhe, 2009.
- [61] F. Glück. *Programcode simulation.c.* persönliche Kommunikation, 2009.
- [62] K. Eitel. „*Berechnungen für Technical Design Report (2003)*“. persönliche Kommunikation, 2009.
- [63] M. Hötzel. *Source Spectrum Calculation.* Programm Dokumentation, 2009.

Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich während meiner Diplomarbeit unterstützt und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

PROF. DR. GUIDO DREXLIN danke ich, da er diese interessante Diplomarbeit ermöglicht hat.

Für die exzellente Betreuung während der Durchführung der Diplomarbeit danke ich DR. KLAUS EITEL und WOLFGANG KÄFER. Viele hilfreiche Diskussionen haben mir immer wieder geholfen und neue Ideen geliefert. Auch Wolfgangs Tipps zu C++ und ROOT haben mir vieles erleichtert.

Mein Dank gilt PROF. DR. GUIDO DREXLIN, DR. KLAUS EITEL, DR. MARKUS STEIDL und WOLFGANG KÄFER für die vielen WGTS-Meetings, in denen Probleme geklärt werden konnten und neue Aufgaben in Angriff genommen wurden.

Ich danke DR. FERENC GLÜCK, da ich einige seiner Programme verwenden durfte und er mir dabei zur Seite stand. Wenn es um die Implementierung verschiedener Routinen oder einfach nur um den Abgleich von Ergebnissen ging, konnte er mir stets weiterhelfen.

Mein Dank gilt auch PROF. DR. FELIX SHARIPOV, DR. DENIZE KALEMPA und GUILHERME BERTOLDO, die mir zum Thema Gasdynamik in der WGTS viele Fragen beantwortet haben und mich stets mit ihren neuen Berechnungen und Berichten versorgt haben. Durch die gute Zusammenarbeit konnten einige Aspekte der Geschwindigkeitsverteilung in der WGTS erheblich vereinfacht werden.

Vielen Dank an die unermüdlichen Korrekturleser dieser Arbeit DR. KLAUS EITEL, WOLFGANG KÄFER, MARCEL ZOLL und HOLGER NIEDER.

Ich bedanke mich bei allen KOLLEGINNEN UND KOLLEGEN DES KATRIN EXPERIMENTS, die mir durch Einblicke in ihre Aufgabenbereiche KATRIN noch näher gebracht haben. Besonderer Dank gilt hierbei den Diplomandinnen/Diplomanden und Doktorandinnen/Doktoranden.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt, alle dem Wortlaut oder Sinn nach entnommenen Inhalte anderer Werke an den entsprechenden Stellen unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht und keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Markus Hötzel, Juni 2009